GÉOMÉTRIE

DES

ÉCOLES PRIMAIRES,

COMPRENANT

LE DESSIN LINÉAIRE EXACT, LES PROJECTIONS,
LE LEVER DES PLANS DE TERRAINS ET DE BATIMENS;
L'ARPENTAGE, LE PARTAGE DES PROPRIÉTÉS,
LE JAUGEAGE ET LE CALCUL DES POIDS,

Claude Lucien PAR

C.-L. BERGERY,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE; PROFESSEUR A L'ÉCOLE
D'ARTILLERIE ET A L'ÉCOLE NORMALE DE METZ, MEMBRE
CORRESPONDANT DE L'INSTITUT ET DE PLUSIEURS
AUTRES SOCIÉTÉS SAVANTES.

*Ouvrage approuvé de l'Université et adopté
par le Ministre pour les écoles régimentaires.*

TROISIÈME ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE DE PLUSIEURS DÉMONSTRATIONS.

METZ.

Mme THIEL, Libraire, rue du Palais, n° 2.

PARIS,

BACHELIER, quai des Augustins, 55. | HACHETTE, rue Pierre-Sarazin, 12.
CHAMEROT, quai des Augustins, 13. | DELALIN, rue des Mathurins, 5.

1837.

Bergery

Metz. — Imp. de P. Wittersheim.

A MESSIEURS

LES INSTITUTEURS PRIMAIRES.

Mes chers Collègues!

Vous remplissez dans l'état social une des plus belles fonctions du citoyen, celle de perfectionner l'homme en développant son intelligence; mais la lecture, l'écriture et le calcul, que vous enseignez avec succès, ne sont plus des moyens suffisans, pour le degré de civilisation où la France est parvenue. Il faut y joindre l'enseignement de la Géométrie qui donne des connaissances toujours et partout utiles, fait naître ou étend un ordre d'idées extrêmement fécondes, et communique ainsi à l'esprit une merveilleuse puissance.

Vous réussirez dans ce nouvel enseignement, comme dans les autres, parce qu'il est tout aussi facile, parce que nous naissons tous plus ou moins géomètres, parce que l'instituteur qui sait vouloir, peut tout apprendre et tout enseigner. Les succès des Cours industriels sont d'ailleurs la garantie des vôtres.

C'est pour vous aider que j'ai rédigé et que je vous offre ce petit ouvrage. Vous y trouverez une géométrie plutôt pratique que théorique: la connaissance des faits de la science et les moyens d'en faire l'application, m'ont paru suffire à vos élèves. Néanmoins, je n'ai pas négligé de leur donner des exemples de raisonnemens géométriques, toutes les fois que j'ai pu le faire avec une grande simplicité.

J'avais à ne pas perdre de vue que les enfans qui fréquentent les écoles primaires, sont en général très-jeunes et destinés, pour la plupart, aux honorables travaux de l'agriculture. J'espère avoir réussi à élaguer tout ce qui aurait été, pour eux, compliqué, difficile et peut utile; mais je crois qu'ils trouveront dans ce livre tout ce qu'il faut savoir pour faire, tant sur le terrain que sur le papier et sans aucun instrument cher, les opérations géométriques les plus usuelles et les plus importantes.

Si, contre mon attente, quelques articles renfermaient des difficultés trop grandes, même pour les bons calculateurs, ce serait vous, Messieurs, qui devriez remédier à ce léger défaut de l'ouvrage, en formant deux classes de vos jeunes géomètres : il n'y aurait aucun inconvénient à réserver les points épineux pour la plus forte, ni même à les laisser entièrement de côté : mieux vaut savoir peu et bien, qu'apprendre beaucoup et mal. Soyez persuadés pourtant que toute idée, toute connaissance qui a pu entrer dans l'esprit d'un homme, peut, avec le temps et au moyen d'un nombre suffisant de répétitions, pénétrer aussi dans l'esprit le moins ouvert.

Courage, persévérance et dévouement, voilà tout ce que je vous suppose, en vous promettant un succès complet, et vous prouvez journellement qu'aucune de ces trois choses ne vous manque. Commencez donc avec confiance, et comptez sur la reconnaissance nationale : le jour ne peut-être loin où elle vous donnera la juste récompense de votre pénible et noble tâche.

BERGERY.

INSTRUCTION

SUR

LE DESSIN LINÉAIRE EXACT.

Il est indubitable que des opérations géométriques dont on se borne à suivre la description dans un livre et même sur une figure, ne se gravent jamais d'une manière durable dans l'esprit. Pour parvenir à les retenir, à les exécuter sûrement et avec facilité, il faut absolument en faire soi-même tous les détails, et plusieurs fois plutôt qu'une seule. C'est d'ailleurs en répétant souvent et manuellement l'application d'un principe, qu'on se le rend propre et qu'on le met au nombre de ces idées familières qui se présentent en quelque sorte d'elles-mêmes, dès que l'esprit en a besoin.

Les élèves d'un cours de Géométrie doivent donc, pour étudier cette science fructueusement, opérer sans cesse, comme font en arithmétique ceux qui veulent devenir habiles calculateurs. Jamais ils ne sauraient pratiquer la Géométrie ou en appliquer les principes, s'ils n'exécutaient pas eux-mêmes, sur le tableau noir et mieux encore sur le papier, tous les *tracés* qui leur sont enseignés.

L'exécution des tracés constitue en grande partie ce qu'on peut appeler le *Dessin linéaire exact*. Ce genre de dessin est facile, il faudrait même être bien malheureusement organisé, pour n'y pas réussir dès les premiers essais. Toutefois, une courte instruction propre à guider les commençans, ne peut que rendre leurs succès plus prompts et plus certains.

Le tableau noir doit être solidement fixé sur un mur et avoir 2 mètres en longueur, 1^m, 50 en largeur.

Fait en peuplier, il coûte à Metz, tout posé, 16^f.

Pour dessiner sur ce tableau, il faut :

Une règle longue de 1^m et large de $0^m,08$; prix : 1^f.
Une équerre de $0^m,2$ sur $0^m,15$; prix : $1^f,50$.
Un compas en noyer, long de $0^m,60$, dont une branche soit terminée par une pointe en fer et l'autre par un porte-crayon du même métal; prix : 6^f.

Il faut en outre des crayons de craie tendre, et une grosse éponge ou un linge pour effacer.

Les tracés faits sur le tableau sont d'autant moins inexacts, que les crayons sont plus fins; mais à raison de ce que la craie tendre ne peut former une pointe à la fois solide et fine, il y a impossibilité de mettre une grande précision dans de tels dessins. Aussi doivent-ils être considérés seulement comme des exercices propres à bien faire saisir les tracés et à donner le moyen de les exécuter aisément, avec exactitude, sur le papier.

Lorsqu'on veut unir à la craie et en suivant la règle, deux points ou marques faites sur le tableau, on doit placer cette règle à la même distance de ces deux points et l'en tenir écartée autant que l'exige la grosseur du crayon.

Pour dessiner sur le papier, il faut :

Une règle en bois dur, de 15 pouces; prix : 50 centimes.
Une équerre en bois dur, de 8 pouces sur 4 pouces; prix : 50 centimes.
Un double décimètre de *Kutsch*; prix : 70 centimes.
Un tire-ligne; prix : 2f. (Il peut être remplacé par une plume bien taillée en fin.)
Un compas à trois fins, de 4 pouces; prix : 5f.
Un crayon de mine de plomb; prix : 20 centimes.
Un morceau de gomme élastique; prix : 10 centimes.
Un morceau d'encre de Chine; prix : 20 centimes.

Prenez une feuille de papier entière et ouvrez-la. Sur la page de gauche, vous écrirez les énoncés des tracés et vous les numéroterez; sur la page de droite, vous ferez ces tracés et vous leur donnerez les mêmes numéros qu'aux énoncés correspondans. Rien autre chose que ces chiffres ne sera écrit sur le dessin.

Les tracés doivent être faits d'une telle dimension, que six au plus remplissent la page. Vous les exécuterez d'abord au crayon et légèrement; puis, vous *mettrez à l'encre* en suivant exactement les traits du crayon; enfin, vous effacerez avec la gomme élastique, les parties de ces traits que vous n'aurez pas dû couvrir d'encre.

C'est aussi en frottant le papier avec la gomme, qu'on le nettoie, quand la feuille de dessin est terminée. Si cette gomme se trouve trop dure pour bien enlever le crayon ou les souillures, on l'amollit soit en la chauffant, soit en la pétrissant entre les doigts.

Taillez le crayon en *langue de chat*, pour qu'il casse moins souvent et qu'il produise des lignes très-fines.

Marquez légèrement, avec une pointe de crayon ou de compas, les points que vous devrez unir par un trait.

Pour préparer l'encre, vous mettrez dans une soucoupe trois ou quatre gouttes d'eau et vous frotterez le morceau d'encre de chine sur le fond du vase, jusqu'au moment ou il formera un sillon qui permette d'apercevoir ce fond : alors seulement l'encre sera suffisamment noire.

Vous mettrez l'encre entre les *lèvres* du tire-ligne, au moyen d'une plume, après avoir desserré la vis qui unit ces lèvres. Quand vous aurez introduit trois ou quatre plumées d'encre, vous resserrerez la vis et vous essaierez l'instrument sur un morceau de papier, pour voir si les lignes qu'il tracera sont trop grosses ou trop fines.

Lorsqu'un tire-ligne qui contient de l'encre et qui n'est pas trop serré, vient à ne pouvoir plus marquer, il faut le passer légèrement sur le doigt, pour enlever l'encre sèche qui se trouve à l'extrémité du bec.

Le grand tire-ligne doit être tenu presque à plomb ; vous le pencherez seulement un peu vers la droite, en l'appuyant contre l'arête supérieure de la règle. Cette règle est conséquemment placée à une petite distance du trait au crayon qu'il s'agit de mettre à l'encre.

Le tire-ligne du compas doit avoir, en tournant, la même position que l'autre. Vous aurez soin de ne pas trop appuyer sur la *pointe sèche* qui reste fixe ; autrement, vous perceriez le papier.

Dès que vous n'aurez plus à vous servir d'un tire-ligne, vous l'essuierez en dedans, avec soin, pour prévenir la rouille. On peut toujours éviter de mettre de l'encre en dehors ; mais lorsqu'il y en a, il faut l'enlever, après l'avoir mouillée un peu, si elle est sèche.

Un dessin dépourvu d'explication doit se faire comprendre par lui-même. Pour qu'il en soit ainsi :

Les lignes données, droites ou courbes, sont très-fines et continues, comme celle-ci ————————.

Les lignes de résultat, droites ou courbes, sont un peu moins fines et continues, comme celle-ci ————————.

Les lignes de construction, c'est-à-dire toutes les autres, droites ou courbes, sont très-fines et coupées par des intervalles, comme celle-ci — — — — —. Lorsqu'elles se trouvent en grand nombre, on distingue celles d'une opération de celles d'une autre, en mettant un, deux, trois points dans les intervalles.

EXEMPLES : —.—.—, —..—..—..—, —...—...—...—.

Les parties d'une ligne coupée doivent être à-peu-près égales entre elles; les intervalles blancs doivent être très-petits et aussi à-peu-près égaux entre eux.

Il importe de s'exercer beaucoup au tracé de ces différentes sortes de lignes, soit avec le grand tire-ligne ou la plume, soit avec le compas; c'est le seul moyen de parvenir promptement à dessiner vite et bien.

On relève beaucoup un dessin, quand on entoure la feuille, d'un cadre composé de deux traits, l'un intérieur et fin, l'autre extérieur et large ; mais l'exécution d'un pareil cadre coûte beaucoup de temps, et mieux vaut s'en abstenir.

SIGNES D'ABRÉVIATION.

+ remplace le mot *plus*.

— remplace le mot *moins*.

= remplace le mot *égale*.

× remplace les mots *multiplié par*.

5 : et $\frac{5}{3}$ signifient également 5 *divisé par* 3.

(19) signifie qu'il faut relire tout le 19e article.

(P. II, F. 15) signifie qu'il faut avoir sous les yeux la 15e *figure* de la 2e *planche*.

GÉOMÉTRIE

DES

ÉCOLES PRIMAIRES.

LIGNES ET ARÊTES DES CORPS.

La Géométrie enseigne à tracer des traits fins appelés *lignes*, dont la forme et la position sont indiquées ; à représenter exactement, sur un tableau, un *corps* quelconque, c'est-à-dire toute chose qu'on peut toucher ; à comparer et à mesurer les corps, leurs faces, les lignes et les arêtes qui s'y trouvent.

LIGNE DROITE.

1. Une ligne est *droite*, quand elle peut se confondre avec une des arêtes d'une bonne règle ; elle est *courbe*, lorsqu'elle ne le peut pas.

Rien ne paraît plus facile que de *tracer une ligne droite*. Il ne s'agit en effet que d'appliquer une règle sur une des faces d'un corps et de faire glisser un crayon, une pointe à tracer, le long de l'une des deux grandes arêtes qui touchent cette face ; mais, il faut avoir bien soin de maintenir la règle toujours dans la même position, de n'en jamais écarter le crayon ou la pointe, et c'est à quoi l'on ne réussit qu'après s'être exercé.

Si vous devez unir par une droite deux *points* donnés, c'est-à-dire deux marques faites par deux piqûres d'une *pointe* très-fine, il faut placer la règle de manière que l'une de ses grandes arêtes soit tout contre les deux points.

La droite ainsi tracée entre deux points *est le plus court chemin* pour aller de l'un à l'autre ; sa longueur donne, par conséquent, *la vraie distance* qui sépare ces points.

Moins les points sont gros, et plus il y a d'exactitude dans les tracés. Vous sentez, en effet, que s'il s'agit de prendre, avec un compas, l'écartement de deux points un peu gros, il est impossible de savoir précisément où doivent être posées les pointes, et qu'on ne sait pas davantage comment placer la règle, quand il faut unir ces points par une droite. Vous devez donc chercher, en traçant soit sur le papier, soit sur d'autres corps, à faire des points aussi petits et des lignes aussi fines qu'il est possible.

Les planches jointes à ce livre montrent que les différentes parties d'une *figure* géométrique se distinguent au moyen des lettres de l'alphabet. Un point est toujours désigné par une seule lettre ; ainsi l'on dit : le point A, le point B, le point C (P. I, F. 1). Toute droite est désignée par deux lettres qu'on place ordinairement aux extrémités, mais qui peuvent aussi être mises ailleurs ; ainsi l'on dit, à volonté : la droite AB ou la droite AC.

2. Les règles sont souvent mal faites, ou bien avec le temps elles se courbent. Pour *vérifier une règle*, il faut en vérifier chacune des 4 longues arêtes. Tracez une ligne le long d'une de ces arêtes ; retournez ensuite la règle bout pour bout, et présentez à la ligne, l'arête qu'a suivie le crayon. Si cette ligne en est recouverte dans toute sa longueur, elle est droite et l'arête est juste. Quelque courte que soit une partie non recouverte, l'arête est fausse, et il faut la marquer, pour éviter de s'en servir.

3. Certains travaux nécessitent des droites d'une telle longueur, qu'on ne peut employer une règle pour les tracer. Les jardiniers, les terrassiers, les maçons, etc., font usage d'un cordeau attaché à deux piquets ou à deux pierres. Ils doivent observer que si le cordeau ne repose pas, dans toute sa longueur, sur la face *réglée* d'un corps, c'est-à-dire sur une face où la règle puisse s'appliquer d'un bout à l'autre, ils n'ont point et ne peuvent jamais avoir une véritable droite. Effectivement, le poids du cordeau le rend courbe et d'autant plus courbe qu'il est plus considérable. Mais plus on tend fortement, et plus on diminue la courbure.

Les charpentiers se servent aussi d'un cordeau pour tracer de longues droites. Ils le frottent avec du blanc d'Espagne, de l'ocre, du noir de fumée delayé dans de l'huile, l'appliquent sur deux points de la droite à tracer, le tendent fortement, le pincent pour l'élever au-dessus de la pièce de bois, en maintenant les deux bouts, puis enfin le laissent retomber. Mais l'empreinte qu'il forme en frappant la pièce, n'est rigoureusement une droite que dans le cas où il a été élevé dans l'aplomb de sa première position.

Ceux qui arpentent ou qui lèvent des plans, marquent seulement les extrémités des droites. Ces droites n'en sont pas moins bien déterminées : on peut, en plaçant l'œil dans l'alignement des deux points extrêmes, faire planter sur chacune, bien qu'elle ne soit pas tracée, autant de piquets ou de jalons qu'il en est besoin.

CERCLE.

4. Parmi toutes les lignes courbes, il en est une qu'on appelle indifféremment *cercle* ou *circonférence*.

Tracer un cercle.

Sur le papier ou sur un tableau, appuyez légèrement l'une des pointes d'un compas ouvert, et faites tourner l'autre pointe autour de celle-là, de manière qu'elle marque sa trace. Cette trace sera un cercle.

Sur le terrain, vous pouvez employer une grande perche, percée à l'un de ses bouts. Vous introduirez une pointe dans le trou et vous enfoncerez cette pointe dans le sol, ou bien vous la ferez maintenir dans une position fixe, par un aide; puis, vous appliquerez une pointe à tracer contre la perche, et saisissant ces deux objets d'une seule main, de manière à rendre invariable le point où ils se toucheront, vous les ferez tourner autour du pivot.

Si le cercle à tracer est trop grand pour que vous puissiez employer une perche, vous aurez recours au cordeau. Il doit être bouclé à chaque extrémité. Dans l'une des boucles, vous engagerez la pointe fixe; dans l'autre, la pointe traçante, et au moyen de cette dernière, vous ferez tourner le cordeau, en le tirant de manière qu'il soit toujours à-peu-près également tendu.

5. Le point A marqué par la pointe fixe (P. I, F. 2), est le *centre* du cercle.

On désigne souvent un cercle par ce seul point, en disant le *cercle A*.

Toute droite AB tirée du centre jusqu'à un point quelconque de la courbe, est appelée *rayon* du cercle. Toute droite CD tirée d'un point de la circonférence à un autre, est une *corde*, et la partie du cercle comprise entre les deux points C, D, soit d'un côté de la corde, soit de l'autre, est un *arc*.

Toute droite BC menée d'un point de la courbe à un autre et passant par le centre, est nommée *diamètre* du cercle. Un diamètre est aussi une corde, mais il est plus grand que toute autre corde qui ne passe pas par le centre.

Tous les rayons d'un cercle sont égaux, car il résulte du tracé, qu'il faut, pour prendre la longueur d'un rayon quelconque, la même ouverture de compas que pour prendre celle de chacun des autres.

Tous les diamètres d'un cercle sont égaux, car chacun vaut deux rayons. Le diamètre BC, par exemple, est la somme des rayons AB et AC.

De ce que tous les rayons sont égaux, il suit que *tous les points du cercle sont également éloignés du centre.* Par conséquent, *le cercle tracé autour d'un point pris pour centre, est le lieu où se trouvent tous les points également éloignés du premier.*

Si, par exemple, vous voulez marquer plusieurs points situés à 3 mètres d'un point A, vous décrirez un cercle autour de ce point A pris pour centre; avec une perche ou un cordeau de 3 mètres, c'est-à-dire en maintenant la pointe trançante à 3 mètres de la pointe fixe, et tous les points que vous marquerez sur ce cercle, seront à 3 mètres de A.

6. *Trouver un point qui soit à 3 mètres d'un point A et à 2^m d'un point B* (P. I, F. 3).

Vous décrirez un cercle de 3^m de rayon, autour de A, et un cercle de 2^m de rayon, autour de B. Ces deux cercles se couperont en deux points C, D. Le point C étant sur le grand cercle, se trouvera à 3^m de A; étant sur le petit cercle, il se trouvera à 2^m de B, et il en sera de même du point D. Le problème a donc deux solutions. Vous prendrez celle du point C, si le point demandé doit être au-delà de la ligne droite AB; vous prendrez celle du point D, si le point demandé doit être en deça de AB. Lorsque aucune de ces conditions ne sera imposée, vous prendrez indifféremment l'un ou l'autre des deux points C, D.

7. Les deux exemples précédens vous montrent que, pour *décrire un cercle dont le rayon est donné*, il faut mettre et maintenir entre la pointe traçante et la pointe fixe, une distance égale à la longueur du rayon.

Si c'est le diamètre qui est connu, on en prend la moitié pour avoir le rayon. Qu'on ait, par exemple, à tracer un cercle dont le diamètre soit $1^m,50$, on emploiera un rayon de $0^m,75$ moitié de $1^m,50$.

COMPARAISON DES CERCLES ET DE LEURS ARCS.

8. Il n'est pas nécessaire de mesurer le contour des cercles pour les comparer; il suffit de mesurer leurs rayons ou leurs diamètres. Si le rayon d'un cercle est le tiers, la

moitié, le double, le triple, le quadruple, etc., du rayon d'un autre, le contour du premier cercle sera le tiers, la moitié, le double, le triple, le quadruple, etc., de celui du second. Il en est de même pour les diamètres. C'est ce qui fait dire que *deux circonférences se contiennent comme leurs rayons ou comme leurs diamètres.*

9. *Combien une circonférence dont le diamètre est de 75 centimètres, contient-elle de fois une circonférence dont le diamètre est de 15 centimètres?*

Pour répondre à cette question, je cherche combien de fois 75 contient 15, c'est-à-dire que je divise 75 par 15. Le quotient 5 m'apprend que le contour du grand cercle vaut 5 fois le contour du petit.

10. *La piste du manége d'un huilier a 2^m de rayon; il la trouve trop courte et veut l'augmenter d'un quart. A quelle distance du pivot doit-il atteler son cheval?*

Puisque la grande circonférence surpassera la petite de $\frac{1}{4}$, son rayon doit surpasser de $\frac{1}{4}$ le rayon donné; la longueur du nouveau rayon sera donc 2 mètres, plus le quart de 2^m, c'est-à-dire 2^m plus $0^m,5$ ou $2^m,5$.

11. *Lorsque deux roues dentées engrènent l'une sur l'autre, les nombres de tours qu'elles font dans le même tems, se contiennent à l'inverse des rayons.*

Il est clair d'abord que les nombres de tours sont inverses des circonférences: la petite roue appliquant successivement tous ses points sur la grande, doit faire d'autant plus de tours, contre un seul de celle-ci, que sa circonférence est moindre ou contenue plus de fois dans l'autre. Si, par exemple, le pourtour de la grande roue vaut 2 fois, 3 fois celui de la petite, cette dernière fera 2 tours, 3 tours, pendant que la première en fera un. Si l'une des roues a 3 mètres de circonférence et l'autre 7^m, la petite sera contenue $^7/_3$ de fois dans la grande et fera $^7/_3$ de tours, pendant que l'autre en fera un, ou 7 tours contre 3. Mais, puisque les circonférences se contiennent comme 3 et 7, il en est de même des rayons (8). Donc, lorsque les rayons se contiennent comme 3 et 7, les nombres de tours respectifs se contiennent à l'inverse, comme 7 et 3.

Le rayon d'une roue est les $^2/_3$ de celui d'une autre avec laquelle elle engrène; combien fait-elle de tours, pendant que la grande en fait un?

Les rayons se contiennent comme 2 et 3; par conséquent, les nombres de tours respectifs doivent se contenir comme 3 et 2. La petite roue fera donc 3 tours, pendant que la grande en fera 2, ou $^3/_2$ tours contre 1, ou 1 tour $^1/_2$ contre 1.

12. *On veut qu'une roue qui doit engrener avec une autre, fasse 2 tours, pendant que cette autre en fera 3; quel doit être le rayon de la première, par rapport à celui de la seconde?*

Puisque les nombres de tours se contiennent comme 2 et 3, les rayons doivent se contenir comme 3 et 2 (11). Conséquemment, le rayon de la grande roue sera les $^3/_2$ du rayon de la petite ou le surpassera d'une moitié.

13. *Tracer un cercle qui soit égal à un autre.*

Il suffit de prendre le même rayon; car des circonférences qui ont des rayons égaux se contiennent une fois ou sont égales (8).

14. *De deux arcs situés sur le même cercle ou sur des cercles égaux, le plus grand contient l'autre autant de fois qu'il peut en recevoir la corde.*

Ainsi, l'arc ABD est triple de l'arc EFG (P. I, F. 4), parce que la corde EG du second peut être reçue 3 fois par le premier : une fois de A en B, une fois de B en C et une fois de C en D. On dit aussi dans un tel cas, que la corde EG peut être *portée* 3 fois sur l'arc ABD.

Remarquez que 3 lettres sont employées pour désigner un arc. Si l'on disait l'arc AD, la personne qui écouterait ou qui lirait, ne saurait pas s'il s'agit de l'arc ABD ou de l'arc AFD. Quelquefois cependant, on ne se sert que de deux lettres pour nommer un arc; mais il est convenu qu'on veut parler alors du plus petit des deux qui ont la même corde. En disant donc l'arc EG, ce n'est pas le grand arc EBG qu'on indique; c'est le petit EFG.

Lorsque des arcs appartiennent à des cercles inégaux, on ne peut les comparer qu'après les avoir mesurés.

Il faut bien se garder de croire que les arcs d'un même cercle ou de cercles égaux, se contiennent autant de fois que leurs cordes; ce serait une très-grave erreur. La corde AD de l'arc ABD n'est pas triple de la corde EG de l'arc EFG, quoique le premier arc soit triple du second. En effet, la ligne brisée ABCD, formée de trois lignes droites, est triple de la corde EG : on l'a faite telle; et cette ligne brisée est plus longue que la ligne droite AD qui a les mêmes extrémités A et D (1).

15. Il suit de ce qui précède que *deux arcs qui ont des cordes égales, sont égaux, s'ils se trouvent sur le même cercle, ou sur des cercles de même rayon*, et s'ils sont chacun le plus petit ou le plus grand des deux arcs qui ont la même corde.

Réciproquement, *sur le même cercle ou sur des cercles de même rayon, les cordes sont égales, quand les arcs sont égaux.* Mais observez bien que c'est seulement dans le cas de l'égalité, que les arcs se contiennent comme les cordes.

Soient les deux cercles A,B de même rayon (P. I, F. 5). Si les cordes CD, EF sont égales, les deux petits arcs CGD, EHF sont de même longueur, ainsi que les deux grands arcs CID, EKF. Réciproquement, il suffit qu'on ait reconnu que les arcs CGD, EHF sont égaux, pour être sûr que les cordes CD, EF ont une même longueur.

16. *Marquer, sur un cercle A, un arc égal à un autre BCD, situé sur le même cercle* (P. I, F. 6).

Je prends, avec un compas, la longueur de la corde qui joindrait le point B au point D; je porte cette longueur de E en F, par exemple, et j'ai l'arc EGF qui est égal à l'arc BCD.

17. *Marquer, à partir d'un point A, un arc qui soit quadruple d'un autre BCD* (P. I, F. 7).

Je prends, avec un compas, la corde de BCD; je la porte 4 fois de A en E, et j'ai l'arc AFE qui contient 4 fois l'arc BCD ou qui en est le quadruple.

18. Une même corde peut toujours être portée deux fois dans un cercle, à partir du même point, et donner ainsi deux arcs égaux qui aient une extrémité commune. Par exemple, la corde AB (P. I, F. 8) peut être portée de A en C et fournir l'arc ADC égal à l'arc AEB. Mais il n'en est pas de même du diamètre AF; il est impossible de porter cette longueur, de A en un point du cercle qui soit autre que le point F. Il faut en conclure que les deux arcs ADF, AEF formés par le diamètre AF sont égaux. Par conséquent, *tout diamètre partage le cercle en deux arcs égaux, et chacun de ces arcs est la moitié de la circonférence.*

MESURAGE DU CERCLE, DES ARCS ET DU DIAMÈTRE.

19. *Mesurer une circonférence.*

Si vous pouvez l'entourer d'une ficelle, vous le ferez, et il ne s'agira que de mesurer la longueur de cette ficelle, pour avoir celle de la ligne courbe. Mais observez qu'il faut employer une ficelle molle, peu torse, peu susceptible de s'étendre, quand on la tire par les deux bouts : autrement, la longueur trouvée pourrait n'être point la véritable.

Si vous ne pouvez vous servir de ce moyen, *mesurez le diamètre et multipliez-le par* 3,1416. Le produit vous donnera la longueur de la circonférence, à fort peu près. Représentant cette longueur par C et le diamètre par D, on a pour *formule* $C=D\times3,1416$.

Supposons que le diamètre ait été trouvé de 5 mètres ; la formule donnera $C=5^m\times3,1416=15^m,708$. Si vous vous contentiez de tripler le diamètre, comme font quelques personnes, vous trouveriez 15^m, longueur beaucoup trop petite, et si vous y ajoutiez un septième du diamètre, comme font d'autres personnes, vous obtiendriez $15^m,714$, résultat trop grand de 6 millimètres au moins.

On se rappelle assez facilement le nombre 3,1416, lorsqu'on s'habitue à le prononcer par parties, à dire 3....14....16. Il faut se contenter du degré d'exactitude qu'il donne, car le résultat $15^m,708$ n'excède pas de 4 cent-millièmes de mètre la vraie longueur de la circonférence dont le diamètre est 5 mètres, et l'on ne peut obtenir rigoureusement la mesure d'aucune circonférence.

20. *Mesurer un arc de cercle.*

Si l'on peut appliquer une ficelle d'un bout à l'autre de l'arc, on en obtient la longueur en mesurant celle de la ficelle.

Quand il est impossible de procéder ainsi, il faut connaître combien de fois l'arc est contenu dans la circonférence. En est-il le tiers, le quart, les $\frac{2}{5}$, etc. ? On mesure la circonférence et l'on prend le tiers, le quart, les $\frac{2}{5}$ de la longueur de cette courbe, pour avoir la longueur de l'arc.

Voici maintenant comment vous pourrez *trouver combien un arc ABC est contenu de fois dans la circonférence* (P. I, F. 9).

Prenez la corde de ABC et portez-la autant de fois qu'il sera possible sur la circonférence, 6 fois par exemple, de A en D ; prenez ensuite la corde du reste DA et portez-la sur l'arc ABC ; elle y sera reçue, je suppose, 2 fois de A en E. Prenez alors la corde du reste EC et portez-la sur le petit arc DA. Si vous trouvez qu'elle y est reçue 3 fois tout juste, par exemple, l'arc EC sera la commune mesure de la circonférence et de l'arc AC.

Dites-donc : puisque DA=3EC et que ABC=2DA+EC, il est clair que ABC=6EC+EC ou 7 EC ; puisque la circonférence=6ABC+DA, il est clair que cette circonférence =42EC+3EC ou 45EC. Ainsi, ABC contient 7 fois l'unité de mesure EC, et la circonférence la contient 45 fois ; l'arc ABC est donc les $\frac{7}{45}$ de la circonférence.

Au reste, pour plus de simplicité, écrivez tous les quotiens, 6, 2, 3, au-dessous les uns des autres dans l'ordre où vous les trouvez ; mettez l'unité vis-à-vis de 3 le dernier et ce dernier vis-à-vis de 2 l'avant-dernier ; multipliez celui-ci 2, par le nombre 3 qui est sur sa ligne, vous aurez 6 ; ajoutez au produit, le nombre 1 qui est au-dessous du multiplicateur 3, vous aurez 7 ; écrivez ce résultat vis-à-vis du quotient 6 suivant, en remontant ; multipliez ce quotient par le nombre 7 qui est sur sa ligne, vous trouverez 42 ; ajoutez à ce produit, le nombre 3 qui est sous le multiplicateur 7, vous obtiendrez 45 que vous écrirez au-dessus du 7. Renversez ces deux derniers nombres et séparez-les par un trait, vous aurez enfin la fraction $\frac{7}{45}$ qui exprimera combien de fois l'arc ABC est contenu dans la circonférence entière.

	45
6	7
2	3
3	1

C'est encore ainsi qu'il faut opérer, si l'on veut *trouver le nombre de fois qu'une ligne droite en contient une autre, lorsque ce nombre n'est pas entier.*

21. *Mesurer le diamètre de la circonférence intérieure d'une tour* (P. I, F. 10).

Si l'on peut opérer librement dans la tour, vous ferez maintenir en un point A, le bout d'une règle terminée en biseau ; vous placerez une seconde règle contre celle-là, de manière à former une ligne droite avec l'arête qui aboutit en A, et vous ferez pivoter ce système autour de A jusqu'à ce que le bout B de la 2e règle, terminée aussi en biseau, ne puisse plus s'éloigner du pivot. Quand le système aura cette position, qu'il ne pourrait quitter sans que la distance AB diminuât, la droite AB sera dirigée selon un diamètre, puisque le diamètre est la plus grande de toutes les cordes (5). Il suffira donc alors de mesurer AB pour connaître le diamètre cherché.

C'est ainsi qu'il faut s'y prendre, pour mesurer le diamètre de toute circonférence dans l'intérieur de laquelle on peut opérer.

Si l'intérieur n'est pas libre, on cherche le diamètre de la circonférence extérieure de la tour et l'on en retranche le double de l'épaisseur EF du mur, prise dans l'embrasure d'une porte ou d'une fenêtre ; car AB est égal à CD diminué de AC et de BD. Mais observez que pour avoir la véritable épaisseur du mur, il faut la mesurer dans la direction d'un rayon. Ce n'est donc pas sur les faces GH d'une porte ou d'une fenêtre, qu'on doit prendre la mesure de l'épaisseur d'un mur en tour ronde, puisque ces faces ne sont pas dirigées vers le centre ; c'est sur la droite EF qui est également distante de l'une et de l'autre.

22. *Mesurer le diamètre de la circonférence extérieure d'une tour* (P. I, F. 10).

Si vous pouvez mesurer le diamètre AB de la circonférence intérieure, vous n'aurez qu'à y ajouter le double de l'épaisseur EF du mur, pour avoir CD le diamètre cherché.

Si vous ne pouvez pas mesurer AB, vous mesurerez la circonférence extérieure (19) et vous diviserez sa longueur par le nombre 3,1416. Le quotient différera extrêmement peu du diamètre demandé. La formule est $D = \frac{C}{3,1416}$, D représentant le diamètre et C la longueur de la circonférence.

On se contente quelquefois de prendre, pour longueur du diamètre, le tiers de la circonférence ; mais le résultat est beaucoup trop grand. D'autrefois on multiplie la circonférence par 7 et l'on divise le produit par 22 ; mais le quotient, moindre que celui qui résulte du diviseur 3,1416 est trop petit.

Lorsqu'il sera impossible de mesurer directement la circonférence de la tour, vous tracerez une droite AB à une petite distance (P. I, F. 11), puis vous placerez une règle qui soit d'équerre sur AB et touche le mur rond. Ayant marqué le point C où AB sera coupée par la règle, vous transporterez cette règle de l'autre côté et la placerez de la même manière, ce qui donnera un deuxième point D. La longueur de la droite CD sera exactement celle du diamètre cherché.

C'est ainsi qu'il faut mesurer le diamètre de toute circonférence dont on ne peut prendre le tour ou dans l'intérieur de laquelle il n'est pas possible d'opérer.

Au lieu d'employer une règle et de la placer à l'équerre, ce qui n'est pas toujours facile sur le terrain, on peut se servir du système de deux cordes que représente la figure 12 (P. I). La partie EF renferme trois unités de longueur, comme trois pieds, 3 décimètres, 3 mètres, etc.; la partie EG renferme 4 unités de même espèce que celles de EF, et FG en contient 5. Quand le système est placé de façon que ses trois parties se trouvent bien tendues, la figure FEG est absolument celle d'une équerre, et parconséquent, la droite EI est d'équerre sur EH.

Pour appliquer le *cordeau-équerre* au mesurage du diamètre d'une tour, vous le placerez de telle sorte que le cordon EH couvre une partie de la droite AB (F. 11) et qu'en même temps le cordon EI, tendue en ligne droite, comme EH, FG, touche le mur rond; puis vous marquerez le point C de AB, sur lequel se trouvera le coude E de la corde HEI. Opérant de la même manière, de l'autre côté de la tour, vous déterminerez le point D de AB.

ANGLES.

23. Deux droites ne peuvent se couper qu'en un seul point; on appelle ce point leur *intersection*.

Deux droites AB, BC qui se rencontrent en un point B (P. I, F. 13), laissent entre elles un espace qu'on nomme *angle*. AB et BC sont les *côtés* de cet angle; le point B en est le *sommet*.

Il suffit de trois points pour désigner un angle : celui du sommet et deux autres pris sur les côtés. Ainsi, l'on dit : l'angle ABC, mettant la lettre du sommet entre les deux autres. Quelquefois aussi l'angle est désigné par la seule lettre du sommet, et l'on dit : l'angle B; mais il faut pour cela que ce sommet ne soit pas commun à plusieurs angles.

De même qu'il suffit d'une petite partie d'une droite, pour qu'on puisse la continuer jusqu'à une distance quelconque (3), il suffit aussi d'une petite partie de l'angle pour qu'on puisse lui donner telle étendue qui sera assignée : toute l'opération consiste à prolonger les côtés. Un angle est donc réellement un espace sans limite, et néanmoins il est toujours suffisamment indiqué par la partie qui avoisine le sommet. Aussi se contente-t-on d'*amorcer*, pour ainsi dire, comme dans la figure 13, les angles qu'il faut représenter.

24. *Transporter sur la face d'une pierre de taille, l'angle ABC que forment les fondations de deux murs* (P. I, F. 14).

On emploie pour cela une *fausse-équerre*. Cet instrument est composé de deux règles unies par une charnière; celle du tailleur de pierres a des pointes, pour qu'elle puisse servir de compas.

Vous ouvrirez la fausse-équerre, puis vous la placerez de manière que l'une des arêtes intérieures se confonde avec l'arête AB d'un des murs, et qu'en même temps l'autre arête intérieure couvre l'arête BC de l'autre mur. Alors, l'angle ABC sera *levé*, ou *relevé*, comme disent les ouvriers, c'est-à-dire que les deux règles de l'instrument feront entre elles le même angle que les arêtes des murs. Ensuite, sans altérer l'écartement de ces deux règles, vous les placerez sur la face de la pierre de taille, de façon qu'une des arêtes intérieures couvre une arête de la pierre, et avec une pointe à tracer, vous tirerez une droite le long de l'autre arête intérieure. Cette droite fera évidemment, avec le bord de la pierre, l'angle ABC.

Ce procédé convient à tous les cas où il faut transporter un angle d'un lieu dans un autre.

COMPARAISON DES ANGLES.

25. Vous pouvez concevoir aisément que le côté AB de l'angle ABC (P. I, F. 15) ait d'abord été appliqué sur le côté BC, et qu'ensuite il se soit écarté de cette droite, en tournant autour du point B, jusqu'à ce qu'il ait eu atteint la position que vous lui voyez dans la figure, ou jusqu'à ce qu'il ait eu formé l'angle ABC. Ce mouvement étant le même que celui de la perche qu'on emploie pour tracer un cercle (4), il est clair que l'extrémité A de AB n'a pu passer de C en A, sans décrire un arc de cercle CA dont B est le centre. Il est clair aussi que si l'angle ABC augmente ou diminue, c'est-à-dire si AB s'éloigne ou se rapproche de BC, l'arc augmentera ou diminuera.

Cette dépendance constante dans laquelle l'arc et l'angle sont l'un de l'autre, fait qu'on peut se servir pour désigner, pour *indiquer* un angle, de l'arc décrit entre les côtés et du sommet comme centre. Mais observez bien qu'un arc qui se trouve entre les côtés d'un angle, n'est plus l'*indication* de cet angle, s'il n'a pas le sommet pour centre.

26. *Deux angles se contiennent comme leurs arcs d'indication de même rayon.*

Il n'est donc pas nécessaire de mesurer les angles pour les comparer ; l'opération revient à la comparaison d'arcs de cercle.

Combien de fois l'angle ABC contient-il l'angle DEF, (P. I, F. 15)?

Avec une ouverture de compas arbitraire, je décris du sommet B, un arc AC, entre les côtés de l'angle ABC, et avec la même ouverture, je décris du sommet E, un arc DF, entre les côtés de l'angle DEF. Je cherche ensuite combien de fois l'arc DF est contenu dans l'arc AC (20), et si je trouve qu'il y est contenu 4 fois, par exemple, j'en conclus que l'angle ABC est quadruple de l'angle DEF.

27. Il suit de là que *si les arcs d'indication ont même longueur ou même corde, les angles sont égaux;* car ces angles se contiennent une fois, comme les arcs (15).

On veut tracer une allée dont un côté aboutisse au point A et fasse, avec la direction AB d'une haie, le même angle que le côté BC d'une autre allée (P. I, F. 16).

Du point B sommet de l'angle donné ABC, je décris, avec une ouverture de compas arbitraire, un arc DE compris entre les côtés de cet angle. Du point A et avec la même ouverture, je décris un second arc FG qui soit visiblement plus grand que le premier. Je prends ensuite la corde de DE, et du point F, avec cette corde pour rayon, je décris un tout petit arc qui coupe FG quelque part, en H. Cette dernière opération revient à porter la corde de DE sur FG; mais il est préférable de marquer le point H par l'intersection d'un petit arc : on ne court pas le risque de percer le papier, si l'on dessine, ou de mal placer le point, si l'on opère sur le terrain. Traçant alors la droite AH, on a l'angle FAH égal à ABC.

C'est ainsi qu'il faut s'y prendre, pour transporter un angle, sans employer la fausse équerre (24). Lorsque l'un des côtés de l'angle à faire n'est pas donné, on tire une droite de position arbitraire qui remplace AF.

28. Deux droites AB, BC qui se coupent ou se croisent en un point B, forment deux angles ABC, DBE ou ABD, CBE qu'on appelle *opposés par le sommet* (P. I, F. 17).

Les angles opposés par le sommet sont égaux.

Pour vous en assurer, vous décrirez un cercle dont B soit le centre. La droite CD sera un diamètre, et l'arc CED une demi-circonférence. AE sera aussi un diamètre, et l'arc ACE une demi-circonférence. Ainsi, CED=ACE. Retranchez à chacun de ces arcs, l'arc CE qui leur est commun, les restes seront égaux. Or, ces restes sont AC pour ACE et DE pour CED. Donc AC=DE, et par conséquent, les angles ABC, DBE sont égaux (27).

Toutes les fois donc que vous rencontrerez des angles opposés par le sommet, vous pourrez prononcer qu'ils sont égaux, sans avoir besoin de comparer leurs arcs d'indication.

29. L'angle qui a pour arc d'indication, le quart de la circonférence est appelé *angle droit.*

Si donc on prolonge l'un AB des côtés d'un angle droit ABC (P. I, F. 18), l'autre côté BC formera avec le prolongement BD, un second angle droit CBD.

En effet, décrivez du point B une demi-circonférence qui se termine au diamètre AD. L'arc AC sera l'indication de l'angle ABC, et comme cet angle est supposé droit, AC sera le quart de la circonférence ou la moitié de la demi-circonférence ACD (18). L'arc CD sera donc l'autre moitié, ou un autre quart de la circonférence, et comme l'arc CD est l'indication de l'angle CBD, cet angle est droit aussi.

Coucluez de là qu'*une droite ne peut faire un angle droit avec une autre, sans former un second angle droit avec le prolongement.*

30. *Tous les angles droits sont égaux*, puisque les arcs d'indication qui serviraient à les comparer, seraient égaux comme quarts de circonférences égales (27).

Donc, *toute droite qui en rencontre une autre à angle droit, forme deux angles égaux du même côté de cette autre* (29.)

Toute droite AB qui en croise une autre CD à angle droit, forme quatre angles droits (P. I, F. 19), c'est-à-dire que si l'angle AEC est droit, les trois autres le seront aussi. En effet, l'angle AED est droit, nous l'avons démontré tout-à-l'heure (29); l'angle BED=AEC, ce sont deux angles opposés par le sommet (28); l'angle BEC=AED pour la même raison; par conséquent, les angles BED, BEC sont droits aussi, et les quatre angles qui ont le point E pour sommet commun, sont égaux entre eux.

31. *Tous les angles* ABC, CBD, DBE, EBF, FBA, *etc., qu'on peut faire autour d'un point B* (P. I, F. 20), *valent en somme quatre angles droits*; car la somme de leurs arcs d'indication forme la circonférence dont le centre est en B, et cette circonférence contient 4 fois l'arc d'indication d'un angle droit (29).

Tous les angles ABC, CBD, DBE, *etc., qu'on peut faire en un point B, du même côté d'une droite AE,* *valent en somme deux angles droits* (P. I, F. 21) ; car la somme de leurs arcs d'indication forme la demi-circonférence dont le centre est en B, et cette demi-circonférence contient 2 fois l'arc d'indication d'un angle droit.

32. Un angle ABC moindre qu'un angle droit, est dit *aigu* (P. I, F. 21). Un angle CBE plus grand qu'un angle droit, est dit *obtus*.

Par conséquent, une droite CB qui en rencontre une autre AE, en un point B, placé entre les deux extrémités, et qui ne fait pas d'angles droits, forme deux angles, l'un ABC aigu, l'autre CBE obtus, dont la somme vaut deux angles droits (31).

33. L'angle ABC qui, formé par deux cordes, a son sommet sur la circonférence, est appelé *angle inscrit* (P. I, F. 22). L'angle ADC dont le sommet se confond avec le centre, est nommé *angle au centre*.

L'angle inscrit ABC est la moitié de l'angle au centre ADC qui renferme le même arc AEC.

Considérons d'abord l'angle inscrit CBE et l'angle au centre CDE, dont deux côtés confondus forment un diamètre BE. Si nous décrivons de B, avec BE pour rayon, une circonférence, les deux cercles B,D pourront être regardés comme deux roues engrénées, et parce que BE$=$2DE, le rais DE fera deux tours, pendant que le rais BE en fera un seul (11). Conséquemment, l'arc EF qu'a parcouru l'extrémité de BE pour former l'angle EBF (25), est une fraction de la circonférence B moitié moindre que la fraction CE de la circonférence D parcourue dans le même temps par l'extrémité du rais DE, pour former l'angle CDE : si CE est $^1/_8$ de D, je suppose, EF sera $^1/_{16}$ de B. Mais l'arc DG décrit du point B avec le rayon BD, sera aussi $^1/_{16}$ de sa circonférence, puisque G achèvera son tour en même temps que F, et comme BD$=$DE, cette circonférence égale celle de CE. Donc, DG est la moitié de CE, et par suite, l'angle CBE est la moitié de l'angle CDE (26).

On verrait de même que ABE vaut la moitié de ADE. Donc, enfin l'angle inscrit ABC forme seulement la moitié de l'angle au centre ADC.

Pour le cas où le centre D serait en dehors d'un angle inscrit tel que ABH, on dirait : EBH$=$$^1/_2$ EDH, EBA$=$$^1/_2$EDA, et par conséquent, EBH—EBA$=$ABH$=$

$1/_2$EDH—$1/_2$EDA=$1/_2$ (EDH—EDA)=$1/_2$ADH. Ainsi, dans tous les cas, l'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre qui renferme le même arc.

Du principe ou de sa démonstration, on doit conclure que *l'arc d'indication d'un angle inscrit ABC, est la moitié de l'arc AEC compris entre les côtés et pris sur la circonférence où est le sommet.*

Il s'ensuit que *tout angle inscrit ABC qui comprend un diamètre AC, est un angle droit* (P. I, F. 23); car son arc d'indication est la moitié de la demi-circonférence ou le quart de la circonférence entière (29).

MESURAGE DES ANGLES.

34. On ne peut pas mesurer l'angle avec l'unité ordinaire des superficies, bien qu'il en soit une, attendu qu'il présente une superficie sans fin, tandis que l'are et l'arpent sont limités. Vous concevez effectivement qu'il y aurait impossibilité à trouver combien une chose infinie contient de fois une chose analogue, mais bornée de toutes parts : ce nombre de fois est infini lui-même.

L'unité de mesure doit être toujours et en tout point de même nature que les choses à mesurer. Ainsi, la mesure des longueurs est une longueur qu'on appelle toise, mètre, etc.; la mesure des capacités est une capacité nommée litre, pinte, etc.; la mesure des poids est un poids; celle des monnaies est une monnaie. La mesure des angles doit donc être un angle. Celui qui est adopté, a pour arc d'indication la 360^{me} partie d'une circonférence quelconque décrite du sommet. Comme cette 360^{me} partie est appelée *degré*, c'est *l'angle d'un degré* qui sert de mesure pour les angles.

Lors donc qu'on dit : un angle de 10 degrés, de 90 degrés, etc., on exprime non seulement que l'arc d'indication contient 10 fois, 90 fois, etc., la 360^{me} partie d'une circonférence, mais encore que cet angle vaut 10 fois, 90 fois, etc., l'angle d'un degré. Ainsi, *l'indication d'un angle donnée en degrés, fait connaître en même temps le nom et la grandeur de cet angle.*

Ne répétez point ce qui est écrit dans presque tous les livres de géométrie, que l'arc exprimé en degrés est la mesure de l'angle. Cette locution est fausse et donne de fausses idées ; un arc ne peut pas plus mesurer un angle, que le mètre linéaire ne peut mesurer un champ. L'arc *indique* la grandeur de l'angle, sans équivaloir à cette grandeur, à peu près comme une monnaie de papier indiquerait la valeur des choses, sans avoir cette valeur.

35. *Toute circonférence pouvant être divisée en* 360 *parties égales, renferme* 360 *degrés.* Le degré a 60 parties égales nommées *minutes;* la minute se compose de 60 *secondes;* la seconde contient 60 *tierces*, etc. On a choisi ces nombres, parce que, ayant beaucoup de diviseurs, ils sont d'un emploi commode dans le calcul.

Observez que la minute et la seconde du degré diffèrent beaucoup de la minute et de la seconde de l'heure : il y a 21 600 minutes de degré dans une circonférence; il n'y a que 60 minutes d'heure dans le cercle d'un cadran de montre.

On marque qu'un nombre exprime des degrés, en écrivant un petit zéro à droite et un peu au-dessus. Pour les minutes, on met un accent aigu à la même place que le zéro; pour les secondes, on emploie deux accens. L'arc ou l'angle de 53 degrés, 14 minutes et 57 secondes, s'exprime d'après cela, comme il suit : 53° 14′ 57″.

36. Il existe des instrumens qui, portant un cercle divisé en degrés et parties de degré, sont propres au mesurage des arcs et par suite à celui des angles. Mais l'usage de ces instrumens ne convient qu'aux personnes avancées dans l'étude de la Géométrie, et d'ailleurs, celles qui se bornent aux connaissances primaires, n'ont pas besoin de savoir mesurer les angles; il leur suffit de pouvoir les comparer (*).

Nous dirons seulement que l'emploi de tels instrumens repose sur ce principe : *Des arcs de rayons différens ont toujours le même nombre de degrés, quand ils sont compris dans le même angle, et que le sommet est centre commun.*

Supposez en effet, que l'angle ABC (P. I, F. 24) puisse être placé 12 fois autour du point B. Les 12 angles qui occuperont alors tout le grand cercle B seront égaux, et par conséquent, les 12 arcs de rayon BD qu'ils comprendront entre leurs côtés, seront aussi égaux. Or, ces 12 arcs formeront en somme la grande circonférence. Un quelconque DE sera donc le douzième de 360° ou 30°. Par la même

(*) La description raisonnée des instrumens propres au mesurage des angles, se trouve, avec un grand nombre d'autres choses curieuses et utiles, dans la *Géométrie appliquée à l'industrie, à l'usage des artistes et des ouvriers*, troisième édition, par C.-L. Bergery; prix 6 f. — Cet ouvrage a été adopté et recommandé par l'Université.

raison, les 12 arcs de rayon BF, compris entre les côtés des mêmes angles, seront égaux, et comme leur somme fera la petite circonférence B, un quelconque FG sera aussi le douzième de 360° ou 30°.

Que l'arc employé pour connaître l'angle soit donc d'un petit ou d'un grand rayon, situé près ou loin du sommet, il n'importe : on aura toujours le même nombre de degrés. Voilà pourquoi des cercles divisés, de toute grandeur, peuvent servir au mesurage du même angle.

PERPENDICULAIRES.

37. Deux droites AB, BC (P. I, F. 18) qui font ensemble un angle droit ABC, sont dites *perpendiculaires* l'une sur l'autre.

Le plus grand des angles d'une équerre est un angle droit ; par conséquent, les deux arêtes qui le forment sont perpendiculaires l'une sur l'autre. C'est donc la même chose pour deux droites, d'être d'équerre ou perpendiculaires. Aussi emploie-t-on indifféremment ces deux expressions.

La perpendiculaire BC au milieu d'une droite DE est le lieu de tout point également éloigné des deux extrémités D, E de la droite (P. I, F. 25).

D'abord, tout point A de la perpendiculaire BC est à égales distances des extrémités de DE, si B est le milieu de cette droite. En effet, la distance de A à D est la droite AD ; la distance de A à E est la droite AE. Or, si nous faisons tourner la figure ABE autour de AB, considérée comme une charnière, les points A,B ne bougeront pas ; BE se couchera sur BD, puisque les angles ABE, ABD sont égaux ; E tombera sur D, puisque BE=BD. Par conséquent, AE se confondra avec AD. Ces deux droites sont donc égales, car le rabattement opéré n'a pas altéré leur longueur.

Ensuite, tout point F pris hors de BC, est inégalement éloigné de D,E, c'est-à-dire que FE n'est pas égal à FD. Effectivement, FD est plus court que la ligne brisée FAD, et cette ligne brisée égale FE, puisqu'elle se compose de FA qui fait partie de FE, et de AD qui est égale à AE.

Il suit de là que *si une droite a deux de ses points également éloignés chacun des deux extrémités d'une autre, elle est perpendiculaire au milieu de cette autre droite.*

38. *Tracer la direction d'un mur qui doit être d'équerre sur un autre AB et le rencontrer en C* (P. I, F. 26).

La direction de ce mur sera une perpendiculaire *élevée* sur AB, par le point C. Pour trouver cette perpendiculaire, vous pourriez vous servir du cordeau-équerre (22) ou d'une équerre ordinaire; mais on n'a pas toujours un cordeau-équerre à sa disposition et il est difficile de rendre cet instrument très-exact; l'équerre ordinaire n'est pas assez grande pour que les opérations auxquelles elle servirait sur le terrain, eussent quelque précision; d'ailleurs, peu d'équerres sont justes, et quand on les fait telles, le jeu du bois ne tarde pas à les fausser. Il vaut donc mieux employer le tracé suivant qui peut servir à élever des perpendiculaires sur le papier, comme sur le terrain, et qui donne toujours beaucoup d'exactitude.

Marquez sur AB, deux points D,E qui soient également éloignés de C; décrivez de chacun de ces points, avec le même rayon, un petit arc de cercle, au-delà ou en-deçà de AB; puis joignez au point C, le point F intersection des deux arcs. FC sera la perpendiculaire demandée ou la direction du nouveau mur; car le point C est également éloigné de D et de E, les distances FD, FE sont égales, et par suite FC est perpendiculaire au milieu de DE (37).

Le rayon des deux petits arcs doit être plus grand que la moitié de DE: moindre que cette moitié, il ne permettrait pas aux deux arcs de se couper; égal à cette moitié, il donnerait seulement le point C déjà connu. En outre, pour que la droite CF ne diffère pas de la vraie perpendiculaire, quelque loin qu'on la prolonge, il importe de choisir d'avance la place du point F, à la plus grande distance possible de C, et de prendre CD, CE égales à cette distance estimée grossièrement.

Opérez ainsi dans tous les cas où il vous faudra *élever une perpendiculaire en un point donné d'une droite*

39. *Tracer la direction d'un fossé qui doit aboutir à l'extrémité A d'un autre fossé dont AB est une arête, et le rencontrer d'équerre* (P. I, F. 27).

Prolongez BA à droite du point A, et employez le procédé précédent, pour élever en A une perpendiculaire sur BC.

Voilà ce qu'il faut faire toutes les fois qu'on doit *élever une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite qui peut être prolongée.*

40. *Couper carrément le bout A d'une planche AB* (P. I, F. 28), en d'autres termes, tracer par le point A, un trait qui soit d'équerre sur l'arête AB de la planche.

Prenez un point C qui avoisine le bout A et soit placé à peu près au milieu de la largeur de la planche. De ce point, comme centre, et d'un rayon égal à la distance CA, décrivez un arc de cercle. Joignez C au point D où le cercle coupe l'arête AB de la planche, et prolongez la droite DC jusqu'à ce qu'elle rencontre une seconde fois l'arc de cercle; joignez enfin le point d'intersection E avec A. La droite AE se trouvera d'équerre sur AB, parce que l'angle DAE sera droit, et cet angle sera droit, parce qu'il aura son sommet A sur la circonférence et comprendra le diamètre DE (33).

On se sert de ce moyen sur le papier, comme sur le terrain, toutes les fois qu'on doit *élever une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite qui ne peut être prolongée.*

41. *Tracer la direction d'une allée qui partant d'un point donné A, aille couper d'équerre une autre allée dont BC figure un des côtés* (P. I, F. 29).

Marquez sur BC deux points également éloignés de A, et pour cela, coupez cette droite par un arc de cercle DE décrit de A, avec un rayon arbitraire. Ensuite, décrivez de D, E, deux arcs qui se croisent en deçà de BC, au point F. La droite AF sera la direction demandée (37).

C'est ainsi qu'il faut opérer toutes les fois qu'il s'agit d'*abaisser une perpendiculaire AG sur une droite BC, d'un point extérieur A.*

La plus courte droite qui puisse être menée d'un point A à une droite DE (P. I, F. 25), est la perpendiculaire AB abaissée de ce point.

AB est en effet plus courte que toute autre droite AD. Elevons une perpendiculaire GH au milieu de BD; H sera également éloigné de B et de D (37), et la ligne brisée AHB égalera AD. Or, AB est plus courte que AHB (1).

Il s'ensuit que *la distance d'un point A à une droite DE, doit se mesurer sur la perpendiculaire AB abaissée de ce point sur la droite.*

42. Les trois tracés qui viennent de nous occuper, peuvent, sur le terrain, s'exécuter avec une grande exactitude, au moyen de *l'équerre d'arpenteur.*

Cet instrument a deux formes différentes: sous l'une, il présente une espèce de boîte en laiton, à 10 faces, portée par un pied; les deux faces des bouts ont 8 arêtes et les autres en ont quatre; chacune de ces dernières a une fente étroite, nommée *mire;* de deux mires opposées, l'une est partagée en deux parties égales, dans le sens de sa longueur, par un crin; c'est à l'autre que l'œil doit être appliqué; enfin, l'alignement que déterminent deux mires opposées, se trouve croisé d'équerre par celui de deux des 6 autres mires.

Sous sa seconde forme, l'équerre d'arpenteur offre deux règles en laiton, qui se croisent et surmontent une douille propre à recevoir un pied; à chaque extrémité de ces règles, s'élève une petite plaque appelée *pinnule*, qui a une mire; deux des mires contiennent aussi un crin et les deux alignemens se coupent à angles droits.

Pour résoudre le dernier problème à l'aide de l'équerre d'arpenteur, on fait planter à plomb un jalon sur la droite BC, en B par exemple (P. I, F. 29); on cherche ensuite, sur cette même droite, un point G tel qu'en y plantant l'équerre à plomb, on voye le jalon B dans un des alignemens de l'instrument, et le point A dans l'alignement perpendiculaire à celui-là. Remplaçant alors l'équerre par un jalon mis à plomb, on a la direction AG de la perpendiculaire demandée.

Il faut un peu d'habitude pour trouver promptement le point G; encore n'y parvient-on qu'après avoir placé et déplacé deux ou trois fois l'équerre.

On ne rencontre pas cet inconvénient dans les problèmes des nos 38, 39 et 40. Il suffit effectivement, pour les résoudre, de planter l'équerre à plomb au point où doit être élevée la perpendiculaire; de viser, par un des deux alignemens qui se coupent à angles droits, un point marqué sur la droite donnée, et de faire planter à plomb un jalon sur l'autre alignement.

43. *Trouver le milieu d'un mur.*

On peut mesurer la longueur totale du mur AB, (P.I, F. 30), en prendre la moitié, et porter la mesure de A vers B, autant de fois que l'indique cette moitié; le point E ainsi déterminé est le milieu cherché. Mais il est plus court et plus sûr lorsque rien ne s'y oppose, d'opérer comme il suit:

Des extrémités A, B du mur, décrivez, avec un rayon arbitraire, deux arcs qui se coupent en avant, au point C; des mêmes centres, avec un rayon plus petit ou plus grand que le précédent, décrivez deux autres arcs qui se coupent aussi en avant, au point D. La droite DC prolongée jusqu'au mur, en marquera nécessairement le milieu E (37).

C'est ce procédé qu'il faut suivre toutes les fois qu'on doit *élever une perpendiculaire au milieu inconnu d'une droite*, et qu'on ne veut pas ou qu'on ne peut pas déterminer ce milieu par un double mesurage. Si les localités le permettent, il vaut mieux tracer les deux premiers arcs d'un côté de la droite donnée, et les autres du côté opposé. De cette façon, les points C, D sont plus éloignés l'un de l'autre, et la perpendicularité est plus exacte ; car on ne peut guère assurer une direction par deux points très-rapprochés.

44. La droite que forme un fil-à-plomb librement suspendu, est nommée *verticale*, et toute droite perpendiculaire à celle-là est *horizontale*. Quelquefois cette dernière s'appelle aussi *ligne de niveau*.

Quand une droite n'est ni verticale, ni horizontale, on la dit *inclinée*.

Planter un jalon à plomb, ou le rendre vertical, ou le placer verticalement, c'est donc la même chose.

Par un même point, il ne peut passer qu'une seule verticale ; mais une infinité d'horizontales différentes peuvent s'y croiser.

C'est au moyen des instrumens appelés *niveaux*, qu'on peut marquer des points situés sur une horizontale ou vérifier si une droite est horizontale.

Pour la première de ces deux opérations, on se sert du *niveau d'eau*. Sa pièce principale est un tube en ferblanc deux fois coudé. Au milieu de ce tube est une douille, par le moyen de laquelle on peut poser l'instrument sur un pied. Les deux petites branches portent chacune un ajutage en verre, muni d'un bouchon. Si vous versez assez d'eau dans un des ajutages pour qu'ils en soient remplis tous deux en partie, le liquide s'y mettra de niveau et vous fournira un alignement horizontal. Visez donc, par cet alignement, deux objets quelconques et faites y marquer les points auxquels il aboutit ; ces deux points appartiendront à une horizontale, même quand vous auriez été obligés de faire pivoter le niveau pour en déterminer un : il suffit que l'élévation de l'instrument au-dessus du sol n'ait pas varié.

Pour vérifier si une droite est horizontale et la rendre telle lorsqu'elle ne l'est pas, on emploie le *niveau de maçon* ou le *niveau à bulle d'air*. Le premier de ces instrumens sera décrit plus loin. Quant au second, il présente un petit tube de verre qui fait légèrement la voûte et que contient une monture en laiton. Un peu d'air est mêlé à l'eau dont le tube est presque plein. Comme les corps plus légers que l'eau montent toujours à la surface de ce liquide, vous concevez que la bulle d'air doit occuper le haut de l'arc formé par le tube, quand les deux extrémités de cet arc sont de niveau, ou quand la droite sur laquelle pose la monture en laiton, a elle-même cette position; car alors l'eau remplit également les deux parties extrêmes de l'arc et laisse libre le milieu. Si donc la bulle se porte à gauche, par exemple, c'est que la ligne droite est trop élevée de ce côté, et il faut abaisser l'extrémité de gauche ou hausser l'autre, jusqu'à ce que la bulle soit au milieu de l'arc et s'y maintienne. Il est aisé de sentir, d'après cela, qu'un tel niveau est d'une grande sensibilité et d'une grande justesse; aussi ne saurais-je trop vous en recommander l'usage; il coûte d'ailleurs peu cher.

PARALLÈLES.

45. Deux droites qui sont partout également écartées l'une de l'autre, se nomment *parallèles;* elles ne peuvent jamais se rencontrer quelque loin qu'on les prolonge.

Il suit de là que des perpendiculaires abaissées des différens points A, B, C, etc., d'une droite AD, sur sa parallèle EF (P. I, F. 31), sont toutes de même longueur; car AE, BG, CH, sont les distances des points A, B, C, à la droite EF (41.)

Donc, *la parallèle d'une droite est le lieu de tous les points situés à une même distance de cette droite.*

Ainsi, pour marquer plusieurs points A, B, C, etc., situés à 5 mètres d'une droite EF, il vous suffirait d'élever une perpendiculaire EA sur EF, de porter 5 mètres sur cette perpendiculaire, à l'effet de déterminer A, de mener par ce point une parallèle à EF, et de placer sur cette parallèle AD, les points B, C, etc., à la distance où ils devraient être de A.

46. Il est aisé de démontrer que *deux droites AB, CD, parallèles à une troisième EF* (P. I, F. 32), *doivent être parallèles l'une à l'autre.* En effet, les écartemens AE, CE, sont invariables, et comme AC=AE—CE, cet écartement des droites AB, CD, est invariable aussi.

47. Toute droite qui traverse un système d'autres droites, parallèles ou non parallèles, est appelée *transversale.*

Des parallèles AB, CD coupées par une transversale EF, forment plusieurs angles (P. I, F. 33); ceux de ces angles qui se trouvent placés de la même manière par rapport à la transversale et par rapport aux parallèles, sont égaux entre eux; il en est de même de ceux qui se trouvent placés différemment par rapport à la transversale et différemment par rapport aux parallèles. Ainsi, l'angle BGE=DHE : ces deux angles sont tous deux du même côté de EF, et tous deux au-delà des parallèles ; on les appelle angles *correspondans*. De même AGF=DHE : ces deux angles sont l'un d'un côté de EF, l'autre du côté opposé, le premier en-deça de la parallèle AB, le second au-delà de la parallèle CD ; on les nomme angles *altérnes-internes :* alternes, pour exprimer que la transversale les sépare ; internes, pour indiquer qu'ils commencent tous deux entre les parallèles.

Ainsi, *il y a égalité entre les angles correspondans et entre les angles alternes-internes.*

La chose est visible pour les premiers ; car si AB descendait, sans cesser d'être parallèle à CD, elle finirait par se confondre avec cette droite et ferait le même angle DHE. Quant aux angles alternes-internes, AGF=BGE son opposé par le sommet (28) ; BGE=DHE son correspondant, et conséquemment AGF=DHE.

Il suit de là que *si deux droites coupées par une troisième, forment des angles égaux qui aient la position des angles correspondans ou celle des angles alternes-internes, ces deux droites sont parallèles.*

Donc, *des perpendiculaires à une même droite sont parallèles ;* car si AB, CD (P. I, F. 34) sont perpendiculaires sur BE, les angles correspondans ABE, CDE sont droits et par conséquent égaux (30).

48. *Tracer, sur le papier ou sur le tableau, une droite qui passe par un point A et soit parallèle à une autre droite* BC (P. I, F. 35.)

On se sert pour cela d'une règle et d'une équerre. Peu importe que l'équerre soit juste ; il suffit que les arêtes en soient droites.

Appliquez le plus grand DE des deux petits côtés de l'équerre, contre la règle, et placez ces deux instrumens ainsi accolés, de manière que le grand côté CD du premier se confonde avec la droite donnée BC. Faites glisser ensuite le système à droite ou à gauche, sans abandonner BC, jusqu'à ce que la face de la règle, sur laquelle s'appuie l'équerre, passe par le point A, en même temps que le grand côté CD continuera de couvrir une partie de BC. Enfin poussez l'équerre le long de la règle maintenue fixe, pour amener le grand côté sur le point A, et tracez une droite AF en suivant ce grand côté ; elle sera la parallèle demandée, car les angles correspondans CDE, DAF seront égaux (47).

S'il est nécessaire que la parallèle soit plus longue que AF, vous la prolongerez ensuite ; et pour cela vous maintiendrez l'équerre dans sa dernière position, vous appliquerez la règle le long du grand côté AF, puis vous enleverez l'équerre, et vous tracerez une droite le long de la règle.

49. *Tracer la direction d'une rangée d'arbres qui doit être parallèle à une autre rangée AB déjà plantée, et partir d'un point donné* C (P. I, F. 36).

Il faut marquer sur AB, un point A autant éloigné de C qu'il sera possible ; décrire de ce point A, avec la distance AC pour rayon, un arc qui parte de C, et se termine sur AB, en B, par exemple ; décrire de C, avec le même rayon, un second arc qui parte de A et soit sensiblement plus long que le premier ; prendre la corde BC, et avec cette corde pour rayon, décrire de A un troisième arc qui coupe le second ; puis enfin, joindre l'intersection D avec le point donné C. La droite CD sera parallèle à AB, car (47), si vous tiriez la droite AC, les angles alternes-internes ACD, BAC seraient égaux, ayant des arcs d'indication de même rayon et de même longueur (27).

Ce procédé convient à tous les cas où les parallèles ne doivent pas être très-écartées, et où le terrain permet de tracer des arcs. On décrit ces arcs, soit à l'aide d'un cordeau, soit à l'aide d'une perche (4). Observez qu'il suffit de marquer l'extrémité B de l'arc BC et une petite partie de AD.

50. *Tracer la direction d'un mur qui doit contenir un point donné A, et être parallèle à un autre mur BC éloigné ou situé au-delà d'une pièce d'eau* (P. I, F. 37.)

On ne peut faire usage, dans un tel cas, ni d'un cordeau, ni d'une perche ; il faut se servir d'une équerre d'arpenteur ou d'une fausse-équerre portée sur un pied. Ce dernier instrument est facile à construire : il suffit de faire sur la tête d'un gros piquet, deux entailles droites qui se coupent sous un angle quelconque, ou mieux encore de fixer sur le bout d'un bâton, deux petites planchettes qui se croisent et portent 3 épingles : une au croisement et les deux autres à deux des extrémités. Ces épingles doivent être implantées de façon qu'elles se trouvent verticales, quand les planchettes seront de niveau.

Quant à la manière d'opérer, elle est très-simple aussi. Plantez verticalement le bâton sur la droite BC, en un point D, tel que l'un des alignemens formés par l'épingle du croisement et les autres, étant dirigé sur un jalon vertical B placé le plus loin possible, il arrive que le second alignement passe par le jalon A, et qu'en même temps les planchettes soient bien horizontales, ce que vous vérifierez à l'aide d'un niveau. Avec un peu d'habitude, vous trouverez ce point D après quelques tâtonnemens. Enlevez alors l'instrument et remplacez-le par un jalon vertical; puis établissez la fausse-équerre au point A, comme elle a été établie en D; dirigez l'un des alignemens des épingles sur le jalon D, de façon que l'autre alignement laisse les droites AD et BC du même côté; plantez enfin un jalon vertical E sur ce second alignement et le plus loin possible de A. La direction AE sera celle du mur qui doit être parallèle à BC, car si vous tiriez la droite AD, vous formeriez les angles alternes-internes ADB, DAE, et ces angles ont été faits égaux, si les planchettes n'ont pas été dérangées (47).

On opère absolument de la même manière avec l'équerre d'arpenteur. La seule différence qu'il y ait, c'est que la droite AD se trouve alors perpendiculaire à BC et à AE, au lieu de faire des angles aigus avec ces directions.

TANGENTES ET CERCLES TANGENS.

51. On dit qu'une droite AB est *tangente* à un cercle C, lorsqu'elle n'a réellement qu'un seul point D de commun avec ce cercle (P. I, F. 38). Le point D est le *contact* de la tangente et du cercle.

Pour qu'une droite AB se trouve tangente à un cercle C, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon CD. Elle n'a en effet alors que le seul point D de commun avec le cercle; car tout autre point E pris sur AB, aussi près que vous voudrez de D, sera plus éloigné du centre C que D (41) et ne se trouvera pas sur la circonférence.

52. *Tracer par un point D, pris sur un cercle C, une droite qui soit tangente à ce cercle* (P. I, F. 38).

Vous courriez grand risque de donner une fausse direction à la tangente, si vous vous contentiez, pour la tracer, d'appliquer une règle contre le cercle, au point D. Il faut absolument tirer le rayon CD, puis élever une perpendiculaire à l'extrémité D de ce rayon (39 et 40).

53. *Tracer par un point A, pris hors d'un cercle B, une droite qui soit tangente à ce cercle* (P. I, F. 39.)

Il suffit dans ce cas d'appliquer une bonne règle contre le point A et contre le cercle : une droite AC tracée le long de la règle maintenue dans cette position, est la tangente demandée. Mais, s'il fallait déterminer exactement le point de contact de cette tangente, vous devriez abaisser du centre B, une perpendiculaire BE, sur AC (41) ; ou bien joindre A au centre B, chercher le milieu D de la droite AB (43), et décrire du point D comme centre, avec DB pour rayon, un cercle ou seulement un arc qui coupât AC. L'intersection E serait le contact cherché ; car, si vous tirez le rayon BE, la tangente AC sera perpendiculaire à l'extrémité E de ce rayon, puisque l'angle AEB inscrit au cercle D, comprend le diamètre AB (33).

C'est toujours ainsi qu'il faut opérer, pour déterminer exactement le contact d'une tangente.

Remarquez que d'un point A situé à l'extérieur du cercle B, on peut toujours mener deux tangentes AC, AF à ce cercle, et que le dernier tracé fait trouver à la fois les deux contacts E, G. C'est pour cela qu'on le préfère ordinairement au premier.

54. *Tracer les fondations d'un édifice dont le contour doit présenter un demi-cercle et deux tangentes parallèles.*

Décrivez le demi-cercle dans la position et avec le rayon qu'il doit avoir, puis tracez le diamètre AB (P. I, F. 40) et élevez aux extrémités A, B, les perpendiculaires AC, BD. Ces deux droites seront tangentes, comme perpendiculaires aux extrémités des rayons AE, EB (51), et parallèles, comme perpendiculaires à une même droite AB (47).

Ainsi, *les tangentes parallèles d'un même cercle sont perpendiculaires aux extrémités d'un diamètre et leur distance égale ce diamètre.*

55. On peut mener 4 tangentes à deux cercles A, B (P. I, F. 41) : deux extérieures CD, EF qui se rencontrent en un point G de la droite AB des centres ; deux HI, KL qui passent entre les cercles et se croisent en un point M de la même droite AB. La règle suffit pour le tracé de ces 4 tangentes, et lorsqu'on a déterminé le contact N de CD, par exemple, avec le cercle A (53), le contact avec le cercle B est donné par un rayon BO mené parallèlement au rayon AN (47).

56. Deux cercles A, B qui n'ont qu'un point C de

commun, sont dit *tangens* l'un à l'autre (P. I, F. 42). Le point C est leur *contact*; il se trouve toujours sur la droite AB des centres.

Chacun des deux cercles est tout-à-fait en dehors de l'autre, comme dans la figure 42, et alors *ils se touchent extérieurement*; ou bien, le petit est entouré du grand, comme dans la figure 43, et alors le grand *est touché intérieurement* par le petit. Dans le premier cas, la distance des centres A, B égale la somme des rayons AC, BC; dans le second, elle égale la différence des rayons AC, BC.

57. Lorsqu'au lieu de cercles, ce sont seulement des arcs qui se touchent ou sont tangens l'un à l'autre, on dit quelquefois qu'ils se *raccordent*. C'est d'arcs raccordés que sont formés ordinairement les cintres des ponts, des alcoves, etc. Ces cintres sont dits *surbaissés*, parce qu'ils ont une hauteur moindre que leur demi-largeur, au lieu qu'un *plein cintre* étant formé par une demi-circonférence, a une hauteur égale à sa demi-largeur. Les cintres surbaissés sont appelés quelquefois *anses de panier*, *courbes à* 3, *à* 5 *centres*, selon qu'ils renferment trois ou cinq arcs de cercle.

Tracer un cintre surbaissé, à trois centres, dont la largeur et la hauteur sont données.

Tirez une droite AB égale à la largeur (P. I, F. 44); élevez une perpendiculaire au milieu de AB (43) et prenez CD égale à la hauteur du cintre; des points A, C, décrivez, avec AC pour rayon, deux arcs qui se coupent en un point E; joignez E aux points A, C; rapportez la distance CD sur CE, de C en F, au moyen d'un arc de cercle décrit du point C; joignez D à F et prolongez la droite DF jusqu'à AE; enfin, par le point d'intersection G, menez GH parallèlement à CE. Vous aurez IG=IA, parce que CE=CA; vous aurez aussi HG=HD, parce que CF=CD. Vous pourrez donc décrire de I un arc AG, et de H un arc GD. Ces deux arcs se *raccorderont* ou se toucheront en G, attendu que la distance IH de leurs centres, sera égale à la différence de leurs rayons HG, IG (56.)

Il faudra ensuite rapporter CI de C en K, au moyen d'un arc dont C soit le centre; décrire de K, avec KB, un arc sensiblement plus grand que l'arc AG, et enfin continuer l'arc GD, jusqu'à ce qu'il soit touché intérieurement en L, par l'arc qui a son centre en K. Vous aurez formé alors une courbe exempte de *jarrets*, qui aura trois centres I, H, K ou qui renfermera trois arcs de cercle AG, GDL, LB.

Chacun de ces arcs sera la sixième partie de sa circonférence ou contiendra 60 degrés.

58. Il arrive parfois que, pour soutenir un escalier ou une rampe, on est obligé de construire un cintre dont les extrémités ne soient pas de niveau. La demi-circonférence ne peut être employée dans ce cas; aussi est-ce une espèce d'anse de panier, nommée *arc rampant*, qui forme alors le cintre.

Tracer un arc rampant composé de deux arcs de cercle.

Tirez une droite AB égale à la largeur que doit avoir l'arcade (P. I, F. 45); élevez au milieu une perpendiculaire CD; par les extrémités A, B, menez des parallèles à CD; portez sur l'une, de A en E, la distance du sol à l'extrémité la plus élevée de l'arc, et sur l'autre, de B en F, la distance du sol à l'extrémité la moins élevée. La droite EF ainsi déterminée, se trouvera inclinée comme la ligne de rampe, et le point G où elle rencontrera CD, sera son milieu. Prenez alors GH=GE; abaissez de H, sur EF, une perpendiculaire HI; puis menez par E et par F des parallèles à AB. Les points K, L, où ces parallèles rencontreront la perpendiculaire HI, seront les centres des deux arcs du cintre. Vous décrirez donc de K, avec KE pour rayon, un arc de cercle, et de L, avec LF, un second arc. Ces deux arcs se raccorderont en H, parce qu'ils passeront par ce point, et que la distance de leurs centres sera précisément la différence de leurs rayons KH, LH.

COMPARAISON DES DROITES.

59. Maintenant que vous connaissez les propriétés essentielles des perpendiculaires et des parallèles, vous êtes en état d'étudier la comparaison des droites. C'est une partie fort importante de la Géométrie: on serait souvent obligé de se livrer à des mesurages longs, fastidieux et difficiles, si l'on ne savait pas, par les principes, combien de fois se contiennent des droites placées dans telles ou telles circonstances.

Vous avez appris déjà que tous les rayons d'un même cercle sont égaux (5), que tous les diamètres ont même longueur et qu'il y a aussi égalité entre les cordes d'arcs égaux pris sur le même cercle ou sur des cercles de même rayon (13.)

Il existe encore beaucoup d'autres circonstances qui rendent certain tout d'abord de l'égalité des droites.

Des droites sont égales quand elles se trouvent comprises entre des circonférences *concentriques*, c'est-à-dire de même centre, et qu'elles font partie des rayons.

Ainsi, les droites DF, EG (P. I, F, 24), comprises entre deux circonférences concentriques, et dirigées vers le centre commun B, sont de même longueur; cela doit être en effet, car BD=BE, BF=BG, et par conséquent, BD—BF=BE—BG ou DF=EG.

Voilà pourquoi l'on dit que *deux circonférences concentriques sont partout à la même distance l'une de l'autre.*

60. Une droite AD (P. I, F. 25) qui fait un angle aigu ou obtus avec une autre DE, est appelée *oblique*, et le point D de rencontre est dit le *pied* de cette oblique, comme le point B est dit le *pied* de la perpendiculaire AB.

Deux obliques sont égales, quand elles s'écartent également de la perpendiculaire abaissée de leur point de rencontre. Les écartemens dont il s'agit, sont ceux des pieds, de sorte que si BD=BE, on a nécessairement AD=AE.

En effet, AB est alors perpendiculaire au milieu de DE, et par conséquent, son point A se trouve à la même distance des extrémités D,E (57).

Réciproquement, *les écartemens de deux obliques égales sont égaux;* c'est-à-dire que si AD=AE, on a nécessairement BD=BE.

Si l'on faisait tourner la figure ABE sur AB, elle se rabattrait exactement sur la figure ABD, l'angle E couvrirait l'angle D, et l'angle BAE couvrirait aussi l'angle BAD. Il s'ensuit que *dans deux figures séparées ABE, ABD, l'égalité des perpendiculaires AB et AB, BD et BE, celle des obliques et celle des angles analogues existent en même temps;* de sorte que deux de ces 5 égalités ayant lieu, il en résulte nécessairement les trois autres. Qu'on sache, par exemple, que AD=AE et que l'angle D=E, on en conclura BD=BE, AB=AB, BAD=BAE.

Le niveau de maçon est composé de deux obliques égales AB, AC (P. I, F. 46), d'une traverse DE qui rend constant leur écartement, et d'un fil-à-plomb dont le point d'attache est près de A, sur la direction de la perpendiculaire au milieu de BC. Un trait *indicateur*, fait sur la traverse, se trouve dans la même direction; de sorte qu'au moment où le fil couvre l'indicateur, il est perpendiculaire à BC. Cette droite BC ou celle sur laquelle est posé le niveau, est donc alors horizontale, puisqu'elle rencontre d'équerre la verticale du fil-à-plomb (44).

Il est bon d'observer que rien ne nécessite l'égalité des règles AB, AC; elles peuvent être inégales, pourvu que le point d'attache du fil et le trait indicateur soient sur une perpendiculaire à BC.

61. *Deux tangentes sont égales, quand elles partent du même point et se terminent aux contacts.* Ainsi, AE=AG (P. I, F. 39); et cela doit être effectivement, car les arcs BE, BG sont égaux, ayant pour cordes des rayons du cercle B (15); par suite, les arcs AG, AE, restes de deux demi-circonférences, sont aussi égaux, et leurs cordes AG, AE ont même longueur.

62. Une droite se trouve divisée en deux parties égales, quand elle est rencontrée ou coupée par une perpendiculaire élevée en son milieu. Il suffit donc, pour *diviser une droite en deux parties égales*, d'exécuter le tracé du n° 43.

Mais, ce procédé n'est plus praticable, si la droite à diviser est très-longue. Il faut alors recourir à un double mesurage, ou ce qui est plus court, employer les moyens suivans:

Supposons que A et B (P. I, F. 47) soient les deux extrémités d'une des limites d'un champ, et qu'on ait à planter une borne au milieu de AB, pour diviser le terrain en deux portions égales. Vous placerez un premier jalon en A, un second en B, un 3e en un point 3 quelconque, par lequel vous dirigerez un alignement 3.4 parallèle à AB (50), un 5e sur l'alignement 4.2, un 6e à la rencontre des alignemens 4.1 et 3.2, un 7e sur l'alignement 3.1, un 8e sur l'alignement 2.1, un 9e à la rencontre des alignemens 4.5 et 3.7, un 10e enfin, à la rencontre des alignemens 2.8 et 9.6. Ce 10e jalon marquera le point milieu de AB.

L'emploi des alignemens qui se rencontrent ou se croisent trois à trois, comme dans l'opération précédente, constitue la méthode *des transversales*; elle est remarquable pour sa simplicité, pour les difficultés qu'elle fait vaincre facilement, sans autres instrumens que des perches, et pour son uniformité qui la grave promptement dans la mémoire. Vous verrez en effet que la figure 47 se reproduit, avec peu de différence, dans toutes les applications de cette méthode.

Mais observez que pour arriver à des résultats exacts par les transversales, il faut que les alignemens soient pris avec beaucoup de soin, que les jalons soient bien droits et plantés verticalement : leur position doit même être vérifiée au fil-à-plomb. Du reste, il est aisé d'en diminuer le nombre, car si vous avez deux aides, vous pourrez vous dispenser de planter les jalons 5, 7, 8 : l'un des aides se placera sur l'alignement 4.2, vers le point 5, par exemple, l'autre sur l'alignement 3.1, vers le point 7, et par des signes de main, ils vous feront placer le jalon 9 à l'intersection de ces deux alignemens. Le secours de deux aides abrège donc beaucoup l'opération ; on peut dire aussi qu'il diminue les causes d'erreur. Un moyen de les diminuer encore davantage, c'est de figurer à l'avance les alignemens sur le papier, d'y numéroter leurs intersections, et de donner aux jalons les numéros correspondans du croquis.

63. *La perpendiculaire CD au milieu d'une corde AB, passe aussi par le milieu E de l'arc AEB* (P. I, F. 48). Effectivement, le point E appartenant à CD, est à la même distance de A et de B (37) ; or l'égalité des cordes AE, BE, produit celle de leurs arcs (15).

Partager un arc AB en deux parties égales.

Il suffit d'exécuter l'opération du n° 43, c'est-à-dire que, sans tracer la corde, vous décrirez des extrémités A, B, deux petits arcs qui se coupent au-delà de AB, en un point C, et deux autres petits arcs qui se coupent en-deçà de AB, en un point D. Joignant C à D, vous aurez le milieu de l'arc AB, au point E où le coupera la droite CD perpendiculaire au milieu de la corde.

Il resterait à déterminer, de la même manière, le milieu de BE et celui de AE, si l'on voulait diviser l'arc AB en quatre parties égales.

Trouver le centre d'un cercle tracé.

C'est le même procédé qu'il faut employer, car le centre se trouvant à la même distance des extrémités d'une corde (5), est, comme le milieu de l'arc, sur la perpendiculaire au milieu de cette corde. Marquez donc deux points A, B sur la circonférence (P. I, F. 49), et tracez la droite CD qui divise l'arc AB en deux parties égales ; prenez un 3e point E et tracez la droite FG qui passe par le milieu de l'arc BE ; le centre des deux arcs et du cercle se trouvera au point H, intersection des droites CD, FG perpendiculaires aux milieux des cordes.

Pour rendre la position du point H plus distincte, il convient de choisir les trois points A, B, E, de manière que CD, FG soient à-peu-près d'équerre. On y parvient en prenant E de façon que la corde BE paraisse d'équerre sur la corde AB, ou que ABE forme une demi-circonférence environ (33).

Faire passer un cercle par trois points A, B, E, disposés en ligne brisée.

Bien que le cercle ne soit pas tracé, évidemment son centre H doit être donné par les opérations précédentes. L'ayant trouvé, vous prendrez pour rayon, la distance AH ou BH, ou EH. Ces trois distances sont égales, car H étant un point de la perpendiculaire au milieu de la corde AB, est également éloigné de A et de B; appartenant à la perpendiculaire au milieu de la corde BE, il est également éloigné de B et de E.

64. Comme l'arc d'indication AC d'un angle ABC a son centre au sommet B (P. I, F. 50), la perpendiculaire BD au milieu de la corde, doit passer par ce sommet; de plus, elle divise l'angle en deux parties égales, puisqu'elle forme deux angles ABD, DBC qui ont des arcs d'indication égaux (27). C'est donc par la division de la corde d'un arc en deux parties égales, qu'on fait la même division sur un angle.

Diviser en deux parties égales un angle ABC.

Du sommet B, vous décrirez avec un rayon arbitraire, un arc AC, ou vous en marquerez seulement les deux extrémités A, C; puis vous décrirez de ces points deux arcs de même rayon, qui se coupent en un point D situé en-deçà de AC, s'il est possible, et vous joindrez D à B. La droite BD vous donnera les deux angles ABD, DBC, qui seront égaux, parce que leurs arcs d'indication AE, EC auront même longueur.

La droite qui divise un angle en deux parties égales, se nomme *bisectrice* de cet angle.

La bisectrice est le lieu de tout point également éloigné des deux côtés de l'angle. Ainsi, les perpendiculaires FG, FH, abaissées d'un point quelconque F de la bisectrice BD, sur les côtés de l'angle, sont de même longueur. On le démontre en rabattant l'angle ABD sur son égal CBD. Le point F de la charnière BD ne bouge point, BA s'applique sur BC, FG devient perpendiculaire à cette dernière droite et couvre exactement FH.

65. Des droites AB, AC, AD (P. I, F. 51), qui

se rencontrent ou se coupent au même point A, sont nommées *concourantes*, pour abréger.

Si des parallèles EF, GH, BD, divisent une concourante AB en parties égales, elles divisent toutes les autres AC, AD, de la même manière.

Je dis, par exemple, que de BG=GE, résulte DH=HF. En effet, les angles correspondans B,G sont égaux (47), et par conséquent, les perpendiculaires GI, EK sont égales (60). Mais GI=HL, EK=FM, si HL et FM sont aussi d'équerre sur les parallèles (45). Donc HL=FM, et à cause de l'égalité des angles correspondans D,H, les obliques DH, HF sont de même longueur.

Réciproquement, *lorsque des droites EF, GH, BD divisent des concourantes AB, AD en parties égales, elles sont parallèles.*

De là un moyen de *diviser en parties égales une droite AB donnée sur le papier ou sur le terrain.* (P. I, F. 52). Supposons qu'on veuille trois parties.

Tracez par une des extrémités, la droite quelconque AC, et portez dessus la longueur arbitraire AG, une fois de plus que AB doit avoir de parties, c'est-à-dire 4 fois, dans le cas actuel. Joignez les extrémités C, B, et prenez sur le prolongement de CB, BH=BC. La droite IH tirée du 2e point de division de CA, à partir de C, coupera AB de manière que BL en sera le tiers, et si vous portez BL de L en K, les parties BL, LK, KA de AB seront égales (*).

En effet, si l'on joint B au 1er point de division de CA, BE, IH, seront parallèles, puisqu'elles diviseront en parties égales les concourantes HC, IC, et si, par G, 3e point de division de CA, on tirait GK, parallèle à IH, les parallèles BE, LI, KG qui diviseraient la concourante EA en trois parties égales, diviseraient la concourante BA de la même manière. Donc, BL est bien le tiers de BA.

Afin de pouvoir marquer le point L très-exactement, il faut faire en sorte que IH soit presque d'équerre sur AB. Il en sera ainsi, quand on prendra la longueur arbitraire AG assez grande pour que AE surpasse un peu AB.

(*) Ce procédé, d'une extrême simplicité et d'un emploi tout aussi facile sur le terrain que sur le papier, m'a été communiqué par M. *Chenou*, proviseur du collége royal de Metz, et ancien professeur des cours industriels de Douai.

66. ***Des parties de parallèles AB, CD*** (P. I, F. 53), ***comprises entre des parallèles AC, BD, sont égales.***

Cela est vrai pour les perpendiculaires AE, CF, puisqu'elles sont parallèles, et qu'elles mesurent les distances des points A, C à la droite BD (45). Mais les angles correspondans ABF, CDF sont égaux (47). Conséquemment, les obliques AB, CD ont-même longueur (60).

Il est vrai aussi que *des droites AB, CD qui comprennent entre elles des parties égales de parallèles AC, BD, sont parallèles et égales.*

67. Les parallèles et les concourantes qu'elles coupent, ont des relations plus générales que celles du n° 65. D'abord, *les parties AG, GB d'une concourante se contiennent autant de fois que les parties AH, HD d'une autre* (P. I, F. 51). Si, par exemple, GB est contenu 2 fois dans AG, HD sera contenu 2 fois dans AH. En effet, par le point E milieu de AG, menons EF parallèle à BD; AD sera divisé en trois parties égales aux points F, H, comme AB aux points E, G (65), et il sera évident que HD est moitié de AH, comme GB est moitié de AG.

En second lieu, les parties AB, AG, prises sur une concourante, depuis les parallèles jusqu'au point de concours, se contiennent comme les parties AD, AH, prises de la même manière, sur une autre concourante. Vous voyez effectivement que AG comprend les $\frac{2}{3}$ de AB, et que AH comprend les $\frac{2}{3}$ de AD. Donc, *des concourantes sont divisées de la même manière, par des parallèles.*

En troisième lieu, *les parties de parallèles GN, BC se contiennent comme les distances GA, BA de leurs extrémités correspondantes G, B au point de concours A.* Soit GO parallèle à AC; d'après les deux principes précédens, BC contiendra OC, comme BA contient GA. Or, OC=GN (66).

Enfin, les parties de parallèles BC, GN se contiennent comme les parties CD, NH. Cela résulte de ce que BC, GN se contiennent comme CA, NA, et de ce que CD, NH se contiennent aussi comme CA, NA. Par conséquent, *des parallèles sont divisées de la même manière, par des concourantes.*

Réciproquement, *si une de ces 4 relations a lieu, les droites qui coupent les concourantes sont parallèles.*

68. C'est sur les relation des concourantes et des

parallèles, qu'est fondée la construction de *l'angle de réduction* et de *l'échelle des parties*.

L'angle de réduction est utile pour copier en petit un tracé, un dessin exécuté en grand; il fait éviter des mesurages et des calculs fort longs.

Voulez-vous, par exemple, réduire des droites au tiers, c'est-à-dire donner aux lignes de la copie, le tiers seulement de la longueur des lignes correspondantes du modèle? tirez une droite AB (P. I, F, 54); portez-y trois fois une longueur quelconque, de A en C; décrivez du même point A et avec AC pour rayon, un arc CD dont la corde soit sensiblement plus grande qu'une des trois parties de AC; de C, avec une de ces parties, décrivez un second arc qui coupe le premier, et joignez l'intersection E au point A.

Il est tout aussi facile de se servir de l'angle de réduction BAE, que de le construire. Pour réduire au tiers, la droite FG, par exemple, vous la porterez de A en G′ (*), et de la même ouverture de compas, vous marquerez un point G″ sur AE; la distance G′ G″ sera le tiers de FG.

En effet, la droite qui joindrait G′ et G″, serait parallèle à la corde CE, puisque AC contient AG′ comme AE contient AG″, et par suite, cette droite G′ G″ est le tiers de AG′, comme CE est le tiers de AC.

Il est visible que pour réduire des droites au quart, au cinquième, il faudrait former un autre angle, en portant quatre, cinq parties égales sur AB.

69. Une *échelle* est une droite divisée qu'on place sur le papier, pour construire en petit, un tracé dont les lignes ont été mesurées. Chacune des parties égales de l'échelle répond à l'unité de mesure ou à un certain nombre de ces unités. Si, par exemple, les parties sont des centimètres réels, chacun de ces centimètres représentera soit un mètre réel, soit 10 mètres, etc. Pour faire sur le dessin, une droite qui, sur le terrain, aurait 50 mètres, on prendrait, dans le premier cas, 50 parties ou centimètres de l'échelle, et le tracé serait *au centième*, puisqu'un centimètre est le centième d'un mètre; dans le second cas, on prendrait seulement 5 parties de l'échelle, et le tracé serait *au millième*, parce que un centimètre est la millième partie de 10 mètres.

(*) G′ se prononce G *prime*, G″ se prononce G *seconde*, G‴ se prononce G *tierce*, G$^{\text{IV}}$ se prononce G *quarte*.

Mais, outre ses parties principales, une échelle doit en présenter encore d'autres qui donnent les dixièmes, et quelquefois les centièmes de son unité, ou qui permettent de réduire exactement et aisément les dixièmes, les centièmes de l'unité de mesure. Si cette unité est le mètre, il faut que l'échelle donne réduits les décimètres, les centimètres; et souvent la longueur qui représente le mètre, n'est pas assez grande pour qu'on y marque distinctement et avec exactitude, même les parties représentatives des décimètres. C'est ce qui arrive notamment lorsqu'on adopte le millimètre pour mètre ou que le dessin doit être au millième. Dans un tel cas, on construit sur le millimètre, ce qu'on appèle l'*échelle des parties*, au moyen de laquelle on peut prendre exactement et facilement les décimètres réduits, et approximativement les centimètres.

Soit AB la partie de l'échelle qui représente le mètre (P. II, F. 1). Par les points A, B, vous tracerez deux parallèles : on les fait ordinairement perpendiculaires à AB. Sur chacune, vous porterez 10 fois une longueur arbitraire, aussi grande que le permettra la place destinée à l'échelle; vous numéroterez les points de division, en partant de AB; vous joindrez par des droites les points de même numéro, et enfin vous tirerez une droite de A au point 10 de B 10'.

Les droites AB, 1.1', 2.2', 3.3', etc., sont parallèles et égales, puisqu'elles renferment entre elles des parties égales de parallèles (66). Par conséquent (67), 1C est le dixième de 10.10' ou de AB, comme A1 est le dixième de A 10; 2D vaut deux dixièmes de 10.10' ou de AB, comme A2 vaut deux dixièmes de A10; 9E vaut neuf dixièmes de AB, comme A9 vaut neuf dixièmes de A10. De même, à partir des numéros de B10', $1'C=\frac{9}{10}$, $2'D=\frac{8}{10}$, $9'E=\frac{1}{10}$. Vous concevez que pour pouvoir prendre ces dixièmes avec exactitude, il faut rendre A10' le moins oblique qu'il est possible sur les parallèles 1.1', 2.2', etc., ou faire A10, B10' aussi longues qu'on le peut; car le véritable point d'intersection de deux droites se distingue d'autant plus aisément, que ces droites sont plus près d'être d'équerre.

Ordinairement, l'échelle d'un dessin, d'un plan, a deux parties: les divisions de l'une donnent les unités réduites, par groupes de 5, de 10, etc.; les divisions de l'autre donnent chacune une seule unité. Les premières sont numérotées 0, 5, 10, etc., ou 0, 10, 20, etc., de gauche à droite; les dernières sont numérotées 0, 1, 2, 3, etc., de droite à gauche, et à chacune de celles-ci est adaptée une échelle des parties, comme le représente la figure 2 (P. II). De plus, les dix parallèles communes à ces échelles des parties, sont continuées jusqu'au bout de l'échelle principale et arrêtées à une droite 10.10, par exemple, menée par l'extrémité 10, parallèlement aux obliques 5.5, 4.4, etc. Une parallèle aux mêmes obliques est aussi tirée par tous les autres points de divisons 0, 5, etc., de l'échelle principale, et chaque oblique reçoit à son extrémité inférieure, le même numéro qu'à son extrémité supérieure. Les parallèles à l'échelle principale sont aussi numérotées de la même manière aux deux bouts.

C'est des obliques et des parallèles à l'échelle principale qu'on se sert le plus souvent. Voulez-vous, par exemple, prendre une longueur réduite de $11^{m},45$? Comme elle renferme 4 dixièmes de mètre, vous posez l'une des pointes du compas à l'extrémité de droite de la parallèle 4.4, et l'autre à l'intersection de cette parallèle et de la perpendiculaire 1.2; vous avez alors exactement $11^{m},4$; car il y a 10^{m} du point 4 de droite au point A, comme de 10 à 0 sur l'échelle principale; il y a 1^{m} de A à B et 4 décimètres de B à C. Pour avoir les 5 centimètres, vous augmenterez un peu l'ouverture de compas, de manière à prendre à gauche de C, la moitié de 1 D, attendu que 5 centimètres forment la moitié de 1 décimètre. Cette moitié de 1 D s'estime à vue.

Supposons encore que vous ayez à faire sur le dessin, une droite qui ait en réalité $7^{m},80$. Vous chercherez sur la dernière oblique, marquée ici 10.10, le n° 8 qui est égale au nombre des décimètres; vous poserez l'une des pointes du compas à l'intersection de la parallèle 8.8 et de l'oblique qui est numérotée 5 sur l'échelle principale, parce qu'il n'y a qu'une fois 5 dans 7; vous placerez l'autre pointe à l'intersection de la même parallèle et de la perpendiculaire qui est numérotée 2 sur l'échelle principale, attendu que 5 et 2 font 7, et vous aurez une ouverture de $7^{m},80$. Ainsi, les décimètres de la longueur à prendre indiquent la parallèle; les mètres, comptés sur l'échelle principale, indiquent l'oblique d'où il faut partir et la perpendiculaire à laquelle on doit s'arrêter.

70. Lorqu'on élève une perpendiculaire en un point quelconque A d'un diamètre BC (P. II, F. 3) et qu'on prolonge cette perpendiculaire AD jusqu'à la circonférence, d'un seul côté, on a trois droites AB, AD, AC qui jouissent d'une relation remarquable: *la demi-corde AD perpendiculaire au diamètre, en contient la petite partie*

AB, autant de fois qu'elle-même est contenue dans la grande AC. La droite AD est dite, pour cette raison, *moyenne proportionnelle* entre les deux parties du diamètre.

Trouver la moyenne proportionnelle de deux droites données, est une opération à laquelle conduisent assez souvent les problèmes de géométrie.

Pour faire ce tracé, vous tirerez une droite BC, sur laquelle vous porterez les deux droites données *b*, *c* (*): la première de B en A, la seconde de A en C; puis vous chercherez le milieu de BC (43); de ce milieu E, avec la moitié de BC pour rayon, vous décrirez une demi-circonférence, et au point A, jonction des deux droites données, vous éleverez une perpendiculaire sur BC ou vous menerez une parallèle à FG, jusqu'à la rencontre de la demi-circonférence, en D. Cette perpendiculaire ou parallèle AD sera la moyenne proportionnelle cherchée, c'est-à-dire qu'elle contiendra AB ou *b*, comme elle sera contenue dans AC ou *c*.

MESURAGE DES DROITES.

71. Chacun sait mesurer grossièrement une ligne droite, quand la mesure peut y être appliquée d'un bout à l'autre; mais peu de personnes se font une juste idée de la difficulté qu'on éprouve pour mesurer une droite très-exactement. Cette difficulté est telle que rarement on obtient la même longueur, en recommençant l'opération. Aussi, dans tous les cas où une grande exactitude est nécessaire, faut-il ne s'en tenir ni au premier, ni au second mesurage: *on doit mesurer trois, quatre et même cinq fois, avec toute la précision possible, additionner toutes les longueurs trouvées et diviser leur somme par leur nombre*. Le quotient donne une *longueur moyenne* souvent moins inexacte qu'aucune des autres, à cause d'une espèce de compensation qu'a opérée le calcul, entre les erreurs en plus et les erreurs en moins.

Supposez que la vraie longueur d'une droite soit $4^{m},358$ et que vous l'ayez trouvée de $4^{m},359$ par un premier mesurage, de $4^{m},357$ par un deuxième, de $4^{m},3585$ par un troisième. La somme de ces 3 longueurs est $13^{m},0745$. Divisant par 3, vous obtenez $4^{m},3581$ pour longueur moyenne, et vous n'avez plus qu'un seul dixième de millimètre d'erreur; tandis que l'erreur serait d'un millimètre ou d'un demi-millimètre en plus, si vous vous en teniez au premier

(*) *b* se prononce *petit b*; *c* se prononce *petit c*.

ou au troisième mesurage, et d'un millimètre en moins, si vous adoptiez le second.

A la vérité, toutes les erreurs pourraient être en plus : vous auriez pu trouver, par exemple, $4^m,359$ la 1^{re} fois, $4^m,3586$ la 2^e fois, $4^m,3585$ la 3^e fois et dans ce cas la longueur moyenne $4^m,3587$ serait plus inexacte que les deux dernières; mais elle le serait moins que la première; et dans l'ignorance où vous êtes de la vraie longueur d'une droite que vous mesurez, il est possible que vous regardiez comme le meilleur, le mesurage le plus mauvais. Mieux vaut certainement s'exposer à faire une erreur de quelque peu supérieure aux plus faibles, que de risquer d'en commettre une égale à la plus forte. Ainsi, lors même que toutes les erreurs sont en plus, c'est encore un parti sage que de prendre la moyenne des longueurs trouvées, et cette conclusion est évidemment applicable au cas où toutes les erreurs sont en moins.

Pour éviter de faire des marques, toujours causes d'inexactitude, il convient d'employer deux mesures rigoureusement égales, quand il sagit de déterminer avec une grande précision, la longueur d'une ligne droite. On les pose bout à bout, en évitant de les heurter l'une contre l'autre et de laisser le moindre intervalle entre elles. Si l'unité, le mètre par exemple, n'est pas contenu un nombre exact de fois dans la longueur, on mesure la partie restante avec le décimètre, le centimètre et même le millimètre.

72. Il y a plusieurs cas à considérer, dans le mesurage des droites sur lesquelles la mesure ne peut être appliquée: ces droites sont horizontales ou verticales ou inclinées, et dans chacune de ces positions, une au moins de leurs extrémités a des abords qui permettent d'y opérer, ou bien ni l'une ni l'autre n'en laisse la facilité.

Mesurer la longueur horizontale d'une rampe AB (P. II, F. 4).

Trois personnes sont nécessaires pour cette opération : deux placent et maintiennent la mesure, le quadruple mètre par exemple; la 3e manie le niveau de maçon (60).

Plantez un jalon en A et un autre en B; posez une des extrémités de la mesure en A, et dirigez cette mesure dans l'alignement AB; puis haussez ou baissez l'autre extrémité, jusqu'à ce que le niveau montre que le quadruple mètre est horizontal. Appliquez alors à cette extrémité un fil-à-plomb, et marquez sur le terrain, le point C qu'il indique.

Ensuite, placez en C le bout de la mesure qui était en A, dirigez cette mesure dans l'alignement CB, haussez ou baissez l'autre bout, jusqu'à ce que le niveau montre que le quadruple mètre est horizontal, appliquez le fil-à-plomb à ce même bout, et continuez toujours ainsi jusqu'en B.

Lorsque le terrain est accidenté, il est possible qu'un des points donnés par le fil-à-plomb, se trouve dans un creux, comme en D. Il faut alors planter un jalon au point D, le rendre vertical au moyen du fil-à-plomb, et appliquer un des bouts de la mesure contre ce jalon, afin de pouvoir la placer horizontalement au-dessus de la saillie E.

Il est visible que le nombre de fois qu'on pourra porter ainsi la mesure sur la rampe, donnera la vraie longueur de la droite horizontale AB′ ou BA′.

Si l'on n'a pas besoin d'une grande exactitude, on peut se contenter du coup d'œil, pour placer la mesure horizontalement, et remplacer le fil-à-plomb par un petit cailloux qu'on laisse tomber de l'extrémité d'où doit partir une verticale. Ceux qui mesurent avec la chaîne d'arpenteur, agissent ainsi; seulement, au lieu de laisser tomber une pierre, ils laissent tomber une fiche qu'ils plantent ensuite. Auparavant, la chaîne doit être fortement tendue, afin que l'erreur qui résulte de la courbure causée par le poids, soit très-petite.

Ce sont ces moyens qu'il faut employer, pour mesurer toutes les distances horizontales qu'on peut parcourir, quand le terrain est raboteux ou en pente.

73. Voici maintenant les principes sur lesquels repose le mesurage des droites qui ne peuvent être parcourues.

Quatre points donnés A, 1, 2, 3 (P. II, F. 5), *joints deux à deux, par six droites* A1, A2, A3, 1.2, 1.3, 2.3, *produisent en général trois points* B, 4, 7, *où concourent les droites deux à deux, et un de ces concours est toujours un croisement.* Dans la figure, c'est le point 7 : les lignes A3, 1.2 s'y coupent, s'y croisent.

La droite qui passe par le croisement 7 *et l'un des deux autres concours*, la droite 4.8 par exemple, *partage en deux parties inégales* A8, 8.1, *la distance* A1, *de deux points donnés.*

Si l'on multiplie la somme A1 *de ces deux parties par la plus petite* A8, *et qu'on divise le produit par leur différence* 8.1—A8, *on obtient la distance du* 3ᵉ *concours B, au point donné A qui termine la plus petite partie.* Ce principe est exprimé plus brièvement par la formule $d = \frac{P+p}{P-p} \times p$ dans laquelle d représente la distance AB, P la grande partie 8.1 et p la petite partie A8.

74. *Mesurer la distance horizontale de deux points A, B séparés par une rivière* (P. II, F. 5).

Plantez un premier jalon sur l'alignement AB, un second jalon hors de cet alignement, un 3e sur l'alignement B2 et peu éloigné du 2e, un 4e à la rencontre des alignemens A2 et 1.3, un 5e sur l'alignement 1.2, un 6e sur l'alignement A3, un 7e à la rencontre des alignemens 5.2 et 6.3, enfin un 8e à la rencontre des alignemens 4.7 et AB (62). Mesurez ensuite la distance A8 et la distance 8.1; faites la somme de ces deux longueurs; multipliez-la par la plus petite A8 et divisez le produit par l'excès de 8.1 sur A8. Le quotient sera la distance de A à B (73).

Si, par exemple, A8=4 mètres et que 8.1=6 mètres, la formule du n° 73 donne $d = \frac{6+4}{6-4} \times 4^m = \frac{10}{2} \times 4^m = \frac{40^m}{2} = 20^m$.

Ce procédé s'applique à tous les cas où B est visible de A et où l'on ne peut pas cheminer en ligne droite de A jusqu'à B. Vous pouvez, par exemple, l'employer pour mesurer la largeur d'une rivière (P. II, F. 6): vous choisissez alors un point remarquable B, sur le bord qui vous est opposé, puis un point A, sur le bord où vous êtes, de manière que la droite BA soit à très-peu-près d'équerre avec les deux rives.

75. *Mesurer la distance horizontale de deux points A, B séparés par un bois* (P. II, F. 7).

Comme le bois empêche de voir le point B, quand on est au point A, il n'y a pas moyen de débuter par le placement d'un jalon sur l'alignement AB. Le procédé qui précède n'est donc pas applicable; du moins il doit être modifié.

Plantez un premier jalon en un point d'où vous puissiez voir à la fois A et B; puis un 2e et un 3e jalon dans l'alignement A1, un 4e dans l'alignement B2, un 5e à la rencontre des alignemens B1 et 3.4, un 6e dans l'alignement 5.2, un 7e dans l'alignement 1.4, un 8e à la rencontre des alignemens 6.2 et 7.4, un 9e dans l'alignement A5, un 10e à la rencontre des alignemens 9.5 et 3.8, un 11^e à la rencontre des alignemens 1.10 et 3.5. Ce 11^e jalon se trouvera nécessairement sur l'alignement BA. Mettez ensuite un 12^e jalon dans l'alignement 11A, et enfin un 13^e à la rencontre des alignemens 12A et 3.10. Il ne vous restera plus qu'à mesurer les distances A13 et 13.11 pour les employer comme précédemment : vous multiplierez leur somme par la plus petite et vous diviserez le produit par leur différence.

Si, par exemple, A13=5^m et que 13.11=5^m,04, vous trouverez que $AB=\frac{10^m{,}04\times5}{0{,}04}=\frac{50^m{,}20}{0{,}04}=1255^m$.

Ce procédé s'applique à tous les cas où il s'agit de mesurer la distance horizontale de deux points dont l'un est invisible de l'autre.

76. C'est absolument la même figure qu'il faut faire et répéter, pour *prolonger une droite AB au delà d'un obstacle qui ne permet pas de s'aligner sur les points A, B* (P. II, F. 8).

Le tracé revient à déterminer, au delà de l'obstacle, deux points qui soient situés sur l'alignement AB.

Plantez un 1er et un 2^e jalon sur un alignement 2.1 que n'interrompe point l'obstacle, et plus rapprochés entre eux que A, B; placez un 3^e jalon à l'intersection des alignemens B2 et A1, un 4^e sur l'alignement B1, un 5^e à la rencontre des alignemens 4B et 2A, un 6^e à l'intersection des alignemens 2.4 et 3.5, un 7^e à la rencontre des alignemens 1.6 et 2A, un 8^e enfin à la rencontre des alignemens 1.2 et 4.7. Le point 8, ainsi déterminé, sera sur le prolongement de AB.

Pour obtenir un 2^e point, vous répéterez à droite de AB, le jalonnement qui vient d'être fait à gauche, en prenant toutefois la précaution de placer les deux premiers jalons de manière que leur alignement laisse à droite de l'opérateur, l'obstacle et le point 8 déjà trouvé.

77. Vous ferez encore une figure analogue à celle du n° 75, si vous avez à *déterminer une direction qui doive passer par un point A et concourir avec deux autres directions BC, DE dont le point de rencontre soit invisible* (P. II, F. 9).

Vous planterez un 1er jalon au point A, un 2^e et un 3^e sur BC, un 4^e sur DE, un 5^e à la rencontre de DE et de l'alignement 2A, un 6^e à la rencontre des alignemens 4.3 et 5.2, un 7^e à l'intersection des alignemens 2.4 et 3.5, un 8e à celle des alignemens 3A et 7.6, un 9e enfin à celle des alignemens 4.6 et 8.2. Les deux jalons 1 et 9 détermineront un alignement qui, s'il était prolongé, passerait par le point de concours de BC et de DE.

Ce jalonnement peut être converti en un tracé propre à la même opération sur le papier. Si BC, DE sont deux droites qui aillent se couper hors de la feuille, et qu'il faille tracer, par le point A, une 3e droite qui concoure au même point que les deux premières, vous couperez BC, DE par deux concourantes quelconques 2.6 et 3.6, dont l'une passe par A; vous ferez le croisement 7, en tirant les droites 2.4 et 3.5; vous joindrez les points 6 et 7, en prolongeant la droite 6.7 jusqu'à BC; enfin vous tirerez 3A, pour marquer le point 8, et 2.8 pour marquer le point 9. La droite A9, ainsi déterminée, passerait par le point où se couperaient BC et DE, si ces trois lignes pouvaient être prolongées.

78. *Mesurer la distance horizontale de deux clochers A, B situés au-delà d'une rivière* (P. II, F. 10).

Plantez un jalon C sur l'alignement AB; mesurez la distance CA et la distance CB (74); puis retranchez CA de CB; la différence sera la distance AB cherchée.

Ce moyen s'applique à tous les cas où il s'agit de mesurer la distance horizontale de deux points, près desquels on ne peut opérer, mais dont il est possible de voir l'alignement : par exemple, deux clochers entourés de maisons.

79. *Mesurer la distance horizontale de deux clochers A, B fort éloignés de l'opérateur* (P. II, F. 11).

Si l'éloignement où l'on est des clochers empêche de se porter sur leur alignement, vous planterez un jalon en un point C d'où vous puissiez voir A et B, puis vous mesurerez CA et CB (74). Supposons que la distance CA soit de 1800 mètres et que la distance CB soit de 2025m. Vous planterez, sur ces alignemens, des jalons D, E, de manière que les distances CD, CE forment la même fraction de CA et de CB, le centième par exemple; et pour cela vous porterez 18 mètres sur CA à partir de C, puis 20m,25 sur CB aussi à partir de C. Alors la droite DE se trouvera parallèle à la droite AB et en sera aussi la centième partie (67). Mesurez donc DE et multipliez sa longueur par 100, vous aurez pour produit la distance AB. Si, par exemple, DE contient 12m, AB en contiendra 1200; dans le cas où CD serait le millième de CA et CE le millième de CB, DE serait aussi la millième partie de AB, et pour avoir cette distance AB il faudrait multiplier par 1000 la longueur de DE.

C'est ainsi qu'il faut opérer, toutes les fois qu'il s'agit de mesurer la distance horizontale de deux objets dont on ne peut approcher, et sur l'alignement desquels on ne saurait se placer: par exemple, les sommets de deux hautes montagnes, deux villages situés sur les versans opposés d'une côte.

80. *Mesurer la hauteur d'un clocher* (P. II, F. 12). Plantez bien verticalement deux jalons CD, EF, dans un terrain de niveau et sur un alignement CG dirigé vers l'axe AB de la tour; visez le sommet A, par l'extrémité du plus petit; faites marquer le point H où l'alignement DA coupe le grand jalon; mesurez les verticales CD, EH, les horizontales CE, EG et la distance GB du point G à l'axe AB de la tour; cherchez l'excès de EH sur CD et la somme de CE, EG, GB; puis divisez l'excès de EH par CE. Si vous avez mesuré au mètre, par exemple, le quotient sera l'excès sur CD, d'un jalon qui serait planté à un seul mètre du point C; ce quotient vous fera connaître ce qu'on appèle la *pente* de la droite DA, car il vous indiquera de combien cette droite s'élève verticalement, par mètre de distance horizontale. Par conséquent, pour savoir de combien la même droite s'élève de D en I, ou pour déterminer la hauteur AI, vous n'aurez plus qu'à multiplier le quotient par la distance horizontale DI ou CB. Ajoutant enfin à IA, la longueur du jalon CD, vous trouverez la hauteur AB, c'est-à-dire l'élévation du point A au-dessus de l'horizontale CE.

Soit H la hauteur AB, G le grand jalon EH, p le petit jalon CD, d la distance CE, D la distance CB, on a pour formule $H=\frac{G-p}{d}\times D+p$.

Supposons que CD$=1^m,66$, CE$=3^m$, EH$=3^m,16$, EG $=262^m,68$ et que GB$=15^m$. CB ou D sera de $280^m,68$ et la formule donnera $H=\frac{3,16-1,66}{3}\times 280,68+1,66=142^m$.

Cette hauteur est précisément celle du clocher de Strasbourg, l'édifice le plus élevé de l'Europe.

Ce procédé, simple, prompt et suffisamment exact, est propre au mesurage de la hauteur de tout édifice, des ar-extrémités, une face plane peut être conçue prolongée au-delà de ses limites. Considérée de la sorte, elle est illimitée et prend le nom de *plan*. C'est ainsi qu'on la considère et qu'on la nomme toujours, en l'étudiant sous le rapport des différentes positions qu'elle peut avoir, afin de faire entendre que les propriétés qui lui sont reconnues et les procédés qui en dérivent, ne dépendent nullement de la forme des limites et sont applicables à toute face plane d'un corps quelconque.

85. Parmi toutes les positions que peut prendre un plan, il en est deux très-remarquables : la position verticale et la position horizontale. *Un plan est vertical dès que le fil-à-plomb, librement suspendu, s'y applique sur toute sa longueur*, ou bien dès que ce fil en cache à l'œil toute l'étendue. La face intérieure d'un mur de maison est dans ce cas. Il n'en est pas de même de la face extérieure, à cause du léger talus ou *fruit* qu'y exige la solidité.

Un plan est horizontal ou de niveau, lorsque deux droites concourantes qu'on y a tracées à volonté, sont elles-mêmes horizontales (44) : un plancher bien fait, le tapis d'un billard, la surface des eaux tranquilles sont des plans horizontaux. Il suffit donc, pour reconnaître si un plan est horizontal, d'y placer le niveau sur deux directions qui se coupent. Il y a plus d'exactitude dans une telle vérification, quand les deux directions sont à peu-près d'équerre.

Un plan qui n'est ni horizontal, ni vertical, est dit incliné : les faces d'un toit sont donc des plans inclinés (*).

86. Quelle que soit la position d'un plan, une droite peut être perpendiculaire ou parallèle ou oblique à ce plan.

Une droite est perpendiculaire sur un plan, quand elle l'est sur deux droites de ce plan, qui se croisent à son pied. Alors, elle ne penche ni dans un sens, ni dans aucun autre, ou ce qui revient au même, elle est d'équerre sur toutes les droites du plan qui la rencontrent.

La direction du fil-à-plomb ou la verticale est donc perpendiculaire au plan horizontal qu'elle perce ; car elle l'est à toutes les horizontales qui peuvent être tracées par son pied, sur le plan (44).

(*) Les moyens de la Géométrie élémentaire ne permettent point de représenter exactement, sur le tableau, les positions des plans, celle du plan vertical exceptée. Il faut pour les autres, se servir de planchettes ou de cartons, et ne jamais faire de figures en perspective ; elles peuvent donner des idées fausses aux élèves.

La distance d'un point à un plan est la longueur de la perpendiculaire qu'on y abaisse de ce point, parce qu'une telle droite est la plus courte de toutes celles qui peuvent être menées du point jusqu'au plan (41).

Planter une tige perpendiculairement sur un plan.

Disposez deux équerres de manière qu'une des petites arêtes de l'une se confonde avec une des petites arêtes de l'autre, sans que les deux instrumens aient d'autres points communs; posez-les ensuite sur le plan, par les deux petites arêtes non accolées, et placez la tige le long de celles qui se confondent. La direction de cette tige sera évidemment alors perpendiculaire à deux droites du plan. Pour plus d'exactitude, il convient que les deux petites arêtes non accolées fassent à-peu-près un angle droit.

Si la tige devait contenir un point marqué hors du plan, il faudrait que la droite des deux arrêtes accolées passât par ce point.

87. *Une droite est parallèle à un plan, lorsque deux de ses points en sont également éloignés*, ou lorsqu'il y a entre ces points et le plan, deux parallèles égales.

Toute horizontale située hors d'un plan horizontal, lui est parallèle, parce que les verticales qui vont de la droite au plan, sont toutes de même longueur.

Toute verticale située hors d'un plan vertical, lui est parallèle, parce que les horizontales qui vont de la droite au plan, sont toutes de même longueur.

Placer une barre parallèlement à un plan.

Tracez d'abord sur le plan, la direction que doit avoir la barre; puis, si le plan est vertical, plantez-y deux tiges perpendiculairement et sur la droite tracée; s'il est horizontal ou incliné, plantez-y deux tiges verticales. Dans tous les cas, portez sur ces tiges, à partir du plan, deux longueurs égales. Par là vous déterminerez deux points, et il vous restera à placer la barre de façon qu'une de ses longues arêtes ou une de ses lignes droites parallèles aux longues arêtes, passe par ces deux points.

La distance de la barre au plan ou un point de sa position est quelquefois donnée. Il faut alors planter les deux tiges perpendiculairement au plan, quel qu'il soit, et marquer sur ces tiges deux points qui se trouvent éloignés du plan autant que doit l'être la barre ou le point donné.

88. *Une droite est oblique par rapport à un plan, si elle*

n'est ni perpendiculaire, ni parallèle. Lorsque le plan est horizontal, l'oblique est toujours une ligne inclinée, parce qu'elle n'est alors ni verticale, ni horizontale (44). On détermine ordinairement la position d'une ligne inclinée, au moyen de sa *pente*, c'est-à-dire au moyen de la différence des distances d'un plan horizontal à deux points de cette droite écartés horizontalement d'une unité de longueur (80).

Placer une pièce de charpente selon une pente donnée.

Tracez, sur le terrain du chantier, deux droites d'équerre *ac*, *bc* (P. II, F. 14). Si la pente est de 68 centimètres par mètre, comme doit être celle des chevrons d'un toit en tuiles plattes, dans ce pays-ci, vous porterez un mètre de *c* en *b* et 68 centimètres de *c* en *a*; puis vous tirerez la droite *ab* qui sera la direction de la pièce de charpente. Mais, pour que cette direction fût très-exacte, il faudrait au lieu d'un mètre, porter 3 ou 4 mètres de *c* en *b* et 3 ou 4 fois 68 centimètres de *c* en *a*: la pente serait la même, les points *a*, *b* se trouveraient plus éloignés l'un de l'autre, et la petite erreur que vous pourriez commettre en plaçant la règle ou le cordeau sur ces points, altérerait beaucoup moins la vraie direction cherchée.

La figure *abc* étant relevée sur *bc* verticalement, montre que la pièce de charpente, placée selon *ab*, ferait avec l'horizontale *bc*, un angle *b* dépendant de la pente. Vous pourriez donc aussi déterminer la position de la pièce, au moyen de cet *angle de pente.* Comme il est le plus petit des angles que ferait *ab* avec toutes les horizontales menées par *b*, c'est celui-là qu'on a en vue, quand on parle de l'angle fait avec le plan horizontal, par une droite inclinée *ab*, de même qu'on veut désigner la plus courte des droites qui peuvent être menées d'un point à une ligne ou à un plan, lorsqu'on demande la distance du point à la ligne ou au plan.

89. Vous voyez par là que pour *déterminer l'angle qu'une droite inclinée* ab *fait avec le plan horizontal* (P. II, F. 14), il faut appliquer le fil-à-plomb en un point *a* de la droite, marquer le point *c* qu'indique le plomb sur le plan, et joindre *c* au point *b* où la droite rencontre le même plan. L'angle *abc* est celui qui est demandé.

On trouverait d'une manière analogue, l'angle d'une oblique et d'un plan qui ne serait pas horizontal. Au lieu d'abaisser une verticale du point *a*, il faudrait abaisser de ce même point une perpendiculaire sur le plan, ce qu'on ferait au moyen de deux équerres (86).

90. L'ensemble de tous les points communs à deux plans qui se coupent, forme leur *intersection*.

L'intersection de deux plans est une droite; car si vous joigniez par une droite deux points qui leur fussent communs, cette droite serait à la fois dans chacun des deux plans (83), et s'il y avait un point commun qu'elle ne prît pas, vous pourriez le joindre à deux points de la droite et former ainsi une face, un plan limité par trois lignes, qui se confondrait avec chacun des plans illimités. Or, cela est impossible. Donc, la droite qui joint deux des points communs à deux plans quelconques, prend tous les autres et forme l'intersection de ces plans.

Voilà pourquoi les ouvriers ne s'occupent point de rendre droites, les arêtes qui doivent l'être dans un corps; il leur suffit de faire exactement planes, les faces qui se coupent selon ces arêtes. C'est aussi pour la même raison, que le pli d'une feuille de papier est toujours une ligne droite, car les deux parties d'une feuille pliée sont deux faces ou plans qui se rencontrent.

91. *Deux plans verticaux qui se coupent, ont une verticale pour intersection*, parce que le fil-à-plomb appliqué à un des points communs, devant être à la fois dans chacun des plans (85), se dirigerait nécessairement selon la droite d'intersection.

Un jalon est donc rigoureusement vertical, lorsqu'il se trouve dans deux plans verticaux qui se coupent.

Placer un jalon ou une tige A verticalement ou perpendiculairement à un plan horizontal (P. II, F. 15).

Mettez-vous en un point quelconque B; suspendez d'une main le fil-à-plomb devant votre œil droit, et avec l'autre main, faites les signes nécessaires pour que l'aide amène la partie supérieure du jalon, dans le plan vertical qui contient le pied de ce jalon et le fil. Prenez ensuite une autre position C, et faites la même opération. Si l'aide a cette fois le soin de pousser à droite ou à gauche, dans la direction AB, le jalon sera vertical, dès qu'il se trouvera dans le plan qui contient son pied et le fil. Cependant, il convient de vérifier s'il est resté dans le premier plan vertical.

Il est plus court et plus sûr d'opérer à la fois en B et en C; par conséquent, trois personnes sont nécessaires pour placer un jalon exactement et promptement dans la verticale de son pied. Néanmoins, un seul homme en vient à bout, s'il y met le temps et la patience nécessaires.

Observez que l'opération a plus d'exactitude, lorsque les directions AB, AC se coupent à-peu-près d'équerre.

92. L'espace illimité que laissent entre eux deux plans qui se rencontrent, est appelé *coin*, parce que les deux plans ont alors, l'un par rapport à l'autre, la position des deux grandes faces du coin dont se sert le fendeur de bois. Le coin est donc pour les plans, ce que l'angle est pour les droites (23). Aussi est-ce au moyen de l'angle formé par des droites, qu'on apprécie un coin.

L'indication d'un coin est la même que celle de l'angle de deux droites tracées sur les plans, perpendiculairement à l'intersection. Cet angle augmente par multiplication ou diminue par division tout comme le coin : il se double, si le coin se double, ou il se réduit au tiers, si le coin s'y réduit. Quand l'angle est droit, il en est de même du coin, et les deux plans se trouvent perpendiculaires entre eux.

Deux plans se rencontrent d'équerre, si l'un renferme une perpendiculaire à l'autre.

En effet, la perpendiculaire l'est sur toutes les droites du second plan (86) ; elle l'est donc sur l'intersection et sur une droite menée par son pied, d'équerre à cette intersection, dans le même second plan. Conséquemment, le coin est droit.

Tout plan vertical est perpendiculaire au plan horizontal qu'il rencontre ; car il contient une infinité de verticales qui sont perpendiculaires à tous les plans horizontaux (86). Ainsi, la face intérieure d'un mur de maison et le plancher forment un coin droit ou sont perpendiculaires entre eux.

Vérifier si deux faces planes d'une pierre sont d'équerre.

On se sert pour cela d'une équerre évidée ou formée de deux règles. Lorsque cette équerre embrasse le coin de la pierre, chaque règle, placée perpendiculairement à l'arête de ce coin, doit s'appliquer exactement dans toute sa longueur, sur l'une des deux faces.

Mais, pour opérer avec une grande exactitude, en suivant ce procédé, il faudrait vérifier la position des règles par rapport à l'intersection des faces. Il est donc plus sûr ou au moins plus simple de placer une des règles contre une des faces et de faire pivoter l'équerre sur cette règle, pour voir si, dans toutes les positions, l'autre règle s'applique exactement sur l'autre face. Lorsqu'il en est ainsi, la première face contient une droite perpendiculaire à la seconde (86), et par conséquent le coin est droit.

Vérifier si les deux faces inclinées d'un faîte de charpente font bien l'angle voulu.

Ces faces sont obliques l'une par rapport à l'autre; leur coin n'est donc pas droit, et il faut se servir d'une fausse équerre à charnière. Vous leverez, avec cet instrument, sur *l'épure* ou *tracé en grand*, l'angle obtus que doivent faire les deux pans du toit (24); puis vous suivrez le premier des deux procédés qui viennent d'être donnés pour la vérification d'un coin droit.

93. *Tout plan qui rencontre un plan horizontal, y marque une droite de niveau;* car l'intersection de deux plans est une droite (90), et toute droite située sur un plan horizontal est horizontale elle même (85).

Parmi les droites qu'on peut tracer sur un plan incliné, il en est de parallèles qui ont une pente plus forte que celle de toutes les autres (80); elles sont appelées, pour cette raison, *lignes de plus grande pente.*

Toute ligne de plus grande pente doit former un angle de pente plus ouvert que celui d'une autre droite quelconque, tracée sur le même plan (88). Par conséquent, *elle fait avec le plan horizontal, un angle égal à celui du plan incliné, et rencontre d'équerre l'intersection de niveau, ainsi que toutes les autres horizontales du second plan.*

Les lignes de plus grande pente ont de l'importance: les eaux et tous les corps qui glissent ou roulent sur un plan incliné, les suivent toujours, attendu qu'elles offrent les chemins les plus rapides et les plus courts à la fois, que puissent prendre ces corps pour descendre le plan.

Tracer une ligne de plus grande pente.

Vous déterminerez une des horizontales du plan incliné (44) et vous n'aurez plus qu'à élever, dans ce plan, une perpendiculaire en un point quelconque de l'horizontale; cette perpendiculaire et ses parallèles seront des lignes de plus grande pente.

94. *Le plan vertical qui contient une ligne de plus*

ré, ou comme le produit d'un autre nombre multiplié par lui-même, et il faut pouvoir trouver cet autre nombre. L'opération de calcul qu'on fait pour cela, se nomme *extraction de racine quarrée* ou simplement *extraction de racine:* elle est indispensable à la pratique de la Géométrie.

Quelle est la racine de 23425? PREUVE.

2.34.25	153,0522..	0
1 3	25	
9 2	303	
1600.00.00.00	30605	
69750	306102	
852960	3061042	
2407516	....	7

Je partage le nombre 23425 en groupes de deux chiffres chacun, en allant de droite à gauche. Le 1er groupe à gauche peut conséquemment contenir un ou deux chiffres. Je prends la racine quarré 1 du plus grand quarré 1 contenu dans le premier groupe 2, et j'écris cette racine 1 à droite du nombre 23425, comme le diviseur d'une division. De 2, je retranche le plus grand quarré 1 qu'il contient, et j'écris au-dessous le reste 1.

A côté de ce reste, j'abaisse le 1er chiffre 3 du 2e groupe et j'ai 13. Je double le chiffre 1 de la racine et j'obtiens 2 que j'écris au-dessous, à la place ordinaire du quotient d'une division. Je divise 13 par ce nombre 2.

Le quotient 6 peut être trop grand pour la racine. Je l'essaie en le supposant écrit à la suite du diviseur 2 et en multipliant le nombre 26 qui en résulte, par ce même quotient 6. Pour que 6 convienne à la racine, il faut que le produit puisse se retrancher du reste 1 du 1er groupe, suivi de tout le second 34, c'est-à-dire du nombre 134. Tout cet essai, qui consiste en une multiplication et une soustraction dont on n'a pas besoin de connaître le reste, se fait par la pensée, sans rien écrire, comme l'essai d'un quotient, quand le diviseur a plusieurs chiffres.

Je vois ainsi que 6 est trop grand. Je le diminue donc d'une unité et j'essaie 5 de la même manière. Trouvant le chiffre 5 bon pour la racine, je l'y écris à côté du chiffre 1. Je l'écris aussi à côté du diviseur 2, ce qui donne 25. Je multiplie 25 par le 5 de la racine, et je retranche de 134, en écrivant successivement les chiffres du reste, comme si je faisais une division. Je trouve par là que le reste est 9.

A côté du reste 9, j'écris le 1er chiffre 2 du 3e groupe

25, et j'ai 92. Je double le nombre 15 de la racine, et j'obtiens 30 que j'écris vis-à-vis de 92, au-dessous de 15. Je divise 92 par 30 et j'essaie le quotient 3, comme j'ai essayé tout-à-l'heure 6 et 5. Trouvant le chiffre 3 bon pour la racine, je l'y écris à la suite de 15 et je l'écris aussi à la suite du diviseur 30, ce qui donne 303. Multipliant 303 par le chiffre 3 de la racine et retranchant le produit à mesure que je le forme, du reste du 2e groupe, suivi de tout le 3e, c'est-à-dire du nombre 925, j'ai pour reste 16.

L'opération est alors terminée, si l'on ne veut pour racine qu'un nombre entier. Cette racine est 153; le reste 16 montre que le nombre 23425 excède d'autant le quarré de 153. Si au lieu de 23425 nous eussions eu 23409, nous aurions trouvé 153 pour racine, sans aucun reste. Mais, quoique incomplète, la racine 153 ne diffère pas d'une unité de la vraie racine, puisque 4 mis à la place de 3 dans 153, serait trop fort, même pour la division de 92 par 30. D'ailleurs, 154 a pour quarré 23716, nombre bien plus grand que 23425.

Il en est donc des racines comme des quotiens: elles ne sont pas toujours complètes. Dans tous les cas, leur recherche se fait, ainsi que vous venez de le voir, au moyen de la division, de la multiplication et de la soustraction; ceux qui savent bien exécuter ces opérations, n'éprouveront donc aucune difficulté à pratiquer l'extraction de racine.

Il est souvent nécessaire d'avoir une racine moins différente de la véritable, que celle qui est exprimée par un nombre entier. La même opération suffisamment continuée, permet d'approcher aussi près qu'on veut de la racine exacte. Il suffit d'écrire à la suite du dernier reste, autant de groupes de deux zéros, qu'on désire de décimales.

Supposons qu'on veuille obtenir la racine de 23425 à moins de 1 dixmillième près. Je devrai pousser l'extraction jusqu'aux dixmillièmes, ou trouver les quatre premières décimales de la racine, et par conséquent, j'écrirai quatre groupes de deux zéros à la suite du reste 16.

Cela fait, je continuerai de diviser chaque reste joint au 1er chiffre du groupe suivant, par le double du nombre déjà écrit à la racine, jusqu'à l'épuisement de tous les groupes de zéros; mais je séparerai du nombre entier 153, par une virgule, les nouveaux chiffres que je mettrai à la racine. Ainsi, je diviserai 160 par 306, puis j'écrirai le quotient 0 à la suite de la virgule et à la suite de 306. Si je multipliais 3060 par 0, et que je fisse la soustraction du produit, j'obtiendrais évidemment pour reste 1600. Je passe donc ces deux opérations, et je divise tout de suite 1600 suivi du 1er zéro du 2e groupe, ou 16000, par 3060. Cela me donne 5 à la racine et 6975 pour reste. A côté de ce reste, j'écris le 1er zéro du 3e groupe; je divise 69750 par 30610; j'obtiens 2 à la racine et 85296 pour reste. Enfin, je divise 852960 par 306104; j'obtiens 2 à la racine et pour dernier reste 2407516, ou plutôt 0,02407516.

La racine de 23425 est donc alors 153,0522. Elle se trouve encore moindre que la vraie; mais n'en différant pas d'un dixmillième, elle peut bien être regardée comme exacte.

Si aulieu du nombre entier 23425, on avait le nombre 234,25, la recherche de la racine se ferait absolument de la même manière; seulement, il faudrait former les groupes de deux chiffres à partir de la virgule, et mettre une virgule à la racine, dès qu'on aurait employé tous les chiffres de la partie entière 234. La racine serait alors 15,30522.

La preuve par 9 de la multiplication, fournit un moyen facile et expéditif de vérifier une extraction de racine. Additionnez les chiffres de la racine et ôtez 9 à mesure que vous le pourrez; formez le quarré du reste; additionnez les chiffres de ce quarré, en ôtant tous les 9; ajoutez le nouveau reste aux chiffres du reste de l'extraction, en ôtant les 9; vous obtiendrez un troisième reste qui, si l'opération a été bien faite, sera égal à celui que donnera le nombre proposé, quand vous en aurez additionné les chiffres et ôté les 9.

Ici, le reste de la racine est o; le quarré de o est o; le reste de l'extraction donne 7, et le nombre 23425 donne 7 aussi. Par conséquent, l'opération est très-probablement bonne.

Il faut observer toutefois que la preuve par 9 ne fait point apercevoir l'erreur qui provient d'un trop petit quotient; cette preuve réussit, lors même qu'un ou plusieurs chiffres de la racine sont trop faibles. Il faut donc faire en sorte qu'ils ne le soient pas. Or, rien n'est plus facile : il suffit de prendre les divers quotiens aussi grands qu'ils peuvent l'être, comme pour la division ordinaire. Dans cette opération, on est averti de l'insuffisance des quotiens, par les restes qui surpassent alors le diviseur, tandis qu'ils devraient être moindres. Dans l'extraction de racine, il n'en est pas ainsi ; mais on est certain que le quotient ou *le chiffre mis à la racine n'est pas trop petit, quand le reste est moindre que le double de la partie de racine déjà trouvée, augmenté d'une unité.*

Par exemple, dans la racine 153,05 obtenue après la 4e division, le dernier chiffre 5 est suffisamment grand, parce que le reste 6975 est moindre que le double de 15305 augmenté de 1 ou moindre que 30611. Si je mettais 4 au lieu du dernier 5, j'aurais 37584 pour reste, 15304 pour racine, et comme 37584 est plus grand que 1+2 fois 15304 ou 30609, j'en conclurais que la racine 15304 est trop petite d'une unité au moins.

POLYGONES.

97. On donne le nom de *polygones* aux faces planes dont les limites sont des lignes droites. Elles présentent des angles, des sommets et des côtés, en même nombre. Les angles se trouvent tous ouverts en dedans (P. II, F. 16) ou bien les uns ont cette position, tandis que les autres sont ouverts en dehors (F. 17). Dans le premier cas, le polygone est dit à *angles saillans*, et dans le second, à *angles rentrans*. C'est de la première espèce qu'il va être question, attendu qu'un polygone de la deuxième peut toujours être décomposé en plusieurs polygones à angles saillans : il suffit, pour cela, de tirer des droites telles que AB, BC, appelées *diagonales ;* elles donnent les figures ABD, BEFC, ABCG qui ne renferment aucun angle rentrant.

Vous voyez que *les diagonales d'un polygone sont des droites qui joignent deux sommets séparés par un autre ou plusieurs.*

Tout angle ABC (F.16) formé par un côté AB de polygone et le prolongement BC d'un des deux côtés qui rencontrent celui-là, est appelé *angle extérieur*. L'angle ABD de deux côtés du polygone est dit *intérieur*.

Un polygone qui a tous ses angles égaux et tous ses côtés de même longueur, est *régulier*.

Deux polygones dont l'un est la copie réduite de l'autre (68), sont dits *semblables :* les angles du premier sont égaux aux angles du second ; les angles égaux sont placés dans le même ordre, sur les deux figures ; il en est de même des côtés *correspondans*, c'est-à-dire des côtés qui joignent les sommets des angles de même indication ; enfin, deux côtés correspondans se contiennent le même nombre de fois que deux autres côtés correspondans quelconques.

TRIANGLES.

98. Le plus simple de tous les polygones est celui qui a trois côtés et trois angles; on l'appelle *triangle.*

La somme des trois angles d'un triangle égale celle de deux angles droits; car si vous prolongez le côté AB (P. II, F. 18), et que vous meniez par le sommet B, une droite BD parallèle à AC, vous aurez l'angle DBE = A son correspondant (47); l'angle CBD = C comme alternes-internes, et vous savez que les trois angles ABC, CBD, DBE, faits en un point B, du même côté de la droite AE, valent deux angles droits (31).

Remarquez que, dans un triangle, chaque angle extérieur CBE, est la somme des deux angles intérieurs A, C, qui ont des sommets différens du sien (97).

99. *Construire un triangle avec trois droites A, B, C, dont une quelconque est moindre que la somme des deux autres* (P. II, F. 19).

Ce tracé est absolument le même que celui du n° 6. Tirez une droite et portez-y la longueur A, de D en E; puis du point D, avec B pour rayon, décrivez un petit arc; et du point E, avec C, décrivez un second arc qui coupe le premier en F; joignez enfin F à D et à E, vous aurez le triangle DEF dont les trois côtés auront les longueurs données.

Il faut, pour qu'il y ait possibilité dans le tracé, que chaque droite soit moindre que la somme des deux autres, parce que, dans un triangle, chaque côté est plus petit que la somme des deux autres qui forment une ligne brisée.

Delà le moyen de *lever un angle sans fausse-équerre* (24). Supposez qu'il s'agisse de l'angle formé par les traces de deux murs sur un plancher. Vous mesurerez une longueur AB sur l'une de ces traces (P. II, F. 20), une longueur AC sur l'autre, et la distance des points B, C; puis, avec ces trois longueurs, vous construirez, par exemple, sur l'une des faces d'une pierre, un triangle dont l'angle opposé à la longueur BC, sera précisément égal à l'angle A.

100. *Construire un triangle dont on connaît deux côtés et l'angle qu'ils forment.*

Il n'est pas nécessaire de connaître les trois côtés d'un triangle, pour le tracer. Si vous avez l'angle A, par exemple (P. II, F. 21), et les longueurs B, C des côtés qui le forment, vous faites un angle D égal à l'angle A (27); vous portez sur les côtés de l'angle D, les longueurs B, C, de D en E et en F; puis vous tirez la droite EF qui achève le triangle DEF.

101. *Construire un triangle dont on a deux angles A, B et le côté C qui joint les sommets de ces angles* (P. II, F. 22).

Tracez une droite et portez-y la longueur C, de D en E; faites sur DE, au point D, un angle égal à A (27), et au point E, un angle égal à B. Les autres côtés de ces angles achèveront le triangle DEF en se coupant au point F.

102. Le triangle qui a deux côtés égaux, est dit *symétrique.* Les fermes d'un toit à deux pans, les faces de toit qui remplacent des pignons, sont des exemples de triangles symétriques.

Dans un triangle symétrique ABC (P. II, F. 23), *il y a égalité entre les angles A, C opposés aux côtés égaux* BC, BA; car la perpendiculaire BD donne DA=DC (60).

Lorsque vous leverez un angle par le procédé du n° 99, il sera bon de faire symétrique le triangle BAC (F. 20), en prenant AB égale à AC, s'il y a possibilité; vous n'aurez alors qu'une seule longueur à mesurer et à noter, car ayant mesuré AC, vous pourrez rapporter cette droite sur AB.

103. Le côté AC qui, dans un triangle symétrique (P. II, F. 23), n'est pas égal aux deux autres, se nomme *la base* du triangle. La perpendiculaire BD abaissée sur cette base, du sommet B opposé, est *la hauteur*. Mais en général, on appelle *hauteur* d'un triangle quelconque, la perpendiculaire abaissée d'un des sommets, sur le côté opposé, prolongé s'il le faut, et ce côté est alors regardé comme la *base* du triangle.

Construire un triangle symétrique dont on connaît la base B et la hauteur H (P. II, F. 24).

Tirez une droite sur laquelle vous porterez la base B, de A en C; élevez une perpendiculaire au milieu de AC (43); portez la hauteur H sur cette perpendiculaire, de D en E; puis joignez E aux points A, C; vous aurez le triangle symétrique AEC.

Construire un triangle symétrique, quand on connaît la hauteur H et la longueur L des côtés égaux (P. II, F. 25).

Elevez une perpendiculaire au milieu d'une droite quelconque AB ; portez la hauteur H de C en D ; décrivez de D, avec la longueur L, un arc qui coupe AB en deux points E, F ; joignez enfin D à E et à F ; vous aurez le triangle symétrique EDF.

Construire un triangle symétrique, quand on connaît la base et la longueur des côtés égaux.

Vous connaissez réellement les trois côtés et vous pouvez employer le procédé du nº 99.

Construire un triangle symétrique, quand on connaît la longueur L des côtés égaux et leur pente (P. II, F. 26).

Élevez une perpendiculaire au milieu d'une droite quelconque AB. Si la pente est, par exemple, de 5 décimètres, vous porterez 5 décimètres de C en D, 1 mètre de C en E (80), et la longueur L sur la droite ED, à partir de E. Vous marquerez ainsi un point F. Décrivez de ce point, avec FE, un arc qui coupe AB une seconde fois en G, puis joignez F à G ; vous aurez le triangle symétrique EFG.

104. Le triangle ABC qui a ses trois côtés égaux (P. II, F. 27), est dit *équilatéral* (*). *Ses trois angles sont aussi égaux,* car des angles opposés à des côtés de même longueur, dans un triangle, peuvent toujours se couvrir exactement (101). Il s'ensuit que chaque angle d'un triangle équilatéral est de 60º, puisque leur somme est de 180º (98).

Le triangle équilatéral est un polygone régulier, car il satisfait aux conditions de régularité énoncées dans le nº 97.

Construire un triangle équilatéral dont on connaît le côté.

Connaissant un côté, vous connaissez les trois ; vous pouvez donc employer le procédé du nº 99.

105. Le triangle ABC (P. II, F. 28) dans lequel se trouve un angle droit B, est appelé *triangle rectangle.* Les équerres bien faites en sont des exemples. On nomme *hypothénuse* le côté AC opposé à l'angle droit.

Puisque la somme des trois angles d'un triangle donne 180º et que l'angle B est de 90º, *les deux angles aigus A, C d'un triangle rectangle valent ensemble* 90º. Lors donc qu'un tel triangle est symétrique, comme ABC, chacun des angles aigus A, C qui sont égaux, est de 45º.

Construire un triangle rectangle, quand on connaît les deux côtés A, B de l'angle droit, (P. II, F. 29).

Elevez une perpendiculaire au milieu d'une droite quelconque CD (43) ; portez l'un des côtés donnés, A par

* Prononcez *écuilatéral.*

exemple, de E en F, et l'autre B, de E en G; joignant F à G par une droite, vous aurez le triangle rectangle FEG.

Construire un triangle rectangle, quand on connaît l'hypothénuse A et un côté B de l'angle droit (P. II, F. 30).

Élevez une perpendiculaire au milieu d'une droite quelconque CD; portez la longueur B sur l'une ou sur l'autre de ces lignes, à partir de leur intersection E; décrivez du point F ainsi obtenu, un arc qui ait pour rayon la longueur A de l'hypothénuse et qui coupe EC ou ED; joignez à F le point G donné par cet arc, et vous aurez le triangle rectangle FEG.

Comparaison des Triangles.

106. Dans plusieurs cas, on peut prononcer que deux triangles sont égaux ou que l'un couvrirait l'autre exactement, sans avoir besoin d'en mesurer les angles et les côtés.

Deux triangles quelconques, ABC, A'B'C' *sont égaux* (P. II, F. 32).

1° *Quand les côtés de l'un égalent les côtés de l'autre,* c'est-à-dire, lorsque AB=A'B', BC=B'C', CA=C'A';

2° *Quand un angle de l'un égale un angle de l'autre, et que les côtés du premier angle ont mêmes longueurs que ceux du second;* lorsque, par exemple, l'angle A=A', AB=A'B', AC=A'C';

3° *Quand un côté de l'un a même longueur qu'un côté de l'autre, et que les angles formés par le premier côté, égalent ceux qui sont formés par le second;* lorsque, par exemple, BC=B'C', B=B', C=C'.

Il est facile de reconnaître en effet que, dans tous ces cas, le triangle A'B'C' couvrirait exactement ABC, si trois des côtés et des angles qui forment le premier, étaient appliqués sur les trois parties qui leur sont égales dans le second. Observez toutefois qu'au nombre des trois parties doit se trouver un côté; il ne suffit pas que les trois angles d'un triangle soient égaux à ceux d'un autre, pour que ces deux faces puissent se couvrir exactement.

Vous verrez tout aussi facilement que *deux triangles rectangles se recouvrent ou sont égaux, lorsque l'hypothénuse et un petit côté de l'un égalent l'hypothénuse et un petit côté de l'autre.*

En combinant ces principes et les tracés des triangles (99, 100, 101, 105), on parvient aisément à faire de plusieurs manières, un triangle qui soit égal à un triangle donné.

107. Deux triangles peuvent avoir la même superficie, sans pouvoir se couvrir ou sans être égaux. On dit alors qu'ils sont *équivalens*.

Deux triangles quelconques sont équivalens, quand la base et la hauteur de l'un égalent la base et la hauteur de l'autre. Ainsi, deux triangles ABC, ADC (P. II, F. 33) qui ont même base AC, sans avoir les mêmes angles, et dont les sommets B, D se trouvent sur une parallèle à cette base, sont équivalens; car ils ont des hauteurs égales, puisque ces hauteurs sont les perpendiculaires BE, DF comprises entre les parallèles AC, BD (45).

En effet, chaque triangle peut être considéré comme composé de bandes infiniment étroites et disposées parallèlement à la base. Il y a le même nombre de bandes dans les deux figures, attendu que les hauteurs sont égales. De plus, toute bande *ac* de l'un égale la bande correspondante *a'c'* de l'autre; car *ac*, *a'c'* sont contenues dans AC, comme B*e*, D*f* dans la hauteur commune BE ou DF (67), et puisque B*e*=D*f*, on a aussi *ac*=*a'c'*. Les deux superficies se composent donc d'un même nombre d'élémens égaux; elles ont par conséquent, la même étendue ou sont équivalentes.

Construire un triangle qui soit équivalent à un triangle donné ABC.

Il suffit de mener par un sommet B, une droite BD parallèle au côté opposé AC, et de joindre un point quelconque D de cette parallèle, aux extrémités de AC.

Partager un champ triangulaire ABC en un certain nombre de triangles équivalens, 3 par exemple (P. II, F. 34).

Divisez AC, un quelconque des côtés, en autant de parties égales qu'on demande de portions (65); puis, joignez les points de division D, E, au sommet opposé B. Les triangles ABD, DBE, EBC seront équivalens, puisqu'ils auront des bases égales AD, DE, EC et même hauteur BF.

108. *Les superficies de deux triangles de même hauteur se contiennent comme leurs bases.*

Si, par exemple, la base CE du triangle CBE (P. II, F. 34), est contenue 3 fois dans la base AC du triangle ABC, la superficie du premier se trouvera contenue aussi

3 fois dans celle du second; car portant CE autant de fois qu'on le pourra sur AC, et joignant les points de division au sommet B, on formera dans ABC, trois triangles équivalens à CBE (107).

109. *Deux triangles qui renferment un même angle, se contiennent comme les produits des côtés de cet angle.*

Soient les deux triangles ABC, *abc* (P. II, F. 35), tels que l'angle B=*b*. Le premier contient le second comme AB×BC contient *ab*×*bc*. Plaçons *abc* sur ABC, de façon que l'angle *b* couvre son égal B; le petit triangle prendra la position *a*'B*c*'; B*a*' égalera *ba*; B*c*' égalera *bc*, et si nous menons *a*'C, les deux triangles de même hauteur ABC, BC*a*' donneront la proportion (108)

$$ABC : BCa' :: AB : Ba'.$$

Mais les deux triangles BC*a*', B*c*'*a*' ont aussi même hauteur, et conséquemment

$$BCa' : Bc'a' :: BC : Bc'.$$

Multipliant ces deux proportions l'une par l'autre, nous obtiendrons

$$ABC \times BCa' : BCa' \times Bc'a' :: AB \times BC : Ba' \times Bc'.$$

Divisant les deux termes du premier rapport par BC*a*', on a enfin

$$ABC : Bc'a' :: AB \times BC : Ba' \times Bc'.$$

$$\text{ou } ABC : abc :: AB \times BC : ab \times bc.$$

110. Toutes les relations de *similitude* ou ressemblance (97) ont lieu à la fois pour deux triangles ABC, *abc* (P. II, F. 35), et *ces triangles sont par conséquent semblables*, 1° *lorsque deux angles quelconques A, B du grand sont égaux à deux angles* a, b *du petit.* D'abord, le troisième angle C=*c*, puisque chacun est l'excès de 180° sur A+B ou sur *a*+*b*. Ensuite, si l'on place le petit triangle sur le grand, de manière que l'angle *b* couvre B, *ac* prendra la position de *a*'*c*' parallèle à AC, attendu que les angles correspondans *a*' et A sont égaux (47). Conséquemment, *ba* devenu B*a*' est contenu dans BA, comme *bc* devenu B*c*' l'est dans BC, comme *ac* devenu *a*'*c*' l'est dans AC (67).

2°. *Deux triangles sont semblables, lorsque deux côtés quelconques de même rang se contiennent comme deux autres côtés de même rang*, c'est-à-dire quand AB contient *ab*, comme AC contient *ac*, comme BC contient *bc*. Portons *ba* de B en *a*' et *bc* de B en *c*'; alors B*a*' sera contenu dans BA, comme Bc' dans BC, et a'c' se trouvera parallèle à AC. Or il s'ensuivra que AC contiendra a'c', comme AB contient Ba' ou ba. Ainsi a'c' égalera ac, et le triangle Ba'c' égalera abc (106). Mais les angles de Ba'c' égalent ceux de ABC (47); donc il en est de même des angles de abc, et toutes les conditions de similitude sont remplies.

3º *Deux triangles sont semblables, lorsqu'un angle du grand égale un angle du petit, et que les côtés du premier angle contiennent leurs correspondans du second le même nombre de fois;* quand, par exemple, l'angle $B=b$ et que AB contient ab, comme BC contient bc. Plaçons l'angle b sur l'angle B, de manière qu'il le couvre; a tombera en un point a', c en un point c', et le triangle Ba'c' sera égal à bac (106). Mais, parce que AB contiendra Ba' comme BC contient Bc', a'c' se trouvera parallèle à AC (67). Donc AC contient a'c' ou ac, comme AB contient ab; l'angle a' ou a égale A (47); l'angle c' ou c égale C, et toutes les conditions de similitude sont remplies.

4º *Deux triangles sont semblables, lorsque les trois côtés de l'un sont parallèles aux trois côtés de l'autre;* car alors les angles du grand sont égaux à ceux du petit (47), et l'on retombe dans le premier cas.

5º *Deux triangles sont semblables, lorsque les trois côtés de l'un sont perpendiculaires aux trois côtés de l'autre:* il en résulte aussi l'égalité des angles, car si l'on fait tourner l'une des figures, de manière que chacun des côtés exécute un quart de conversion, ces côtés deviennent tous en même tems parallèles à ceux de l'autre triangle.

111. *Deux triangles semblables se contiennent comme les quarrés numériques de deux côtés correspondans.*

Pour les deux triangles semblables ABC, abc (P. II, F. 35), on a (96) $\frac{ABC}{abc}=\frac{AB\times AB}{ab\times ab}$. En effet, l'égalité des angles B, b donne (109) $\frac{ABC}{abc}=\frac{AB\times BC}{ab\times bc}$. Mais il suit de la similitude que $\frac{BC}{bc}=\frac{AB}{ab}$. On peut donc mettre le second de ces rapports à la place du premier. Par conséquent, $\frac{ABC}{abc}=\frac{AB\times AB}{ab\times ab}$.

Ainsi, on n'a pas besoin de mesurer les superficies de deux triangles semblables, pour connaître combien de fois le grand contient le petit: il suffit de mesurer deux côtés correspondans AB, ab, de faire le quarré de chacune de ces longueurs et de diviser le grand quarré par le petit (97).

Si, par exemple, AB=15^{m} et que *ab*=5^{m}, le quarré de AB sera 225; celui de *ab* sera 25. Divisant 225 par 25, vous trouverez 9 pour quotient, et vous en conclurez que le triangle ABC contient 9 fois le triangle *abc*.

Partager un champ triangulaire ABC en 4 portions égales (P. II, F. 36).

Divisez chaque côté en deux parties égales (43); joignez les milieux, par des droites DE, EF, FD; vous formerez quatre triangles, et chacun de ces petits triangles sera le quart du grand.

En effet, DF est parallèle à BC (65); par suite, l'angle ADF égale son correspondant B (47), et comme l'angle A est commun aux triangles ABC, ADF, ces deux figures sont semblables. Or, AB contient 2 fois AD; si donc vous prenez AD pour unité de longueur, AD=1 et AB=2. Par conséquent, le quarré de AB est 4, celui de AD est 1, et ABC contient 4 fois ADF. Vous verrez de même que CEF est le 2^{e} quart de ABC, que BDE en est le 3^{e} quart, et vous conclurez que DEF en est le 4^{e}; ou bien vous reconnaîtrez facilement qu'en vertu des parallèles (66), les 4 petits triangles ayant leurs côtés correspondans égaux, sont égaux (106); d'où il résulte aussi que chacun est le quart de ABC.

Partager un champ triangulaire ABC en 9 portions égales (P. II, F. 37).

Prenez la racine de 9, comme vous avez pris tout-à-l'heure celle de 4, pour savoir en combien de parties égales vous devez diviser les côtés. Cette racine est 3; partagez donc AB, BC, AC chacun en 3 parties égales (65), et joignez les points de division de deux côtés, par des parallèles au troisième; vous formerez ainsi 9 triangles égaux.

Ces deux exemples suffisent pour montrer comment on partage un triangle quelconque en autant de portions égales, que l'exprime le quarré d'un nombre entier.

Réduire un triangle.

C'est souvent la réduction de la superficie qu'on indique, plutôt que celle des côtés, et d'ordinaire cette réduction de la superficie est exprimée par une fraction qui a l'unité pour numérateur et le quarré d'un nombre entier pour dénominateur. Il s'agit, par exemple, de réduire le triangle au $\frac{1}{4}$, au $\frac{1}{9}$, au $\frac{1}{16}$, etc. Dans un tel cas, vous extrairez la racine du dénominateur, vous la donnerez pour dénominateur à l'unité, et la nouvelle fraction indiquera la réduction convenable des côtés. Ainsi, on effectuerait la réduction de la superficie au $\frac{1}{16}$, en opérant celle des côtés au $\frac{1}{4}$, puisque 4 est la racine de 16.

Quant à la réduction des côtés, elle se fait par le procédé décrit dans le nº 68, et l'on construit le triangle demandé, en employant les longueurs réduites, comme le prescrit le nº 99.

Copier un triangle en grand.

Veut-on, par exemple, que la superficie de la copie soit quadruple de celle du modèle ? vous extrairez la racine de 4, et cette racine 2 vous apprendra que les côtés doivent être doublés. Il ne s'agira plus que de recourir au nº 99, pour construire le triangle demandé, avec des droites doubles de celle du triangle donné.

112. *Tout triangle rectangle ABC est partagé en deux triangles qui lui sont semblables, par la perpendiculaire BD abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypothénuse* (P. II, F. 28).

En effet, l'angle A appartient au grand triangle ABC et au petit ADB; l'angle C appartient au grand et au moyen BDC. D'ailleurs, ADB et BDC ont chacun un angle droit, comme ABC (110).

Les deux petits triangles étant semblables au grand, sont évidemment semblables l'un à l'autre.

Le quarré numérique de l'hypothénuse égale la somme des quarrés numériques des deux autres côtés d'un triangle rectangle.

Si, par exemple, le côté BC=4^m^ et que AB=3^m^, le quarré de l'hypothénuse AC sera 25, somme des quarrés 16 et 9 des nombres 4 et 3.

En effet, les trois triangles rectangles ABC, BDC, ADB étant semblables, se contiennent comme les quarrés de leurs hypothénuses (111). Or, le grand triangle est la somme des deux petits. Donc, le quarré de son hypothénuse doit valoir la somme des quarrés des hypothénuses des deux autres triangles, c'est-à-dire des côtés BC, AB de l'angle droit B.

Voilà pourquoi il est prescrit de donner aux cordons du cordeau-équerre (22), des longueurs qui soient entre elles comme 3, 4 et 5. Le quarré 25 du dernier nombre valant la somme des quarrés 9 et 16 des deux premiers, il s'ensuit que le cordeau tendu forme un triangle rectangle dont l'hypothénuse est le plus grand des trois cordons.

Mesurer la longueur de la rampe droite d'un escalier qui doit commencer en A et finir en B (P. II, F. 31).

Cette rampe n'étant pas construite, il n'y a pas lieu d'y appliquer la mesure. On ne peut pas non plus employer une corde tendue de A en B, car le poids d'une corde, si faible qu'il soit, l'empêche de former une ligne droite, toutes les fois qu'elle n'a pas une position verticale. Enfin, le procédé du n° 82 ne donnerait peut-être pas une exactitude suffisante. Vous pourriez, à la vérité, vous servir d'une règle qui serait assez épaisse pour ne pas fléchir sous son propre poids; mais on n'en a pas toujours sous la main, qui soit telle et assez longue. Il est donc bon de savoir calculer la longueur d'une ligne inclinée AB, au moyen de la longueur horizontale AC et de la hauteur verticale BC, qu'il est toujours facile de mesurer.

La verticale du point B et l'horizontale AC qu'elle rencontre, sont d'équerre et forment conséquemment avec AB un triangle rectangle. Faites donc le quarré de la longueur AC et le quarré de la longueur BC; additionnez ces deux quarrés, pour avoir celui de l'hypothénuse AB; puis extrayez la racine de la somme; cette racine sera la longueur de AB. La formule de ce mode de mesurage est $H=\sqrt{C\times C+C'\times C'}$, dans laquelle C et C' représentent les côtés de l'angle droit. Le signe $\sqrt{}$ indique qu'il faut extraire la racine quarrée de la quantité placée dessous.

Si, par exemple, $AC=12^{m}$, et que $BC=9^{m},5$, la formule donne $H=\sqrt{12^{m}\times 12^{m}+9^{m},5\times 9^{m},5}=\sqrt{144^{mm}+90^{mm},25}$ $=\sqrt{234^{mm},25}=15^{m},30522$, pour la longueur de l'hypothénuse ou de la rampe AB (96). Aucun autre mesurage ne la ferait connaître avec un pareil degré d'exactitude.

C'est ainsi qu'on peut trouver la longueur de l'hypothénuse du triangle rectangle, toutes les fois que les longueurs des deux côtés de l'angle droit sont connues. Il serait plus exact d'achever par ce moyen le mesurage d'une rampe qui ne pourrait être parcourue, que d'employer le procédé prescrit dans le n° 82.

On veut faire, avec des planches de 6 mètres, un auvent qui abrite une largeur de 5ᵐ; quelle est la pente à donner?

Si vous supposez que l'horizontale AC ait 5^{m} (P.II, F.31) et que la ligne inclinée AB ait 6^{m}, la verticale BC sera la pente totale du toit à construire, et il s'agira de calculer la longueur de cette verticale. Or, le triangle ACB est rectangle, et par conséquent, le quarré de l'hypothénuse AB égale le quarré de AC, plus le quarré de BC. Donc, ce dernier quarré est la différence des deux autres. Retranchez donc de 36^{mm}, quarré de AB, le quarré 25^{mm} de AC, vous aurez pour reste 11^{mm} qui sera le quarré de BC. Extrayant la racine de 11^{mm} jusqu'aux millièmes, vous trouverez $3^m,316$ pour la pente totale BC. La pente pour 1^m, serait le cinquième de $3^m,316$, puisque $AC=5^m$. Si donc les poteaux qui soutiendrout le bout A des planches doivent avoir 2^m, le bout B devra être placé à $5^m,316$ du sol.

Voilà qui vous montre comment il faut calculer la longueur de l'un des petits côtés de tout triangle rectangle, quand on connaît celle de l'autre et celle de l'hypoténuse. La formule de ce mesurage est $C=\sqrt{(H\times H-C'\times C')}$.

On se propose de bâtir une maison dans l'angle B de deux chemins d'équerre (P. II, F. 28); *la façade qui regardera le sommet B, aura* 15 *mètres de longueur et devra faire le même angle avec les deux directions BA, BC. A quelles distances de B faut-il marquer les extrémités de cette façade, pour qu'elles soient sur les bords des deux chemins ?*

La façade AC formera avec les directions BA, BC, un triangle symétrique, puisque les deux angles A, C doivent être égaux (102). Les longueurs BA, BC seront donc égales, et comme le triangle ABC est rectangle, le quarré de AC vaudra le double de celui de BA, par exemple, ou bien le quarré de BA sera la moitié du quarré de 15^m. Or, le quarré de 15^m est 225^{mm}. Prenant la moitié, vous aurez $112^{mm},5$; extrayant la racine jusqu'aux millièmes, vous trouverez $10^m,606$ pour la distance BA et pour la distance BC. La droite qui joindra les points A, C ainsi déterminés, aura 15^m à 1 millimètre près.

Ce calcul est un exemple de celui qu'il faut faire, toutes les fois qu'il s'agit de trouver les petits côtés d'un triangle symétrique et rectangle dont on connaît l'hypothénuse. La formule de ce mesurage est $C=\sqrt{\frac{H\times H}{2}}$.

QUADRILATÈRES.

Toute face qui est limitée par quatre lignes droites, se nomme *quadrilatère* (*). Il n'y a rien de particulier à dire sur les quadrilatères dont les côtés opposés se coupent

(*) Prononcez *couadrilatère*.

quand on les prolonge; mais souvent ces côtés opposés sont parallèles, et les formes qui en résultent méritent l'attention, à cause de leur emploi dans les arts.

Trapèze.

113. Un quadrilatère ABCD (P. II, F. 39) qui a deux côtés parallèles AB,CD, est appelé *trapèze*; le plus grand CD de ces côtés en est la *grande base*, et le plus petit AB, la *petite base*. Lorsque les côtés concourans AD, BC, sont égaux, le trapèze est dit *symétrique*. Cette dernière forme se rencontre dans les toits appelés *mansardes*, dans la *clef* d'une plate-bande en pierres taillées, dans les assemblages en *queue d'aronde*, etc.

Tracer un trapèze symétrique dont on connaît la grande base B, la hauteur H et la longueur L des côtés concourans (P. II, F. 39).

Tirez une droite et portez-y la base B de C en D; élevez une perpendiculaire au milieu de CD, ou en tout autre point (43); prenez EF=H; menez par F une parallèle à CD; puis décrivez des points C, D, avez L pour rayon, deux arcs qui coupent cette parallèle chacun en deux points, et joignez aux extrémités de la base CD, les intersections A, B, les plus voisines de F; vous aurez le trapèze symétrique ABCD.

Si au lieu de la longueur des côtés concourans, on connaissait la petite base, il faudrait en chercher la moitié (62), puis porter cette moitié sur AD, à droite et à gauche de F.

Si au lieu de la grande base, c'était la petite qui fût donnée, avec la longueur L et la hauteur H, vous devriez joindre aux points C, D, les intersections G, H les plus éloignées de F. Le résultat serait alors le trapèze CDHG.

Ces divers cas vous montrent qu'il faut trois choses pour *déterminer* un trapèze symétrique, c'est-à-dire, pour construire une face de cette forme, dans laquelle il n'entre rien d'arbitraire.

Parallélogramme.

114. Un quadrilatère ABCD (P. II, F. 40) dont les côtés opposés sont parallèles, est nommé *parallélogramme*. La hauteur de cette figure est la distance de deux côtés opposés; la base est alors l'un de ces côtés.

Les côtés parallèles d'un parallélogramme ont même longueur: AB=CD, AD=BC (66).

Les diagonales AC, BD sont inégales, car elles appartiennent à deux triangles ABC, BCD, tels que les deux autres côtés de l'un égalent les deux autres côtés de l'autre, et la première AC est opposée à un angle aigu B, tandis que la seconde BD est opposée à un angle obtus C.

Enfin, *les diagonales d'un parallélogramme se coupent par le milieu.* Effectivement, AD=BC, les angles DAE et BCE, ADE et CBE sont égaux comme alternes-internes, et par conséquent, le triangle AED = le triangle BCE; d'où il suit que AE opposé à l'angle D, et CE côté correspondant, sont de même longueur, qu'il en est de même de DE, BE, et que l'intersection E des deux diagonales se trouve au milieu de chacune.

Tracer un parallélogramme dont la hauteur H et les côtés B, B′ sont donnés (P. II, F. 40).

Tirez une droite et portez-y le côté B, de D en C; élevez une perpendiculaire en un point quelconque de CD (38); portez H de F en G; menez par le point G, une parallèle à CD; puis décrivez des points C, D, avec B′ pour rayon, deux arcs qui coupent la parallèle en deux points chacun, et joignez à C, D, les intersections A, B situées à droite des centres ou les intersections H, I situées à gauche. Vous aurez le parallélogramme ABCD ou le parallélogramme CDIH qui remplira les conditions.

Tracer un parallélogramme dont on connaît un angle A et les deux côtés B, C qui forment cet angle (P. II, F. 41).

Faites un angle E égal à l'angle donné A (27); portez la longueur B, sur l'un des côtés de cet angle, de E en F, et la longueur C sur l'autre côté, de E en G; décrivez un arc, de F, avec C pour rayon, et de G, avec B, un second arc qui coupe le premier en H; joignez enfin ce point H à F et à G. La figure EFHG sera un parallélogramme, et de plus elle sera le seul qu'on puisse faire avec les données du problème.

Vous voyez, par ces deux exemples, que la détermination d'un parallélogramme exige trois choses.

Losange.

115. Un parallélogramme ABCD (P. II, F. 42) dont les quatre côtés sont égaux et obliques les uns sur les autres, s'appelle *losange*.

Les diagonales inégales d'un losange se coupent par le milieu et d'équerre. Elles se coupent par le milieu, comme diagonales d'un parallélogramme (114), et conséquemment AE=EC. Les deux triangles AEB, CEB sont donc égaux (106). Par suite, l'angle AEB=BEC, et ces deux angles sont droits (50).

Tracer un losange dont on connaît le côté L et une diagonale M.

Tirez une droite et portez-y la diagonale M, de A en C; puis, des points A, C, avec L pour rayon, décrivez deux arcs qui se coupent en deux points B, D, et tirez les quatre rayons déterminés par ces intersections. Vous aurez le losange ABCD qui satisfera aux conditions. Ainsi, deux choses suffisent pour particulariser un losange: ces deux choses pourraient être encore les diagonales ou un angle et un côté.

Rectangle.

116. Un parallélogramme ACDE (P. II, F. 43) dont les angles sont droits et les côtés voisins inégaux, se nomme *rectangle*; de deux côtés d'équerre CD, CA, l'un est la base et l'autre la hauteur du rectangle; les diagonales sont égales et se coupent obliquement par le milieu.

L'égalité des diagonales AD, CE résulte de celle des triangles rectangles ACD, CDE; ces triangles sont égaux, parce que AC=DE et que le côté CD leur est commun (106).

L'obliquité des mêmes diagonales l'une sur l'autre, provient de l'inégalitè des côtés d'équerre AC, CD; car si AC est moindre que CD, par exemple, les angles ADC, ECD ont une indication commune au-dessous de 45° (105), et conséquemment l'angle CFD surpasse 90° (98).

Tracer un rectangle dont on connaît la base B et la hauteur H.

Tirez une droite et portez-y la base B, de C en D; élevez au point C ou au point D, une perpendiculaire (58), et prenez DE=H; menez par E une parallèle à CD et par C une parallèle à DE, ou bien décrivez un arc, de E, avec B pour rayon, et de C, avec H, un autre arc qui coupe le premier. L'intersection A des parallèles ou des arcs achèvera le rectangle ACDE.

Deux choses suffisent donc pour déterminer un rectangle: on pourrait donner aussi une diagonale avec la base ou la hauteur, et dans ce cas, vous trouveriez la hauteur ou la base par le second procédé du nº 105.

Carré.

117. Un parallélogramme dont les angles sont droits et les quatre côtés égaux, se nomme *carré:* ce polygone est le quadrilatère régulier. La figure ABCD (P. II, F. 44) présente un carré ; sa base CD et sa hauteur AD ont même longueur ; *les diagonales sont égales et se coupent d'équerre par le milieu.*

Les diagonales sont égales, parce que le carré est un cas particulier du rectangle (116), et elles se coupent d'équerre, parce que le carré est un cas particulier du losange (115).

Tracer un carré dont le côté L est connu.

Opérez comme pour faire un rectangle dont la base et la hauteur seraient égales à L (116) ; ou bien, tracez deux droites AC, BD, qui se coupent à angles droits (43) ; décrivez de leur intersection E, avec un rayon quelconque, un arc qui les rencontre aux points F, G ; portez L sur la droite FG, de F en H ; menez par H une parallèle à BD, jusqu'à AC ; menez par A une parallèle à FH, jusqu'à BD. Vous aurez AB=FH=L (66), et il vous restera à porter EA, de E en C et en D. La figure ABCD, ainsi tracée, sera un carré, car EA=EB, comme EG=EF (67).

Tracer un cercle autour d'un obstacle qui empêche de marquer le centre ou de faire circuler un cordeau.

Construisez autour de l'obstacle, un carré ABCD dont le côté égale le diamètre du cercle à tracer (P. II, F. 45) ; divisez chaque côté en douze parties égales (65) ; numérotez celles de AB, CD, en allant des extrémités au milieu, et celles de AD, BC, en allant du milieu aux extrémités ; joignez ensuite chaque point de division d'un demi-côté, à celui qui porte le même numéro sur la première moitié du côté suivant ; par exemple, le point 6 qui avoisine A sur AD, au point 6 de AB ; le point 5 de A1, moitié de AD, au point 5 de A6, première moitié du côté suivant AB, etc. L'intersection des droites 1.1 et 2.2, celle de 2.2 et de 3.3, celle de 3.3 et de 4.4, etc., seront des points d'une courbe très-peu différente d'un cercle qui aurait son centre à l'intersection des diagonales du carré et toucherait les quatre côtés à leurs points milieux 1, 1, 6, 6. Pour tracer cette courbe, il vous suffira d'en joindre les différens points, par des arcs faits à la main ;

ou bien vous planterez des piquets près de ces points, les uns en dedans de quelque peu, les autres de quelque peu en dehors; vous engagerez de champ une règle ployante entre les piquets, et enfin vous ferez glisser le long de la règle une pointe à tracer.

Planter des arbres en quinconce.

Tracez deux droites d'équerre AB, AD (P. II, F. 46); portez sur l'une et sur l'autre, autant de fois l'intervalle de deux arbres, que vous voulez d'allées dans les deux sens perpendiculaires; achevez le rectangle ou le carré ABCD; portez le même intervalle sur les côtés BC, CD, autant de fois que les deux autres côtés le contiennent; puis joignez les points de division opposés; vous aurez des parallèles qui se couperont d'équerre et formeront des carrés. C'est aux intersections de toutes ces droites, sommets des carrés, que doivent être plantés les arbres: ils seront disposés en quinconce, c'est-à-dire qu'ils formeront des allées dans tous les sens.

Comparaison des quadrilatères.

118. Deux quadrilatères quelconques ABCD, A'B'C'D' sont égaux (P. II, F. 47), si la diagonale AC de l'un le partage en deux triangles ABC, ACD égaux aux triangles A'B'C', A'C'D', que la diagonale A'C' forme dans l'autre. Or, le triangle ABC=A'B'C', quand les côtés du premier égalent les côtés du second; le triangle ACD=A'C'D' dans la même circonstance (106). Nous pouvons donc dire, en principe, que *deux quadrilatères quelconques sont égaux lorsque les côtés et une diagonale de l'un égalent les côtés de même rang et la diagonale correspondante de l'autre.* Ainsi, quand vous aurez reconnu que AB=A'B', BC=B'C', CD=C'D', DA=D'A' et que AC=A'C', vous pourrez affirmer que la face ABCD=A'B'C'D'.

Construire un quadrilatère qui soit égal à un quadrilatère donné ABCD.

Il suffit de tirer la diagonale AC et de construire sur une droite A'C'=AC, deux triangles A'B'C', A'C'D' qui soient égaux aux triangles ABC, ACD (99, 100, 101).

119. *Deux trapèzes quelconques sont égaux, lorsque les côtés de l'un égalent les côtés correspondans de l'autre.* Ainsi, pour cette sorte de quadrilatères, il n'est pas nécessaire de reconnaître si l'une des diagonales a même longueur dans les deux figures. Cela provient de ce qu'en

opérant sur la grande base de l'un, avec les côtés concourans de l'autre, comme dans le nº 113, la petite base du second devrait couvrir exactement celle du premier, pour pouvoir être placée entre les deux arcs; alors les deux figures se confondraient.

120. *L'égalité des parallélogrammes quelconques a lieu dans les mêmes circonstances que celle des quadrilatères.* Par conséquent, pour les losanges, qui sont des parallélogrammes et dont les quatre côtés ont même longueur (115), *il y a égalité, quand le côté et une diagonale de l'un égalent le côté et une diagonale de l'autre.*

Partager un parallélogramme en un certain nombre de portions égales.

Il suffit de diviser deux côtés opposés en autant de parties égales qu'on veut de portions, et de joindre les points de division correspondans; car vous formez ainsi de petits parallélogrammes égaux, en nombre égal à celui des portions, puisque les côtés de chacun sont égaux aux côtés de même rang des autres et que les diagonales correspondantes étant parallèles, sont de même longueur (66).

Deux parallélogrammes sont équivalens, lorsqu'il y a égalité entre les bases et entre les hauteurs; car la diagonale de l'un le divise en deux triangles équivalens à ceux que forme la diagonale de l'autre (107). Ainsi, un parallélogramme et un rectangle qui, ne pouvant pas se couvrir exactement, ne sont point égaux, peuvent pourtant renfermer la même superficie.

Deux parallélogrammes qui ont seulement des bases égales, se contiennent comme leurs hauteurs. Si l'une des figures a une hauteur double ou triple de la hauteur de l'autre, sa superficie est aussi double ou triple de la superficie de cette autre; car on peut former dans le grand deux ou trois parallélogrammes équivalens au petit.

Deux parallélogrammes qui ont seulement des hauteurs égales, se contiennent comme leurs bases. Il suffit donc de mesurer et de comparer ces bases, pour comparer les superficies. Ainsi, dans le cas où l'une des bases serait de 2 mètres et l'autre de 3^m, le parallélogramme qui aurait la première base, serait les $\frac{2}{3}$ de celui qui aurait la seconde. On pourrait effectivement former dans la petite figure deux parallélogrammes, et dans la grande trois qui seraient équivalens entre eux.

121. L'égalité des rectangles a lieu dans les mêmes

circonstances que celle des trapèzes; mais comme les côtés opposés d'un rectangle sont égaux, on peut dire aussi qu'*il y a égalité entre deux rectangles, quand elle existe entre leurs bases et entre leurs hauteurs*. Du reste, il en est des rectangles qui ont seulement des bases égales ou seulement des hauteurs égales, comme des parallélogrammes quelconques, dans les mêmes cas, puisque le rectangle a tous les caractères du parallélogramme (116).

Deux carrés sont égaux dans les mêmes circonstances que les rectangles; mais comme la base et la hauteur d'un carré sont égales, on peut dire aussi que *deux carrés sont égaux, si le côté de l'un égale celui de l'autre.*

Partager un rectangle ou un carré en un certain nombre de portions égales.

Il suffit de diviser deux côtés opposés en autant de parties égales, qu'on veut de portions, et de joindre les points de division correspondans; car vous formez ainsi de petits rectangles, en nombre égal à celui des portions; ils ont la même longueur pour base, un des côtés de la grande figure pour hauteur, et par conséquent même superficie.

Mesurage des quadrilatères et des triangles.

122. L'unité de mesure des superficies est la superficie d'un carré qui a pour côté l'unité de mesure des longueurs. Si ce côté est un pouce, l'unité de superficie est dite *pouce carré*, ce qui signifie *carré d'un pouce de côté*; si le côté est d'un pied, on a le *pied carré*; s'il est d'une toise, d'une lieue, etc., il donne la toise *carrée*, la *lieue carrée*, etc.

L'ancienne *perche carrée* présentait un carré dont le côté était la perche linéaire ou des longueurs, qui avait 22 pieds. Un carré dont le côté contenait 10 perches linéaires ou 220 pieds, formait l'arpent des Eaux-et-forêts.

On employait aussi autrefois des rectangles, pour unités des superficies: la *toise-ligne* était un rectangle qui avait une toise de base sur une ligne de hauteur; la *toise-pouce* était un rectangle qui avait une toise sur un pouce; la *toise-pied* était un rectangle qui avait une toise sur un pied.

Le carré qui sert à mesurer les superficies, selon le système métrique ou décimal, se nomme *millimètre carré*, si le côté est un millimètre; *centimètre carré*, si le côté est un centimètre; *décimètre carré*, si le côté est un décimètre; *mètre carré* ou *centiare*, si le côté est un mètre; *décamètre carré* ou *are* ou *perche métrique*, si le côté a 10 mètres; *hectomètre carré* ou *hectare* ou *arpent métrique*, si le côté a 100 mètres; *kilomètre carré* ou *myriare*, si le côté a 1000 mètres, enfin *myriamètre carré*, si le côté a 10000 mètres.

On emploie aussi des rectangles métriques, pour unités de superficie; les uns ont un mètre pour base et un millimètre ou un centimètre ou un décimètre pour hauteur; les autres ont un décamètre pour base, et un mètre ou un décimètre pour hauteur.

123. Quelle que soit l'unité de superficie, un rectangle la contient autant de fois que l'exprime le produit de la base, mesurée avec la base de cette unité, multipliée par la hauteur, mesurée avec la hauteur de la même unité; en d'autres termes, *la superficie d'un rectangle égale le produit de la base par la hauteur*. Ce principe a pour formule $R = B \times H$.

Supposons d'abord que l'unité de superficie soit un carré, et prenons pour exemple le rectangle ABCD (P. II, F. 46). Si le côté du carré est contenu 6 fois dans la base CD, nous obtiendrons 6 bandes rectangulaires, en traçant des parallèles à CB, par les points de division; et si le même côté est contenu 8 fois dans la hauteur AD, nous diviserons chacune des 6 bandes en 8 carrés égaux, au moyen de parallèles à AB, menées par les points de division de AD. Or, il est clair que pour avoir le nombre total 48 des carrés du rectangle, il suffit de répéter le nombre des carrés d'une bande, autant de fois qu'il y a de bandes, et cela revient à multiplier 8, longueur de la hauteur AD mesurée avec le côté du carré, par 6, longueur de la base CD mesurée avec le même côté.

Si donc vous voulez mesurer en mètres carrés la superficie d'un rectancle tel que ABCD, vous mesurerez sa base et sa hauteur avec le mètre linéaire, et vous ferez le produit des deux longueurs trouvées. Si vous voulez obtenir la même superficie en toises carrées, vous mesurerez la base et la hauteur avec la toise linéaire, et vous ferez aussi le produit des deux longueurs trouvées.

Supposons maintenant que l'unité de superficie soit un rectangle dont la base ait une longueur *b* et la hauteur une longueur *h* (P. II, F. 48). Supposons encore que la base AB du rectangle ABCD à mesurer, contienne 3 fois *b*, et que la hauteur AD contienne 4 fois *h*. Des parallèles à AD menées par les points de division de AB, donneront 3 bandes rectangulaires qui auront chacune b pour base et AD pour hauteur ; des parallèles à AB menées par les points de division de AD, partageront chacune de ces bandes en 4 petits rectangles qui auront chacun b pour base et h pour hauteur. Or, pour connaître le nombre total 12 de ces petits rectangles, il suffit de répéter le nombre de ceux d'une bande, autant de fois qu'il y a de bandes, et cela revient à multiplier 4, longueur de la hauteur AD mesurée avec h, par 3, longueur de la base AB mesurée avec b.

Si donc il s'agissait de mesurer en toise-pieds la superficie d'un rectangle tel que ABCD, vous mesureriez sa base AB avec la toise et sa hauteur AD avec le pied : le produit des deux longueurs trouvées vous donnerait le nombre de toise-pieds demandé. S'il fallait obtenir la même superficie en rectangles d'un mètre de base, sur un décimètre de hauteur, vous mesureriez AB en mètres et AD en décimètres : le produit serait le nombre des petits rectangles contenus dans le grand.

124. Ce qui vient d'être dit du mesurage d'un rectangle, s'applique aussi à celui d'un carré, puisque le carré n'est qu'un cas particulier du rectangle. Il s'ensuit que la toise carrée contient 36 pieds carrés, car les deux côtés de la toise carrée contiennent chacun 6 pieds linéaires, et $6 \times 6 = 36$. Pour une raison analogue, le pied carré vaut 144 pouces carrés, le pouce carré vaut 144 lignes carrées, la perche carrée vaut 484 pieds carrés, l'arpent vaut 100 perches carrées (122).

Vous voyez aussi que le myriamètre carré contient 100 kilomètres carrés ou myriares, puisque le myriamètre linéaire vaut 10 kilomètres linéaires. Pour la même raison, le myriare vaut 100 hectares, l'hectare vaut 100 ares, l'are vaut 100 centiares ou mètres carrés, le mètre carré vaut 100 décimètres carrés, le décimètre carré vaut 100 centimètres carrés, et le centimètre carré vaut 100 millimètres carrés.

Le principe du nº 123 montre encore que la toise carrée renferme 6 toise-pieds, que la toise-pied équivaut à 12 toise-pouces ou à 6 pieds carrés, et que la toise-pouce fait 12 toise-lignes ou 72 pouces carrés.

Quant aux rectangles métriques, chacun est le dixième de celui qui a une hauteur décuple de la sienne ; le rectangle d'un mètre de base et d'un millimètre de hauteur, par exemple, est le dixième du rectangle d'un mètre de base et d'un centimètre de hauteur. Il s'ensuit que le mètre carré vaut 10 mètre-décimètres. Il est visible d'ailleurs que le mètre-décimètre contient 10 décimètres carrés, que le mètre-centimètre contient 100 centimètres carrés, etc.

125. *Mesurer un rectangle en mètres carrés et parties rectangulaires ou décimales du mètre carré.*

Mesurez sa base et sa hauteur en mètres et parties du mètre. La première contiendra, par exemple, $5^m,455$ et la seconde $2^m,52$. Vous multiplierez ces deux nombres l'un par l'autre ; le produit $8^{mm},0156$ indiquera que la superficie du rectangle vaut 8 mètres carrés et 156 dix-millièmes de mètre carré, ou 8 mètres carrés, 1 mètre-centimètre, 5 mètre-millimètres et 6 dixièmes de mètre millimètre (124).

Remarquez que les mètres carrés se désignent par deux *m*.

126. *Mesurer un rectancle en mètres carrés et parties carrées.*

Mesurez la base et la hauteur en mètres et parties du mètre. Si, comme dans le cas précédent, la première contient $5^m,455$, et la seconde $2^m,52$, vous multiplierez aussi ces deux nombres l'un par l'autre. Le produit $8^{mm},0156$ indiquera que la superficie du rectangle renferme 8 mètres carrés, un décimètre carré, et 56 centimètres carrés (124).

Cela vous montre que le second mesurage se fait absolument comme le premier ; seulement, *pour obtenir les parties carrées ou centésimales du mètre carré, il faut partager en groupes de deux chiffres, à partir de la virgule, les décimales qui accompagnent le nombre de mètres carrés.* Si le dernier groupe à droite n'avait qu'un chiffre, vous le compléteriez en écrivant un zéro à la suite de ce chiffre.

127. *Mesurer un rectangle en hectares.*

Mesurez la base et la hauteur au moyen de la chaîne métrique. Cette chaîne est un décamètre linéaire : elle a 10 mètres, mesure prise depuis l'extrémité intérieure d'une des *poignées* en fer qui la terminent, jusqu'à l'extrémité intérieure de l'autre. Comme les chaînons dont elle est formée, ont 5 décimètres chacun, et que les mètres y sont marqués par des anneaux de laiton, elle permet d'apprécier les mètres et même les décimètres que contient une longueur, en sus d'un certain nombre de décamètres.

Supposons donc qu'à l'aide d'une chaîne nouvelle, vous avez trouvé 15 décamètres, 4 mètres, 5 décimètres, ou $15^{Dm},45$ pour la base du rectangle, et 9 décamètres, 3 mètres, 2 décimètres, ou $9^{Dm},32$ pour la hauteur.

Vous multiplierez l'un par l'autre, les deux nombres $15^{Dm},45$ et $9^{Dm},32$. Le produit $143^{a},9940$ indiquera que le rectangle contient 143 décamètres carrés ou ares, 99 centiares et 40 centièmes de centiares (124).

Mais, on néglige ordinairement les fractions du centiare; par conséquent, le rectangle donné vaut 143 ares et 99 centiares, ou 1 hectare, 43 ares, 99 centiares.

Si vous négligiez les décimètres de la base et de la hauteur, vous ne trouveriez que 1 hectare, 43 ares et 22 centiares. Il y aurait donc une errreur en moins de 77 centiares, erreur beaucoup trop grande pour qu'on s'expose à la commettre.

Ainsi, *pour mesurer un rectangle en hectares, il faut mesurer la base et la hauteur en décimètres, multiplier les deux longueurs l'une par l'autre, séparer 6 décimales et barrer les deux dernières.*

En suivant cette règle, vous auriez, dans l'exemple précédent, à multiplier 1545^{dm} par 932^{dm}; vous mettriez une virgule entre le 6^{e} et le 7^{e} chiffre du produit 1439940; vous effaceriez les deux premiers à droite, et vous obtiendriez $1^{ha},4399$.

128. *Mesurer un rectangle en toises carrées et parties carrées de la toise carrée.*

Supposons que la base du rectangle soit de $5^{t}\ 4^{pi}$ et que la hauteur ait $2^{t}\ 0^{pi}\ 8^{po}\ 10^{li}$. Vous convertirez ces deux longueurs en unités de la plus petite des espèces qu'elles renferment, en lignes par conséquent. Elles donneront, la première 4896^{l}, la seconde 1834^{li}. Multipliant l'un par l'autre ces deux nombres de lignes, vous trouverez $8979264^{l.l}$ pour la superficie du rectangle, et il vous restera à chercher combien ce nombre de lignes carrées forme de pouces carrés, de pieds carrés et de toises carrées. A cet effet, vous diviserez $8979264^{l.l}$ par $144^{l.l}$ valeur d'un pouce carré; le quotient donne exactement $62356^{p.p}$; il n'y a donc pas de lignes carrées dans le rectangle proposé. Divisant ensuite le nombre de pouces carrés par $144^{p.p}$ valeur d'un pied carré, vous obtiendrez $4^{p.p}$ pour reste et $433^{p.p}$ pour quotient. Divisant enfin le nombre de pieds carrés par $36^{p.p}$ valeur d'une toise carrée, vous trouverez pour reste $1^{p.p}$ et pour quotient 12^{tt}. Ainsi, le nombre $8979264^{l.l}=12^{t.t}\ 1^{p.p}\ 4^{p.p}$, ou bien la superficie du rectangle vaut 12 toises carrées, 1 pied carré et 4 pouces carrés.

129. ***Mesurer un rectangle en toises carrées et parties rectangulaires de la toise carrée.***

Supposez que la base du rectangle soit, comme dans le cas précédent, $5^t\ 4^{pi}$ et que la hauteur ait aussi $2^t\ 0^{pi}\ 8^{po}\ 10^{li}$. Vous ferez le produit de ces deux longueurs, par une multiplication complexe, en considérant le multiplicande $2^t\ 0^{pi}\ 8^{po}\ 10^{l}$, par exemple, comme exprimant des toises carrées, des toise-pieds, des toise-pouces, des toise-lignes, et en observant que la toise-pied vaut $\frac{1}{6}$ de la toise carrée, que la toise-pouce vaut $\frac{1}{12}$ de la toise-pied, que la toise-ligne vaut $\frac{1}{12}$ de la toise pouce (124). Voici l'opération :

	$2^{t.t}$	$0^{t.pi}$	$8^{t.po}$	$10^{t.l}$	
	5^{t}	4^{pi}			
Pour 5 toises.	$10^{t.t}$				
		$5^{t.pi}$	$4^{t.p}$		
			4	$2^{t.l}$	
Pour 3^{pi} ou $1/2$ toise. .	1	0	4	5	
Pour 1^{pi} ou $1/3$ de 3^{pi} .		2	1	5	$2/3$
	$12^{t.t}$	$0^{t.pi}$	$2^{t.po}$	$0^{t.l}$	$2/3$

Le résultat est exactement égal au précédent $12^{t.t}\ 1^{p.p}\ 4^{p.p}$, car une toise-ligne vaut $864^{l.l}$ dont les $\frac{2}{3}$ font $576^{l.l}$ ou $4^{p.p}$; $1^{t.po}$ vaut $72^{p.p}$, et $2^{t.po}$ valent $144^{p.p}$ ou $1^{p.p}$.

Remarquez que je n'ai point fait de produits auxiliaires, pour passer des toises carrées aux toise-pouces, puis aux toise-lignes. J'ai dit 5 fois $8^{t.po}$ font $40^{t.po}$ qui, divisées par 12, donnent $3^{t.pi}$ et $4^{t.po}$; 5 fois $10^{t.l}$ font $50^{t.l}$ qui, divisées par 12, donnent $4^{t.po}$ et $2^{t.l}$. On arriverait toutefois au même résultat, en faisant des produits auxiliaires.

130. ***Mesurer un rectangle en arpens et perches carrées.***

A l'aide de la perche linéaire, ancienne chaîne d'arpenteur, longue de 22^{pi}, vous trouverez, par exemple, 23 perches 5^{pi} dans la base et $12^{p}\ 18^{pi}$ dans la hauteur. Faites une multiplication complexe avec ces deux nombres, en regardant le multiplicande comme exprimant des perches carrées et des perche-pieds, observant qu'il y a 22 perche-pieds dans une perche carrée, et décomposant les pieds en 11, plus un certain nombre de fois 2, plus 1. Vous trouverez ainsi $297^{pp}\ 15^{ppi}\ \frac{13}{44}$.

Ayant le nombre des perches carrées, il ne s'agit plus que de séparer les deux premiers chiffres à droite, dans la partie entière, pour avoir le nombre des arpens (124). La superficie demandée est donc à-peu-près $2^{arp}\ 97^{pp}\ 15^{ppi}$.

131. ***Combien faut-il de rouleaux de papier à ten-***

ture, pour couvrir un pan de mur qui n'a aucune ouverture, dont la longueur est 3m,55 *et dont la hauteur est* 2m,80?

La superficie du mur est 3m,55×2m,80=9mm,94. Un rouleau de papier contient 24 feuilles qui ont environ 0m,35 de hauteur sur 0m,46 de largeur. La longueur du rouleau est donc 0m,35×24=8m,40. Comptons seulement 8m,20 à cause des rognures. La superficie d'un rouleau sera 8m,20×0m,46=3mm,77, car le rouleau développé est un rectangle, comme le pan de mur. Cherchant combien de fois 9mm,94 contiennent 3mm,77, nous trouverons qu'il faut 2,64 rouleaux ou à-peu-près 2 rouleaux et 16 feuilles.

Cet exemple vous montre que *pour comparer deux rectangles quelconques, on doit calculer leurs superficies en unités de même espèce et diviser celle du plus grand par celle du plus petit;* le quotient indique combien de fois le premier contient le second.

132. *Un rectangle a* 4m *de base et* 1m,2 *de hauteur. On veut en faire un autre qui soit équivalent à celui-là, et qui n'ait que* 3m *de base; quelle hauteur doit-on lui donner?*

Le rectangle dont la hauteur est connue a 4mm,8 de superficie. L'autre devant être équivalent à celui-là, aura aussi une superficie de 4mm,8. Or, ce nombre doit égaler le produit de la base 3m multipliée par la hauteur inconnue. Si donc vous divisez 4mm,8 par 3m, vous trouverez cette hauteur pour quotient. Ainsi, le nouveau rectangle devra avoir 1m,6 de hauteur.

133. Tout ce qui a été dit du mesurage des rectangles, s'applique entièrement à celui des carrés. Mais, comme la base et la hauteur d'un carré sont égales, il suffit, pour calculer la superficie d'une telle figure, de mesurer un des côtés et de multiplier par elle-même la longueur trouvée. Ainsi, un carré dont le côté serait de 4m,7, aurait 22mm,09 de superficie. Or, ce nombre 22,09 qui résulte de 4,7×4,7 est le quarré du côté (96). De là ce principe: *la superficie d'un carré égale le quarré numérique du côté.*

Représentant un carré quelconque par C et la longueur du côté par L, on a pour formule C=L×L.

134. *Faire un carré qui soit équivalent à la somme de plusieurs autres.*

Soient A, B, C les carrés donnés (P. II, F. 49). Vous tracerez deux droites d'équerre (43); vous porterez sur l'une le côté du carré A, de D en E, et sur l'autre le côté du carré B, de D en F. Le carré qui serait fait sur EF, vaudrait la somme des carrés A, B, puisque les superficies sont exprimées par les quarrés des côtés (133), et que le quarré de la longueur EF égale la somme des quarrés des longueurs DE, DF (112). Elevez maintenant une perpendiculaire à l'une des extrémités de EF, au point E, par exemple (39 ou 40), et portez-y le côté de C, de E en G. La droite FG sera le côté d'un carré qui vaudra la somme de C et du carré fait sur EF. Si donc vous faites un carré avec FG (117), il sera équivalent à la somme des trois carrés donnés.

Vous pourriez évidemment, par le même moyen, doubler ou tripler un carré : il suffirait de prendre les longueurs DE, DF, EG, égales chacune au côté du carré donné.

135. *On a besoin pour construire des bâtimens, d'un espace carré qui renferme* 273,529^{mm}; *quel est le côté de ce carré?*

Le nombre 273529 est le quarré de la longueur du côté (133). Il faut donc en extraire la racine, pour connaître cette longueur. En opérant comme il est prescrit dans le n° 96, on trouve que le côté du carré doit avoir 523^{m}. Vous construiriez la figure soit au moyen du procédé 116, soit au moyen de celui du n° 117.

Il est visible, d'après cela, que *pour avoir le côté d'un carré qui soit équivalent à une figure donnée, on doit mesurer la superficie de cette figure, puis extraire la racine du nombre obtenu.*

136. Si un parallélogramme quelconque et un rectangle ont des bases égales et des hauteurs égales, ils sont équivalens (120). *La superficie du parallélogramme se mesure donc comme celle du rectangle : il faut en multiplier la base par la hauteur.* Ainsi, la formule est $P = B \times H$.

Supposez que la base CD du parallélogramme ABCD (P. II, F. 40) ait 6^{m},50 et que la hauteur FG soit de 5^{m},25. La formule donne $P = 6^{m},50 \times 5^{m},25 = 35^{mm},125$. Vous trouveriez encore le même nombre de mètres carrés, si vous mesuriez comme base le côté BC, et comme hauteur une perpendiculaire abaissée sur BC, d'un point quelconque de AD.

On veut connaître combien coûtera en totalité le crépi d'un mur de cimetière, et l'on sait que le mètre carré se paie 0^{f},45, *que la forme du terrain est celle d'un rectangle, que ce rectangle a deux côtés horizontaux de* 123^{m} *chacun et deux côtés inclinés de* 85^{m}, *que la pente* *totale de ces derniers est de* $8^m,50$ *et que la hauteur verticale des murs sera de* 2^m.

Les murs qui seront élevés selon la rampe, auront pour faces à crépir, des parallélogrammes tels que ABCD (P. II, F. 50) dont la base BC=2^m et dont la hauteur est l'horizontale AE. Nous calculerons cette hauteur au moyen du triangle rectangle AEB, dans lequel BE=8,50 et l'hypothénuse AB=85^m; nous trouverons (112) que AE=$84^m,573$. La superficie de chaque parallélogramme sera donc $169^{mm},146$. Il faut la quadrupler pour avoir la surface totale des deux murs en pente, car ils ont chacun une face intérieure et une face extérieure. Or, $169^{mm},146\times4=676^{mm},584$.

Les faces à crépir des deux autres pans de mur, sont des rectangles égaux dont la base a 123^m et la hauteur 2^m. La superficie d'un de ces rectangles sera donc $123^m\times2^m=246^{mm}$; quadruplant, nous aurons 984^{mm} pour la surface totale des deux pans rectangulaires; ajoutant à ces 984^{mm}, les $676^{mm},584$ déjà trouvés, nous saurons que la superficie du crépi sera de $1660^{mm},584$; multipliant enfin $0^f,45$ par ce nombre de mètres carrés, nous obtiendrons $747^f,26$ pour le prix demandé.

137. *Un triangle est toujours la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur*; car si par la sommet B du triangle BCD (P. II, F. 40), vous menez une parallèle à la base CD, et par D, une parallèle au côté BC, vous formerez un parallélogramme ABCD qui aura même base et même hauteur que le triangle, et qui le contiendra deux fois. Les deux triangles BCD, DAB sont effectivement égaux, puisque les côtés de l'un égalent les côtés de l'autre (106). Or, la superficie du parallélogramme est le produit de la base CD multipliée par la hauteur FG; celle du triangle BCD sera donc la moitié de ce produit. Ainsi, *pour mesurer un triangle, il faut mesurer la base et la hauteur avec la même unité, faire le produit des deux longueurs trouvées et prendre la moitié de ce produit.* Ce principe converti en formule, donne $T=\frac{B\times H}{2}$.

Le résultat reste le même, quel que soit le côté qu'on prenne pour base, pourvu que la hauteur égale la perpendiculaire abaissée sur ce côté, du sommet opposé.

On veut couvrir la croupe triangulaire d'un toit, avec des tuiles plates de $0^m,24$ *sur* $0^m,16$ *qui, à cause des parties superposées, entrent au nombre de* 70 *dans le* *mètre carré. La base du triangle a* $12^m,50$ *et la hauteur* $3^m,15$. *Combien faudra-t-il de tuiles ?*

Vous aurez, d'après la formule, $T = \frac{12^m,50 \times 3^m,15}{2} = 19^{mm},6875$. Multipliant 70 par ce nombre de mètres carrés, vous obtiendrez en nombre entier 1379, pour la quantité de tuiles demandée.

138. Il peut arriver et il arrive assez souvent que l'intérieur d'un triangle présente des obstacles qui empêchent d'en mesurer la hauteur. Dans ce cas, on prolonge la base AC (P. II, F. 33); on mène une parallèle BD à cette base, par le sommet opposé B (49 ou 50), et en un point quelconque F du prolongement, on élève une perpendiculaire jusqu'à la rencontre de BD (38). Cette perpendiculaire DF=BE hauteur du triangle ABC, puisque ces droites sont des parallèles comprises entre parallèles (66).

Vous pouvez aussi, au lieu d'employer ce procédé, *calculer la superficie du triangle au moyen des trois côtés*. C'est même là ce qu'il faut faire, toutes les fois que les longueurs de ces côtés sont connues, afin d'éviter le mesurage de la hauteur et l'erreur qui en est inséparable.

Soit proposé de déterminer la superficie d'un triangle dont les trois côtés ont 15^m, 23^m, $32^m,25$. Vous ferez la somme de ces trois longueurs; vous prendrez la moitié de cette somme $70^m,25$ et vous aurez $35^m,125$. Cherchez alors l'excès de la demi-somme 35,125 sur chaque côté; vous trouverez 35,125—15=20,125, puis 35,125—23 =12,125, puis 35,125—32,25=2,875. Multipliez ensuite la demi-somme 35,125 par le 1er excès 20,125, vous aurez 706,890 625; multipliez ce produit par le 2e excès 12,125, vous aurez 8 571,048 828; multipliez ce second produit par le 3e excès 2,875, vous aurez 24 641,765 38; extrayez enfin la racine de ce troisième produit (96), vous obtiendrez $156^{mm},976$ pour la superficie du triangle.

Remarquez qu'il suffit de conserver 6 décimales dans chaque produit, lorsqu'on veut se borner aux millièmes de mètre carré pour la superficie. Il suffirait d'en conserver 4, si l'on voulait se borner aux centièmes de la racine quarrée. Bien entendu qu'il faut augmenter d'une unité la dernière des décimales conservées, quand la première de celles qu'on supprime n'est pas moindre que 5.

Pour ne point courir le risque de se tromper dans les calculs de ce mesurage, il faut les faire d'après la formule $T=\sqrt{\frac{s}{2}\times\left(\frac{s}{2}-C\right)\times\left(\frac{s}{2}-C'\right)\times\left(\frac{s}{2}-C''\right)}$ dans laquelle T représente la superficie du triangle, *s* la somme des trois côtés, et C, C′, C″ chacun de ces côtés. Les parenthèses ( ) indiquent qu'on doit opérer la soustraction des deux quantités qu'elles renferment, avant de multiplier.

139. C'est au moyen du mesurage des triangles, que s'exécute celui d'un quadrilatère quelconque ABCD (P. II, F. 47) qui n'est ni rectangle, ni carré, ni parallélogramme, ou dont la forme n'est pas connue. On calcule la superficie de chacun des triangles ABC, ACD formés par une diagonale (137 ou 138), et la somme des deux nombres trouvés donne la superficie du quadrilatère.

Il est à observer que la diagonale AC doit être prise pour base de chaque triangle, toutes les fois qu'elle peut être mesurée directement, afin qu'il n'y ait que trois mesurages de longueurs à effectuer, au lieu de quatre. Cependant, si le quadrilatère était reconnu trapèze, vous n'auriez non plus que trois droites à mesurer, en prenant pour bases des deux triangles, les cotés parallèles de la figure. Dans ce cas, vous multiplieriez AB, puis CD par la hauteur EF commune aux triangles ABD, BCD (P. II, F. 39), et vous feriez la somme des moitiés des deux produits; ou pour éviter une multiplication et une division, vous ajouteriez les longueurs des bases AB, CD; vous prendriez la moitié du résultat, et vous multiplieriez cette demi-somme des bases du trapèze, par la hauteur EF; le produit serait la superficie cherchée.

Ainsi, *le trapèze égale le produit de la demi-somme de ses bases, multipliée par la hauteur.* Ce principe converti en formule, donne $T=\frac{B+b}{2}\times H$.

POLYGONES RÉGULIERS.

140. Des polygones dont le nombre de côtés surpasse 4, il n'y a que les réguliers qui donnent lieu à des tracés intéressans (97). Ceux-là sont aussi les seuls dont les propriétés doivent maintenant nous occuper. Voici néanmoins un premier principe qui concerne à la fois les polygones réguliers et les irréguliers. *La somme des angles intérieurs d'un polygone quelconque, vaut deux angles droits ou* 180° *multipliés par leur nombre diminué de* 2.

Vous voyez effectivement qu'un polygone ABCDE (P. II, F. 38) a autant de diagonales qui partent d'un même sommet A, que l'exprime le nombre des angles diminué de 3; et comme le nombre de ces diagonales est inférieur d'une unité à celui des triangles qu'elles forment, il y a autant de ces triangles que l'indique le nombre des angles du polygone diminué de 2. Or, ces angles sont composés de ceux des triangles, et la somme des angles de chaque triangle est 180° (98). Donc, la somme des angles du polygone vaut 180° multipliés par le nombre des triangles ou par le nombre même de ces angles diminué de 2.

Trouver l'indication de l'angle intérieur d'un polygone régulier.

Comptez les angles du polygone; ôtez deux unités de leur nombre; multipliez 180° par le reste, vous aurez la somme des indications de tous ces angles. Or, ils sont égaux, puisque le polygone est régulier; si donc vous divisez le produit par leur nombre, le quotient sera l'indication d'un seul. Ces calculs sont indiqués plus brièvement par la formule $a=\frac{180°\times(n-2)}{n}$ dans laquelle a représente l'angle intérieur et n le nombre des angles du polygone.

Voulez-vous connaître, par exemple, l'angle intérieur d'un carré? La formule donne $a=\frac{180°\times(4-2)}{4}=\frac{180°\times 2}{4}$ $=\frac{180°}{2}=90°$, ce que vous saviez déjà. Faisant les mêmes opérations pour le triangle équilatéral, vous verriez que son angle intérieur est de 60°, principe qui a été établi dans le n° 104.

141. Les polygones qui ont plus de 4 angles ou de 4 côtés, se nomment *pentagones* s'ils en ont 5, *hexagones* s'ils en ont 6, *octogones* s'ils en ont 8, *décagones* s'ils en ont 10, *dodécagones* s'ils en ont 12, *pentédécagones* s'ils en ont 15. Les autres polygones étant rarement employés dans les arts, ne portent pas de noms particuliers, ou bien ceux qu'ils ont reçus sont peu usités.

Tracer un pentagone régulier.

Décrivez un cercle quelconque; tracez AB un des diamètres (P. II, F. 51); élevez au milieu une perpendiculaire; cherchez le milieu E du rayon CD (43); rapportez EC sur EB, de E en F, et BF de B en G. La corde BG pourra être portée 10 fois exactement sur la circonférence ; elle la divisera donc en 10 arcs de 36°. Par conséquent, si vous tirez les cordes des arcs doubles ou de 72°, vous aurez 5 droites égales (15) qui formeront un pentagone régulier BHIKL. Les angles sont effectivement égaux comme les côtés, car ils sont tous inscrits, chacun renferme entre ses côtés $\frac{3}{5}$ de circonférence ou 3 fois 72° ou 216°, et son indication est par suite de 108° (33).

Un polygone qui a, comme le pentagone BHIKL, tous ses sommets sur une circonférence, est dit *inscrit*. Lorsqu'un polygone régulier est *inscrit*, le centre de la circonférence est aussi le *centre* du polygone, c'est-à-dire le point également écarté des sommets, ainsi que des côtés qui sont des cordes de même longueur. L'angle formé par des rayons CB, CL menés à deux sommets voisins, est *l'angle au centre* du même polygone, et l'indication de cet angle égale 360° divisés par le nombre des côtés. L'arc BL est effectivement la cinquième partie de la circonférence (15).

142. *Tracer un pentagone régulier dont le côté M est donné* (P. II, F. 51).

Faites un pentagone régulier quelconque BHIKL, en suivant le procédé précédent; portez la longueur M sur un côté BL, de B en N; par le point N, menez NO parallèlement au rayon CB, jusqu'au prolongement du rayon CL, et par le point O menez OP parallèlement à BL, jusqu'au prolongement de CB. La droite OP est égale à BN (66) et par suite à M; de plus, elle est placée comme BL, par rapport aux rayons CB, CL. Si donc, avec CO ou CP, vous décrivez une circonférence concentrique à celle dont BC est le rayon, vous pourrez y porter exactement 5 fois la corde OP, et vous formerez par là le pentagone demandé.

Ce procédé est général : il s'applique à tous les polygones réguliers ; de sorte que *pour tracer un polygone régulier dont le côté est donné, il faut commencer par construire un polygone régulier de même nom, dont les côtés aient une longueur arbitraire.*

143. *Tracer un hexagone régulier.*

Décrivez un cercle quelconque ; prenez une ouverture de compas égale au rayon AB (P. II, F. 52), et portez-la, comme corde, sur la circonférence, à partir d'un point quelconque B. Vous reviendrez au même point, après avoir marqué six arcs égaux; et si vous joignez chaque point de division au point voisin, vous formerez l'hexagone régulier BCDEFG.

Ce tracé suppose que la corde BC d'un arc de 60°, sixième partie de la circonférence, est égale au rayon BA. Or, cette égalité est vraie : puisque l'angle BAC est de 60°, les deux autres angles du triangle ABC valent en somme 180°—60° ou 120° (98), et comme le triangle est symétrique, chacun de ces deux angles est de 60° (102); ce qui apprend que le triangle ABC est équilatéral (104) et que par conséquent BC=BA.

144. *Tracer un octogone régulier.*

Décrivez un cercle quelconque, tirez deux diamètres d'équerre AB, CD (P. II, F. 53) et joignez leurs extrémités ; vous formerez un carré inscrit ACBD (117). Par le centre E, menez ensuite des parallèles aux côtés de ce carré ; vous diviserez chaque quart de la circonférence en deux parties égales (63); la courbe se trouvera divisée en 8 arcs égaux, et par conséquent, si vous joignez chaque point de division au point voisin, vous obtiendrez l'octogone régulier AFCGBHDI.

145. *Tracer un décagone régulier.*

Il faut faire ce qui a été prescrit dans le n° 141, pour trouver la corde de 36°, dixième partie de la circonférence, car cette corde est évidemment le côté du décagone régulier inscrit. Quand la corde BG (P. II, F. 51) est trouvée, on la porte 10 fois sur la circonférence, puis on joint chaque point de division au point voisin.

146. *Tracer un dodécagone régulier.*

Décrivez un cercle quelconque ; tirez deux diamètres d'équerre AB, CD (P. II, F. 54) ; de chaque extrémité de ces diamètres, marquez des arcs de 60°, des deux côtés, avec une ouverture de compas égale au rayon. Comme l'arc AC=90° et que l'arc AE sera de 60°, l'arc EC vaudra 30°; comme l'arc CF sera de 60°, l'arc AF vaudra aussi 30°. La circonférence se trouvera donc partagée en arcs de 30° ou en douze parties égales; par conséquent, les cordes de ces arcs formeront un dodécagone régulier AFECGHBIKDLM.

147. *Tracer un pentédécagone régulier.*

Décrivez un cercle arbitrairement ; cherchez la corde de 36 degrés (141) et portez-la sur la circonférence, d'un point quelconque A en un point B (P. II, F. 55); rapportez ensuite le rayon AC, de A en D. L'arc AD sera de 60°; l'arc BD qui vaut AD—AB, aura donc 24° excès de 60° sur 36°. Or, 24° est précisément la quinzième partie de 360°. Vous pourrez donc porter la corde BD exactement 15 fois sur la circonférence. Joignant chaque point de division au point voisin, vous aurez enfin le pentédécagone demandé.

148. La Géométrie élémentaire ne fournit point de procédé pour tracer exactement les polygones réguliers de 7, 9, 11, 13, 17 côtés, ni ceux dont le nombre de côtés est multiple d'un quelconque de ces nombres. Quant aux multiples des polygones dont vous venez d'apprendre la construction, la Géométrie n'enseigne à tracer rigoureusement que ceux qui sont indiqués par les nombres 16, 32, 64 et ainsi de suite en doublant toujours, par les nombres 20, 40, 80 et ainsi de suite en doublant toujours, par les nombres 24, 48, 96, etc., et par les nombres 30, 60, 120; etc. Le procédé est le même pour tous ces polygones: il consiste à faire un octogone régulier inscrit, ou un décagone, ou un dodécagone, ou un pentédécagone, et à diviser en 2, 4, 8, etc., parties égales, les arcs dont les côtés du polygone tracé sont les cordes (65). De cette façon, l'octogone régulier, par exemple, fournira le polygone régulier de 16 côtés, celui-là produira le polygone de 32 côtés, ce dernier donnera le polygone de 64 côtés, et ainsi des autres.

149. Les tracés des polygones réguliers conduisent à établir en principe, qu'une circonférence qui passe par 3 sommets d'un de ces polygones, passe aussi par tous les autres; elle est dite alors *circonscrite* au polygone. Le procédé au moyen duquel on fait passer un cercle par 3 points (63), peut donc servir à *circonscrire une circonférence à un polygone régulier*.

Si du centre A d'un polygone régulier quelconque (P. II, F. 56), on abaisse une perpendiculaire sur un côté BC, et qu'avec AD pour rayon, on décrive un cercle, du point A, ce cercle aura le côté BC et tous les autres pour tangentes (51), car toutes les perpendiculaires AD, AE, etc., ont même longueur, attendu que les triangles CAB, BAF, etc., sont égaux, par suite de l'égalité qui existe entre leurs côtés correspondans (106). Dans cette position, la circonférence est dite *inscrite* au polygone ou bien le polygone est dit *circonscrit* au cercle.

COMPARAISON DES POLYGONES.

150. L'égalité de deux polygones quelconques a lieu dans des circonstances analogues à celles où existe l'égalité des quadrilatères (118). *Il faut que les côtés de l'un et les diagonales tirées d'un des sommets, soient de même longueur que les côtés correspondans et les diagonales correspondantes de l'autre;* car alors la première figure se trouve composée de triangles égaux à ceux de la seconde, et comme les triangles égaux sont placés dans le même ordre, les deux polygones peuvent se couvrir exactement.

Vous pourrez donc *faire un polygone qui soit égal à un polygone quelconque et donné*, en suivant ce qui a été prescrit pour copier exactement un quadrilatère (118).

151. *Deux polygones réguliers sont égaux, lorsqu'ils portent le même nom et que le côté de l'un est égal au côté de l'autre;* car alors tous les angles (140) et tous les côtés du premier (97) sont égaux aux angles et aux côtés du second; d'où il suit que les deux figures peuvent se couvrir exactement.

Construire un polygone régulier qui soit égal à un polygone régulier donné, revient donc à tracer un polygone régulier de même nom dont le côté est connu (142).

152. *Deux polygones semblables sont composés d'un même nombre de triangles semblables, placés dans le même ordre.*

Si nous supposons, par exemple, que les angles du polygone ABCDE soient égaux aux angles de même rang du polygone *abcde* (P. II, F. 38), et que les côtés du premier contiennent les côtés correspondans du second le même nombre de fois (97), les trois triangles formés dans le premier, par les diagonales tirées du sommet A, seront semblables aux trois triangles formés dans le second, par les diagonales tirées du sommet *a*.

En effet, de ce que l'angle B=*b* et de ce que AB contient *ab* comme BC contient *bc*, résulte la similitude des triangles BCA, *bca* (110), et de plus l'égalité des angles BCA, *bca*. Or, de cette dernière égalité et de ce que l'angle BCD=*bcd*, suit que l'angle ACD = *acd*. La similitude des deux triangles fait d'ailleurs que AC contient *ac* comme BC contient *bc*, et parce que BC contient *bc* comme CD contient *cd*, AC contient *ac* comme CD contient *cd*. Les deux triangles ACD, *acd* se trouvent donc dans le cas des premiers et sont semblables.

On démontrerait par le même raisonnement, la similitude des triangles suivans, s'il y en avait plus de trois, et celle des derniers, comme celle des premiers.

Il suffit donc pour prononcer que deux polygones quelconques sont semblables, d'avoir reconnu qu'ils sont composés d'un même nombre de triangles semblables, placés dans le même ordre.

Pour les polygones réguliers, le caractère de la similitude est beaucoup plus simple : *Deux polygones réguliers sont semblables, s'ils portent le même nom.* Alors en effet, les angles de l'un égalent les angles de l'autre (140), et deux côtés correspondans se contiennent comme deux autres côtés correspondans quelconques, puisque dans chaque figure tous les côtés ont même longueur.

Deux polygones semblables se contiennent comme les quarrés numériques de deux quelconques de leurs droites correspondantes.

Deux choses se contiennent nécessairement comme leurs fractions de même dénominateur, comme leurs moitiés, comme leurs tiers, par exemple. Conséquemment, deux polygones semblables doivent se contenir comme les triangles semblables dont ils sont composés, c'est-à-dire comme les quarrés numériques de deux côtés correspondans ou de deux diagonales correspondantes (111).

Il s'ensuit qu'*un polygone qui a pour un de ses côtés, l'hypothénuse d'un triangle rectangle, vaut la somme des deux polygones semblables à lui dont les côtés correspondans sont ceux de l'angle droit.*

Ce principe est applicable aux cercles, car ces figures peuvent être considérées comme des polygones réguliers d'un très grand nombre de fort petits côtés. En effet, plus un polygone régulier a de côtés et moins il diffère du cercle auquel il est inscrit (141); de sorte que le nombre des côtés devenant très-grand, il est impossible à l'œil de distinguer le cercle du polygone.

Si donc les droites DE, DF, EG (P. II, F. 49) sont prises égales à des côtés correspondans de polygones semblables, réguliers ou non, FG sera le côté correspondant d'un polygone qui, fait semblable aux polygones donnés, vaudra leur somme; et dans le cas où DE, DF, EG seraient égales aux rayons ou aux diamètres de différens cercles, FG donnerait le rayon ou le diamètre d'un cercle dont la superficie vaudrait la somme de celles des cercles donnés. Ainsi, vous pouvez doubler, tripler, etc., un polygone et un cercle, tout aussi aisément qu'un carré (134).

Réduire ou étendre un polygone.

L'opération revient à diviser le polygone en triangles par des diagonales et à copier ces triangles en petit ou en grand (111). Supposons que vous ayez à réduire au seizième, un plan (P. II, F. 38) qui présente un polygone ABCDE formé par un clocher A, une croix B, un arbre C, l'intersection D de deux chemins, et un moulin E. Vous prendrez le quart du côté AB, du côté BC et de la diagonale AC, au moyen d'un angle de réduction (68); vous porterez le quart de AB sur une droite, de *a* en *b*; de *a*, avec le quart de AC pour rayon, vous décrirez un petit arc; de *b*, avec le quart de BC pour rayon, vous décrirez un autre petit arc qui coupe le premier en *c*; et le triangle *abc*, sera la copie au seizième du triangle ABC (111). Ensuite, vous ferez de la même manière, sur *ac*, la copie du triangle ACD, au moyen du quart de AD et du quart de CD, puis sur *ad*, la copie de ADE; vous obtiendrez ainsi le polygone *abcde* qui sera l'image exacte de ABCDE et dont la superficie contiendra la seizième partie de celle du grand polygone, étant composé de trois triangles égaux chacun au seizième du grand triangle correspondant.

Pour achever la copie du plan, il vous restera à dessiner entre *a* et *d*, le chemin AD; entre *d* et *e*, le chemin DE; entre *a* et *e*, la rivière AE. On trace à vue ces lignes du plan, en les dirigeant par rapport à *ad*, *de*, *ac*, à-peu-près comme elles sont placées par rapport à AD, DE, AE.

Cette application vous enseigne aussi comment il faut opérer pour *faire un polygone qui soit semblable à un polygone quelconque et donné.*

Lever des plans.

153. Il vous serait maintenant facile, en réfléchissant à tout ce que vous avez appris sur les polygones semblables, de découvrir vous-mêmes les procédés à employer pour *faire ou lever le plan d'un terrain quelconque*, car ce plan n'est autre chose que la copie réduite du polygone ou des polygones dont le terrain est entouré ou couvert. Nous allons néanmoins appliquer les principes à un des cas les plus compliqués, afin d'avoir l'occasion de vous

faire connaître quelques moyens qui facilitent l'opération et la rendent plus exacte. Supposons donc que vous ayez à lever le plan de toute une commune, d'un terrain occupé par un village, des champs, des haies, des bois, des chemins et un ruisseau ou une rivière.

Croquis. Vous ferez d'abord le *croquis*, c'est-à-dire le dessin à vue de tout le terrain (P. IV, F. 8), et vous y placerez les objets, aussi exactement que vous le pourrez, dans les positions qu'ils occupent réellement les uns par rapport aux autres. Ce croquis doit être fait sur une page d'un grand cahier, afin qu'on puisse l'exécuter aisément, en tenant le papier d'une main. Vous y tracerez d'abord le polygone *abcdefghi* que forment les points remarquables situés aux limites ou près des limites du terrain, puis successivement les quadrilatères et les triangles qui remplissent l'intérieur de ce polygone, en allant toujours des plus grands aux plus petits. On éprouve d'abord quelque peine à faire d'une manière un peu nette, un semblable dessin; mais on y parvient bientôt. D'ailleurs, il n'est pas indispensable qu'il soit bien dessiné; on ne s'en sert que pour inscrire les mesures, ce qu'on appelle *coter*, et pour écrire les noms des parties du terrain.

Mesurages. Après avoir terminé le croquis, vous commencerez les mesurages *horizontaux*, à la chaîne (72), par celui d'un côté *ab* du grand polygone, ayant soin de prendre les distances du point *a* aux points où des alignemens importans viennent rencontrer ce côté. Ainsi, vous coterez *ak*, pour marquer l'intersection *k* de *ab* et de l'alignement d'une partie droite de la rivière; puis vous mesurerez et vous coterez *kb*. Mesurez ensuite, *kl*, *lm*, distance donnée par un autre alignement *bm* du bord de la rivière, puis le reste *ma* du chemin *la*. Vous aurez tout ce qu'il faut pour construire, plus tard, à l'échelle, le triangle *abl*, les deux triangles qu'il renferme et la partie *bl* du cours de la rivière. L'arrondissement se fait à vue; mais vous pouvez aussi prendre la distance du coude au point où se coupent *bm* et *kl*.

Mesurez la largeur de la rivière, soit au point *l*, soit ailleurs, si elle est à-peu-près la même partout. Dans le cas contraire, on la mesure à tous les points où elle varie sensiblement, et il en est de même des chemins de voiture, si l'échelle permet de tenir compte de leur largeur. Quant aux sentiers qui se représentent par deux traits fort rapprochés et quelquefois par un seul, il est inutile d'en prendre la largeur. Les cotes de largeur s'inscrivent comme celles que vous voyez au chemin L*e*, sur la grande base d'un trapèze, quand la petite n'est pas suffisamment longue.

Mesurez *li* et *ia*,, pour avoir les trois côtés du triangle *ali* et pouvoir placer le point *i* du bois. L'embranchement des deux chemins se fait à vue, ainsi que la partie du chemin qui va de *i* au cadre. Pour l'ordinaire, on ne détermine rigoureusement que les points situés sur le contour du grand polygone ou dans l'intérieur ; voilà pourquoi il est prescrit de prendre ce polygone de manière à renfermer tout le terrain dont on veut le plan exact.

Mesurez la largeur du pont et cotez-la, comme celle du chemin L*e*; mesurez ensuite *ip* donnée par l'alignement *lp* tangent à la rivière; mesurez aussi *pl*, *ph*, *ho*, *hn*, *on* et *oi*. Vous pourrez faire le renfoncement du bois, quoique *in* ne soit pas mesurable, et le triangle *ilh*, bien qu'on ne puisse cheminer selon *lh*.

Remarquez qu'en parcourant ainsi le terrain pour mesurer, vous trouvez les moyens de corriger les erreurs du croquis. Si, par exemple, l'alignement *lh* ne passe pas en réalité par la rencontre *q* de la rivière et de la haie *tq*, vous changez convenablement la direction de cette haie.

Mesurez *lr* et *rh*, en prenant les distances *rs*, *st*; prenez aussi *tq*. Si la rivière est trop large pour que *th* soit mesuré à la chaîne, vous emploierez le procédé du n° 74.

Mesurez *tu*,*uh*,*uv*,*vx*,*vy*,*uy*,*ty*,*yz*,*za'*,*a'y*,*a't*, et continuez de décomposer ainsi en triangles, les diverses figures du terrain, observant toujours de mesurer les moindres rampes horizontalement et d'employer pour former tout nouveau triangle, un côté de triangle déjà connu. La figure montre au reste comment doit être faite la décomposition, et quelles sont les intersections d'alignemens qu'il faut coter.

Les maisons se figurent par masses, et les angles saillans ou rentrant de ces masses sont faits droits, à moins qu'ils ne soient très-sensiblement aigus ou obtus. Dans ces derniers cas, on prolonge leurs côtés pour former un triangle symétrique A, tout-à-fait égal à celui qu'il faudrait faire à l'intérieur, pour lever l'angle du bâtiment par le procédé du n° 102, et quand on met le plan au net, on copie ce triangle à l'envers. Observez toutefois que vous pouvez vous dispenser de ces opérations, en cotant les points où les alignemens des murs vont rencontrer chacun les deux haies du jardin.

Les mêmes moyens servent à lever le contour d'un bois ou d'une vigne et en général de toute figure dont on ne peut mesurer les diagonales. Ainsi, la largeur de la route et sa direction BC déterminée par les triangles, feront connaître les points D, E, *d*; le point *c* sera marqué sur l'alignement B*b*, à la distance B*c* de B; le point F de l'alignement GE sera aisément connu; vous pourrez donc tracer les chemins droits D*c*, EG. De même, les points H, *g* détermineront le sentier *gf*; vous aurez le point *f*, par la distance I*f*; vous pourrez donc marquer le point K où la direction *df* est rencontrée par le sentier L*e*; et tracer ce chemin dont vous connaîtrez déjà le point L. Le point *e* sera fourni par la distance K*e*. Ainsi, vous serez en état de dessiner les contours et les divisions du terrain couvert de vignes, sans avoir mesuré une seule de ses diagonales.

Au reste, le lever réel d'une petite partie des alentours d'un village, achevera de vous faire comprendre toute cette manière d'opérer, et vous trouverez de vous-mêmes, en y pensant un peu, les moyens de vous tirer des cas extraordinaires qui pourront se présenter. Mais il convient de copier auparavant la figure 8, en doublant les côtés des triangles et procédant de proche en proche, à partir du côté *ab*, comme il a été prescrit ci-dessus. Cet exercice vous fera bien voir le but de toutes les opérations et vous rendra capables de les appliquer sur le terrain.

Orientation. Il en est une dont nous n'avons pas encore parlé; c'est celle qu'il faut faire pour *orienter le plan*, c'est-à-dire, pour y marquer les quatre points cardinaux : nord, sud, est, ouest. Plantez verticalement un jalon en un point M de l'alignement *ab*, par exemple; marquez sur le sol l'extrémité de l'ombre de ce jalon, vers 10^h du matin, et avec la longueur de cette ombre, décrivez un arc d'environ 180° dont M soit le centre. De 10^h à midi, l'ombre diminuera et quittera la circonférence; mais son extrémité y reviendra après midi, vers 2^h. Marquez le point où se trouvera cette extrémité à ce moment, et divisez en deux parties égales, l'arc PQ qui séparera les deux positions extrêmes de l'ombre (63). La droite de division MN sera dirigée du sud au nord; vous pourrez la tracer sur le plan, si vous mesurez M*b*, N*b*, MN; une ligne droite perpendiculaire à celle-là indiquera l'est à droite et l'ouest à gauche.

Conventions. Quelques mots maintenant sur les conventions faites pour représenter, dans le dessin au net, les diverses parties du terrain et les objets qui s'y trouvent. Les champs restent en blanc. Les bois se font comme vous le voyez en O. De petits ronds dentelés représentent des arbres isolés : vous en trouvez de tels sur le bord de la rivière, vers le point *b*. Une ligne droite dentelée par de petits zéros, figure une haie. Les masses des maisons sont couvertes de traits fins qu'on trace à la plume, sans règle, à peu près parallélement ; on les appelle *hachures*. Une église a ses hachures parallèles à ses longs côtés ; tout autre bâtiment public est couvert de hachures croisées, comme le montre le rectangle situé à gauche de l'église : il contient, par exemple, le presbytère, la maison commune, l'école et le logis du pâtre. Les murs sont figurés par de simples traits plus gros que ceux des chemins. Une rivière un peu large est couverte de lignes courbes qui suivent les contours des bords ; celles du milieu sont plus écartées que les autres ; une flèche indique la direction du courant. Cette flèche mise près des bords, suffit pour distinguer un ruisseau d'un chemin courbe. La figure 1 (P. III) montre comment se fait une prairie ; la figure 2 montre une vigne ; la figure 3 montre un étang ; la figure 4 indique un marais ; la figure 5 indique un petit jardin ou un carreau de grand jardin, car lorsque les jardins sont grands, on doit en tracer les allées.

Nivellement. On a besoin, dans certain cas, de connaître les hauteurs relatives de différens points d'un terrain dont on lève le plan. Il peut être utile, par exemple, de savoir combien le point *h* de la rivière (P. IV, F. 8) s'élève au-dessus du point *b*, ou quelle est la pente totale de *h* en *b*. C'est au moyen d'un niveau d'eau que vous la trouverez (44). Placez cet instrument en un point quelconque d'où vous puissiez voir *b* et *h* ; plantez verticalement un jalon en *b* et mesurez la distance de *b* au point *b'* où le jalon est rencontré par l'horizontale du niveau A (P. III, F. 6) ; vous aurez l'élévation *bb'* de l'horizontale au-dessus de *b*. Faites la même opération pour le point *h* ; vous aurez l'élévation *hh'* de la même horizontale au-dessus de ce point, si le pied de l'instrument n'a pas varié. Retranchant donc la plus petite hauteur *hh'* de la grande *bb'*, vous connaîtrez, par la différence *bb''* ou *hh''*, de combien de mètres le point *h* est élevé au-dessus de *b*. Ce nombre de mètres est ce qu'on appèle la *cote verticale* du point *h* ; celle de *b* est zéro.

Si vous opérez de la même manière entre *h* et *g* (P. IV, F. 8.), entre *g* et *f*, entre *f* et *d*, etc., vous trouverez les hauteurs relatives de tous ces points. Puis, pour avoir, par rapport à *b*, la cote verticale *bb'* de *g* (P. III, F. 7), point plus élevé que *h*, vous ajouterez à la cote *bb''* de *h*, la quantité *hh'* dont *g* est au-dessus de ce point; pour avoir la cote verticale *bb'''*, de *f*, point moins élevé que *g*, vous retrancherez de la cote *bb'* de *g*, la quantité *ff'* dont *f* est au-dessous de ce point; etc.

Toute cote verticale indique donc de combien son point est élevé au-dessus du point *b* le plus bas de tous les points du plan, et il suffit évidemment de retrancher une cote verticale d'une autre, pour savoir de combien le point de la 1re cote est moins élevé que celui de la 2e.

Chercher ainsi les cotes verticales de plusieurs points, par rapport à un autre, choisi pour point de comparaison, c'est *faire un nivellement.*

Les cotes verticales s'inscrivent, sur le croquis, à côté des points auxquelles elles appartiennent, et entre parenthèses; sur le plan au net, on les écrit de la même manière, à l'encre rouge.

Il serait possible qu'on rencontrât un point *d* qui fût au-dessous du précédent *f* (P. IV, F. 8) d'une quantité plus grande que la cote de ce dernier; qu'il y eût, par exemple, 6m de différence entre *f* et *d*, tandis que la cote de *f* serait 4m. Dans ce cas, on retrancherait la cote 4m de la différence d'élévation 6m; le résultat 2m serait la quantité dont *d* se trouverait au-dessous de *b* ou dont *b* se trouverait au-dessus de *d*. Ce serait *d* qui deviendrait le point de comparaison: 2m serait la cote de *b*, et toutes les cotes verticales déjà trouvées devraient être augmentées de 2m.

Il est possible aussi qu'entre deux points *d*, *c*, on ne puisse pas placer le niveau dans une *station* d'où *d* et *c* soient visibles. Il faut alors comparer *d* à un point quelconque G ou E, puis comparer G ou E à *c*. Un point qu'on prend ainsi pour intermédiaire, sans avoir besoin de sa cote, est dit *point de repère.*

Il est possible enfin que de deux points comparés, l'un A (P. III, F. 8) soit au-dessous de l'horizontale et l'autre B au-dessus. On doit alors, au lieu de retrancher, ajouter les distances AA', BB' des points à l'horizontale A'B', pour avoir la différence d'élévation BB''. Si les deux points se trouvaient à la fois au-dessus de l'horizontale, il faudrait retrancher, comme dans le cas où ils sont tous deux au-dessous.

Mesurage des polygones.

154. Nous pourrions, à la rigueur, renvoyer pour le mesurage des polygones, à celui des triangles, puisqu'un polygone quelconque peut toujours se décomposer en triangles. Il est clair qu'en mesurant ces triangles et faisant la somme de toutes leurs superficies, on aurait celle du polygone. Mais il est des cas où un mesurage plus expéditif peut être employé, et il en est d'autres où la décomposition est impossible.

Mesurer un polygone régulier quelconque.

Cherchez le centre, par des perpendiculaires aux milieux de deux côtés (63); mesurez une de ces perpendiculaires, du centre A en E (P. II, F. 56); mesurez aussi un côté BF; calculez la superficie du triangle BAF dont vous connaissez la base et la hauteur (137), et multipliez cette superficie par le nombre des côtés du polygone régulier; vous aurez pour produit celle de tout ce polygone, puisqu'il renferme autant de triangles égaux à BAF qu'il a de côtés.

Soient P la superficie du polygone régulier, C le côté, R le rayon AE de la circonférence inscrite, et N le nombre des côtés; on a pour formule $P=\frac{C\times R\times N}{2}$.

S'il s'agit d'un hexagone régulier, que $AE=0^{m},29$, et que $BF=0^{m},34$, la formule donne $P=\frac{0^{m},34\times 0^{m},29\times 6}{2}=0^{mm},2958$.

Mais au lieu de procéder ainsi, vous pouvez bien multiplier le côté BF par 6, ce qui donne la somme des côtés ou le contour du polygone, puis multiplier le produit par la longueur de AE et diviser le résultat par 2; ce calcul fait trouver comme l'autre, $0^{mm},2958$ pour superficie. On peut donc dire que *la superficie d'un polygone régulier égale la moitié du produit de son contour multiplié par la perpendiculaire AE abaissée du centre sur un côté.*

155. Le cercle pouvant être considéré comme un polygone régulier (152), doit avoir le même mesurage que cette sorte de figure. Or, lorsque le polygone se confond avec le cercle dans lequel il est inscrit ou auquel il est circonscrit, le contour est la circonférence, et la

perpendiculaire au côté est le rayon du cercle. Par conséquent, la superficie d'un cercle égale la moitié du produit de la circonférence multipliée par le rayon.

Si le rayon est de 5^m, le diamètre sera $5^m \times 2$, la circonférence vaudra $5^m \times 2 \times 3,1416$ d'après le nº 19, et la superficie égalera $\frac{5^m \times 2 \times 3,1416 \times 5^m}{2}$. Mais, remarquez que le chiffre 2 multipliant et divisant, peut être supprimé, et qu'alors on a, pour la superficie du cercle, $5^m \times 3,1416 \times 5^m$. Remarquez encore que multiplier le rayon 5^m par $3,1416$ et le produit par 5^m, revient à faire le quarré de ce rayon 5^m et à le multiplier par $3,1416$. Nous pouvons donc dire enfin que *la superficie d'un cercle est égale au quarré numérique du rayon multiplié par le nombre* 3,1416. La formule abrégée de ce principe, est $S.C = R \times R \times 3,1416$, si S.C représente la superficie du cercle.

Pour un cercle dont le rayon serait de 3^m, on aurait, par la formule, $S.C = 9^{mm} \times 3,1416 = 28^{mm},2744$. Ce résultat n'est pas exact; il se trouve un peu trop grand; mais le produit $9^{mm} \times 3,1415 = 28^{mm},2735$ serait trop petit; de sorte que la véritable superficie d'un cercle de 3^m de rayon, est comprise entre $28^{mm},2735$ et $28^{mm},2744$. Au reste, elle diffère beaucoup moins du dernier de ces nombres que du premier, et en la supposant égale à $28^{mm},2744$, on ne fait pas une erreur d'un centimètre carré.

Il n'est pas rare de rencontrer des hommes qui cherchent les moyens d'obtenir exactement la superficie d'un cercle; chaque année même, plusieurs prétendent avoir trouvé ces moyens. Mais, malgré leurs efforts et ce qu'ils appellent leurs succès, le problême est encore à résoudre. N'essayez pas d'être plus heureux; vous perdriez votre temps et vos peines; car en supposant qu'on pût trouver la *quadrature* du cercle, c'est-à-dire la mesure exacte de la superficie, ce qui est bien loin d'être certain, la découverte serait fort peu utile, puisque nous possédons le moyen d'approcher de la vraie valeur de cette superficie, autant que nous pouvons le désirer.

Vous avez déjà vu effectivement qu'en multipliant le quarré 9 du rayon par 3,1416, vous ne faites pas erreur d'un centimètre carré; hé bien! si vous preniez pour multiplicateur le nombre 3,141 593, vous n'auriez pas 4 millimètres carrés de trop, et si vous multipliiez le quarré du rayon par 3,141 592 653 59 vous ne vous tromperiez pas de 30 trillioniémes de mètre carré. Le résultat n'équivaudraitficies de toutes ces figures, vous devrez en faire la somme, toutefois sans y comprendre la superficie du triangle RLS, qui ne fait point partie de celle du terrain à arpenter ; ce triangle doit être au contraire retranché de la somme des autres figures, attendu qu'on l'a compris dans le trapèze BbcC.

Il n'est pas nécessaire de faire plusieurs multiplications, pour calculer la superficie de la partie eEQq ; une seule suffit. Remarquez en effet que cette partie du terrain égale $eENn+nNOo+oOPp+pPQq$, que chacun de ces trapèzes vaut la demi-somme de ses bases multipliée par la hauteur *en* commune à tous (159), et qu'au lieu de calculer chaque trapèze séparément, on peut fort bien additionner les demi-sommes de bases et multiplier le total par la hauteur commune *en*. Or, ce total se composera évidemment de $(\frac{1}{2}eE+\frac{1}{2}nN)+(\frac{1}{2}nN+\frac{1}{2}oO)+(\frac{1}{2}oO+\frac{1}{2}pP)+(\frac{1}{2}pP+\frac{1}{2}qQ)$, ce qui revient à $\frac{1}{2}eE+nN+oO+pP+\frac{1}{2}qQ$. Par conséquent, vous obtiendrez la superficie de la figure eEQq, en additionnant les longueurs $\frac{1}{2}eE$, nN, oO, pP, $\frac{1}{2}qQ$ et multipliant leur somme par *en* une des parties égales de eF. De là ce principe : *Pour mesurer l'ensemble d'une suite de trapèzes qui ont tous même hauteur et deux à deux une base commune, il faut faire la somme des bases communes, y ajouter les moitiés des bases extrêmes, et multiplier le total par la hauteur d'un trapèze.*

159. *Arpenter un terrain limité par une courbe, dans lequel on peut opérer.*

Après avoir tiré AB, une des plus grandes cordes de la courbe (P. III, F. 11), vous la diviserez en parties égales et assez petites pour que les parties correspondantes de la limite puissent être regardées, sans grande erreur, comme des lignes droites. Vous mesurerez ensuite les cordes tracées perpendiculairement à AB, par tous les points de division. La superficie comprise entre les deux parallèles extrêmes CD, EF pourra être mesurée au moyen du principe précédent, et il n'y aura plus qu'à y ajouter les deux triangles ACD, BEF, pour avoir la totalité du terrain. Or ACD égale le produit de la moitié de CD par AG ; BEF égale le produit de la moitié de EF par BH ; les hauteurs AG, BH de ces triangles sont aussi les hauteurs des trapèzes intermédiaires, et les produits des moitiés de CD, EF par la hauteur commune, entrent déjà dans le calcul de la superficie CDFE. Par conséquent, vous aurez à fort peu près la superficie totale ACEBFDA, en multipliant la somme de toutes les cordes parallèles par l'écartement de deux cordes voisines.

Il s'ensuit ce principe : *Lorsque dans une suite de trapèzes terminée par deux triangles, les figures ont toutes même hauteur et deux à deux une base commune, on obtient la superficie totale en multipliant la somme des bases par une seule hauteur.*

Si le terrain finissait d'un côté par un trapèze et de l'autre par un triangle, il est clair que dans la somme des bases devrait entrer entièrement la base du triangle et seulement la moitié de l'autre parallèle extrême.

Au lieu de former deux pointes, comme dans la figure 11, le terrain peut être arrondi aux deux bouts, comme dans la figure 12. Il faudrait alors partager AB en parties forts petites, pour que tous les arcs de la courbe pussent être regardés, sans grande erreur, comme des droites. Afin d'abréger le mesurage, vous tracerez, dans ce cas, deux perpendiculaires FH, IK qui retranchent les parties les plus arrondies des bouts ; vous diviserez leur écartement CD en parties égales, d'une grandeur convenable, pour tracer d'autres perpendiculaires, comme précédemment, et vous formerez à vue 4 petits triangles, tels que EFG, qui soient sensiblement équivalens aux parties retranchées telles que ACG. La superficie FENIKOPHF calculée selon la règle du n° 158, différera peu de celle du terrain limité par la courbe AENBOPA.

Il convient de vous faire observer, en terminant cet article, qu'on peut éviter le partage en parties égales de eF (P. III, F. 10), de AB (F. 11), de CD (F. 12.) Pour cela, on porte à partir de C, par exemple (F. 12), une longueur arbitraire CL un certain nombre de fois, 4 je suppose, ce qui fait arriver au point M. On opère ensuite comme il a été dit, pour la partie de la figure comprise entre les parallèles FH, NO, puis on mesure à part les trapèzes ou les triangles des extrémités dont les hauteurs MD, AC sont moindres que CL, et ces superficies sont ajoutées à celle qui est déjà calculée.

160. *Arpenter un terrain quelconque dans lequel on ne peut opérer*, un bois, une vigne, un étang, par exemple.

Pour faire ce mesurage sans équerre d'arpenteur, il faut prolonger trois côtés du polygone, de manière à former un triangle ABC qui embrasse tout le terrain (P. III, F. 13). Ce triangle doit n'avoir aucun de ses sommets sur ceux de la figure donnée, afin que ses côtés étant moins longs, soient plus faciles à mesurer. Appliquant le calcul du n° 138, on détermine la superficie de ABC, et celles des petits triangles ADE, BFG, CHI; puis, après avoir fait la somme de ces trois dernières, on la retranche de ABC. Le reste est évidemment la superficie du terrain DEFGHI.

Avez-vous une équerre d'arpenteur? marquez par des jalons, les pieds A, B (F. 14) des perpendiculaires à un côté DI, qui passent par deux sommets E, H; marquez aussi le pied C de la perpendiculaire abaissée de G sur l'alignement BH (42); plantez enfin un 4e jalon à la rencontre K des alignemens AE, CG. Vous aurez alors un rectangle ABCK qui renfermera le polygone donné et dont vous calculerez aisément la superficie (127). La moitié du produit AD×AE vous donnera celle du triangle DAE; la moitié du produit BI×BH sera celle de IBH; la moitié du produit CH×CG sera celle de HCG. Abaissant la perpendiculaire FL, vous formerez un 4e triangle extérieur FLG et un trapèze EKLF que vous mesurerez aisément aussi; faisant enfin la somme des 4 triangles extérieurs et du trapèze, puis retranchant cette somme de la superficie du rectangle, vous obtiendrez évidemment pour reste celle du terrain DEFGHI.

161. *Arpenter un terrain en pente.*

La vraie superficie d'un terrain en pente ou d'un polygone situé sur un plan incliné, s'obtient comme celle d'une figure dont le plan est horizontal. Mais, sous le rapport des produits agricoles, on doit ne chercher que la superficie du polygone horizontal qui se trouverait compris entre les mêmes plans verticaux que le polygone incliné; car, si d'un côté les plantes basses peuvent s'étaler plus amplement sur ce dernier, d'un autre les plantes à tiges ou à racines pivotantes n'y viennent pas en plus grand nombre, et le sol y est toujours moins fertile que dans un champ de niveau, attendu que les grandes pluies le dépouillent peu-à-peu de la bonne terre.

Pour obtenir la superficie horizontale d'un terrain en pente, il suffit de mesurer horizontalement les droites dont la longueur est nécessaire au calcul des triangles et des trapèzes qui composent le polygogne donné. On agit à cet effet conformément au nº 72, en suivant la marche prescrite dans les trois derniers articles.

Remarquez que si vous calculez la superficie d'un terrain au moyen de la figure qu'il a sur un dessin, c'est toujours la superficie horizontale que vous trouvez, puisque les cotes des longueurs, inscrites au croquis, expriment des distances horizontales (153). Lorsqu'on se sert ainsi d'un plan dont l'échelle est, par exemple, de 1 millimètre pour mètre, le calcul donne les superficies en millimètres carrés, mais il faut regarder le résultat comme exprimant des mètres carrés (69.)

162. *Partager un terrain en plusieurs portions équivalentes.*

Soit, par exemple, le polygone quelconque ABCDE à partager en 4 quadrilatères équivalens (P. III, F. 15). Vous mesurerez d'abord ce polygone. Supposons que vous trouviez 667^{mm},87. Chaque quadrilatère devra contenir le quart de ce nombre de mètres carrés, ou 166^{mm},97. Divisez cette superficie par la longueur 22^{m},50 de AF perpendiculaire sur CB; le quotient 7^{m},42 sera la base d'un triangle égal à la moitié de 166^{mm},97, car cette base multipliée par AF donnerait 166^{mm},97 dont il faudrait prendre la moitié pour avoir la superficie du triangle (137). Portez donc 7^{m},42 de B en G; le triangle BAG sera la moitié d'un des quadrilatères cherchés. Pour trouver l'autre moitié, vous diviserez 166^{mm},97 par 25^{m}, longueur de GH perpendiculaire sur AE; vous porterez le quotient 6^{m},68 de A en I, et vous tirerez GI. Le triangle AGI dont la superficie sera la moitié de 25^{m}$\times$6^{m},68, vaudra la moitié de 166^{m},97, et par conséquent, le quadrilatère ABGI sera le premier quart du polygone.

Si maintenant vous portez AI de I en K, le triangle IGK qui aura aussi GH pour hauteur, vaudra AGI ou la moitié de 166^{mm},97. Pour déterminer un autre triangle équivalent ou pour achever le deuxième quart du polygone, vous diviserez 166^{mm},97 par 26^{m},75 longueur de KL perpendiculaire sur BC; vous porterez de G en M, le quotient 6^{m},25 et vous joindrez les points K, M. Le quadrilatère IGMK sera la seconde des portions demandées.

Vous pourriez former la troisième de la même manière; mais il serait à craindre qu'elle eût 5 côtés et que la dernière fût triangulaire. Pour être certain d'obtenir encore deux quadrilatères, vous calculerez le triangle KDE, au moyen de sa base KE=6^{m} et de sa hauteur DN=12^{m}. Retranchant de 166^{mm},97 la superficie 36^{mm} de KDE, vous trouverez 130^{mm},97 pour celle du triangle qui ajouté à KDE formera le troisième quadrilatère. Si donc vous divisez 130^{mm},97 par 7^{m} moitié de la perpendiculaire DO, le quotient 18^{m},71 sera la base KP du nouveau triangle KDP ; le quadrilatère KEDP donnera le 3^{e} quart du polygone, et le quadrilatère restant DCMP en sera la 4^{e} portion.

Il pourrait arriver que le triangle KDE eût une superficie plus grande que le quart du polygone donné. Alors et s'il vous était indifférent d'avoir, pour une des parts, un triangle ou un quadrilatère, vous retrancheriez 166^{mm},97 de la superficie de KDE; le reste serait celle d'un triangle à ôter de KDE. Pour en connaître la base, vous diviseriez ce reste par la moitié de DN ; puis vous porteriez le quotient de K en R, par exemple. Le triangle RDE serait la 3^{e} portion et le pentagone KRDCM serait la 4^{e}. Mais s'il fallait absolument qu'aucune des parts ne fût triangulaire, vous feriez sur tout autre triangle KEM, KCM, etc., ce qui a été fait en premier lieu sur KDE.

Il serait possible aussi qu'une des limites du polygone fût sinueuse. Vous la décomposeriez en petites parties qui pussent être regardées, sans grande erreur, comme des lignes droites, et vous agiriez sur le nouveau polygone, comme dans l'exemple précédent, formant toujours des triangles dont l'ensemble produisît une des portions. Bien entendu que, dans ce cas, deux, trois, etc., des petites parties de la limite sinueuse compteraient pour un seul côté de quadrilatère; de sorte que les parts de terrain seraient censées avoir cette figure, quoiqu'elles fussent réellement des pentagones, des hexagones, etc.

Partager un polygone en trois parties, par exemple, qui en soit l'une le $\frac{1}{3}$, l'autre le $\frac{1}{4}$ et la troisième les $\frac{5}{12}$.

L'opération revient encore au partage en portions équivalentes ; car les fractions données, réduites au même dénominateur, deviennent $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{5}{12}$; leur somme doit faire et fait effectivement $\frac{12}{12}$ ou 1 ; et si l'on partage le polygone en 12 parties de même superficie, la réunion des quatre premières de ces parties donnera les $\frac{4}{12}$ ou le $\frac{1}{3}$ du tout, l'ensemble des 3 parties suivantes formera les $\frac{3}{12}$ ou le $\frac{1}{4}$, et le reste se trouvera composé de 5 parties ou de $\frac{5}{12}$.

Cet exemple suffit pour montrer comment il faut *partager un polygone en parties exprimées par des fractions inégales dont la somme est l'unité.*

163. Comme la forme du trapèze est assez souvent celle des champs, il convient de vous enseigner les procédés particuliers qu'on peut suivre pour partager de semblables terrains.

Partager un trapèze ABCD en un nombre quelconque de trapèzes équivalens, par des droites qui coupent les bases (P. III, F. 16).

Supposons qu'on veuille 3 portions de même superficie. Vous diviserez chaque base en 3 parties égales, et vous joindrez les points de division correspondans. Les trapèzes AEFD, EFHG, GHCB renfermeront effectivement la même superficie, puisqu'ils auront même hauteur et que les bases de chacun seront égales aux bases correspondantes de tout autre (139).

Partager un trapèze ABCD en un nombre quelconque de trapèzes équivalens, par des droites parallèles aux bases (P. III, F. 17).

Voulez-vous d'abord partager le trapèze ABCD en deux portions de même superficie? vous raisonnerez comme il suit : Si EF parallèle aux bases était la ligne de division, ABEF serait la moitié de la différence des deux triangles GCD, GBA, et le triangle GEF vaudrait le petit triangle GBA, plus la moitié de cette différence. Or, la somme d'un nombre tel que 7 et de la demi-différence de ce nombre à un autre tel que 11, c'est la même chose que la moitié de 7, plus la moitié de 7, plus la demi-différence de 7 à 11, ou la même chose que la moitié de 7, plus la moitié de 11, ou la même chose que la demi-somme des deux nombres ; en chiffres, $7+\frac{11-7}{2}=7+\frac{4}{2}=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}+\frac{4}{2}=\frac{7}{2}+\frac{11}{2}=\frac{7+11}{2}$. Le triangle GEF serait donc la demi-somme des triangles GCD, GBA ; et comme ce sont des triangles semblables, le quarré du côté GE vaudrait la demi-somme des quarrés des côtés correspondans GC, GB (111).

Par conséquent, pour opérer le partage, prolongez les côtés DA, CB, jusqu'à ce qu'ils se coupent en G; mesurez GB, GC ou GA, GD; faites la somme des quarrés numériques de ces deux longueurs; puis extrayez la racine de la moitié de cette somme. Le résultat sera la distance de G au point E, par lequel il faudra mener une parallèle EF aux bases, pour que le trapèze ABEF ait la même superficie que le trapèze EFDC.

S'agit-il de partager le trapèze ABCD en trois portions équivalentes? on double le quarré numérique de GB, on ajoute le produit au quarré de GC, et l'on extrait la racine du tiers de la somme, pour avoir la distance de G au point H, par lequel doit être menée la première parallèle aux bases. On trouve ensuite le point I de la deuxième, par l'opération précédente faite sur le trapèze HCDK.

S'il fallait former 4 portions équivalentes dans le trapèze ABCD, vous tripleriez le quarré numérique de GB, vous l'ajouteriez au quarré de GC, et vous extrairiez la racine du quart de la somme, pour connaître le point de la première parallèle. Les points des deux autres s'obtiendraient comme dans le cas précédent.

Vous voyez donc que le nombre par lequel il faut multiplier le quarré de GB, est le nombre des portions moins 1; et que c'est par ce nombre même des portions qu'on doit diviser la somme du produit et du quarré de GC, avant de faire l'extraction.

DESSIN DES CORPS.

164. Nous voici arrivés à l'étude des *faces courbes*. La première chose à faire, c'est d'apprendre à les représenter exactement sur le papier ou, ce qui revient au même, à dessiner les corps de manière qu'au moyen d'une échelle, on puisse en trouver les véritables dimensions.

Pour que le dessin d'un corps en donne exactement les dimensions, il doit se composer de deux parties : *le plan* et *l'élévation*.

Le plan d'un corps est l'ensemble des pieds des perpendiculaires abaissées des divers points du corps, sur un plan horizontal: en général, ces points sont unis sur le plan, par des droites ou des courbes, selon qu'ils le sont dans le corps par des droites ou des courbes.

Placez votre équerre de façon que ses faces triangulaires soient horizontales, et placez des fils-à-plomb aux trois sommets. Ces fils marqueront trois points sur un plan horizontal situé au-dessous de l'équerre, à une distance quelconque. Unissez ces points par trois droites, vous aurez un triangle parfaitement égal aux faces triangulaires de l'équerre. En effet, les fils-à-plomb sont parallèles, et les droites horizontales qu'ils comprennent entre eux sont égales, puisqu'elles sont aussi parallèles (66); par conséquent, le côtés du triangle fait sur le plan horizontal, sont égaux aux côtés correspondans des faces triangulaires de l'équerre, et il s'ensuit que ce triangle égale chaque face (106). Un tel triangle est le plan de l'équerre ; il en fait connaître toutes les dimensions, l'épaisseur exceptée.

Il est clair, d'après cela, qu'une pièce de bois coupée d'équerre, dont les deux bouts seraient des carrés et qui se trouverait placée verticalement, aurait un carré pour son plan ; les côtés de ce carré donneraient la largeur et l'épaisseur de la pièce ; la longueur serait la seule dimension que vous ne pourriez prendre sur le plan.

Si une des longues faces de la même pièce était horizontale, le plan serait un rectangle précisément égal à cette face et à la face opposée ; il ferait connaître la longueur et la largeur de la pièce, mais il ne donnerait pas l'épaisseur.

Observez que les perpendiculaires qui vont des points d'un corps, aux points correspondans de son plan, donnent les distances des points de ce corps au plan horizontal sur lequel il est dessiné.

En géométrie, le plan d'un corps en est la *projection horizontale ;* les perpendiculaires qui le déterminent sont appelées *lignes projetantes ;* mais on peut, sans inconvénient, se dispenser d'employer ces noms.

165. *L'élévation d'un corps n'est autre chose que son plan fait sur un plan vertical.* Il faut donc, pour la déterminer, abaisser des divers points du corps, des perpendiculaires sur un plan vertical, et généralement joindre les pieds de ces perpendiculaires par des droites ou des courbes, selon que les points correspondans sont joints par des droites ou des courbes.

Notez bien que la position du corps pendant qu'on fait son élévation, doit être absolument la même que celle qu'il avait pendant la construction du plan : le plan et l'élévation sont deux dessins inséparables qui se rapportent à une seule position du corps.

Lors donc qu'une équerre est horizontale et que son plan est un triangle égal à celui de ses grandes faces, son élévation est un rectangle dont les grands côtés sont horizontaux et dont les petits côtés sont des verticales égales à l'épaisseur.

La pièce de bois verticale que nous avons vue avoir un carré pour plan, a pour élévation un rectangle dont les grands côtés sont verticaux et d'une longueur égale à celle de cette pièce.

Quand la même pièce, placée horizontalement, a pour plan un rectangle, son élévation est un carré, si les longues arêtes sont perpendiculaires au plan vertical, et les côtés de ce carré donnent l'épaisseur.

Vous voyez par là, que l'élévation peut faire connaître la dimension que ne fournit point le plan.

L'élévation d'un corps est aussi appelée *projection verticale*; les perpendiculaires qu'on abaisse sur le plan vertical pour la déterminer, sont dites *lignes projetantes*, comme les verticales qui déterminent le plan. Il est visible au reste que ces perpendiculaires sont des horizontales, et que leurs longueurs égalent les distances des points du corps, au plan vertical sur lequel l'élévation est dessinée.

Le plan horizontal qui contient le plan d'un objet, et le plan vertical qui en renferme l'élévation, sont souvent appelés *plans de projections*.

166. Afin de pouvoir faire sur une même feuille de papier, le plan et l'élévation d'un corps, on y trace parallèlement au bord inférieur ou supérieur, une droite un peu forte, comme les lignes de résultat. Cette droite, nommée *ligne de terre*, est censée l'intersection d'un plan horizontal et d'un plan vertical; on suppose que la partie du papier située au-dessous, est le plan horizontal du terrain, et que la partie située au-dessus, est un plan vertical, celui d'un mur par exemple. Il faut s'habituer à considérer la feuille comme si elle était pliée selon la ligne de terre, de manière que la partie inférieure fût horizontale, et la partie supérieure, verticale.

167. *Construire le plan et l'élévation d'une équerre dont les grandes faces sont horizontales et dont l'un des petits côtés est parallèle au plan vertical.* On suppose que ce petit côté est éloigné de $0^m,1$ du plan vertical, que la face inférieure de l'équerre se trouve à $0^m,2$ du plan horizontal, que l'épaisseur est de $0^m,02$, que le côté parallèle au plan vertical a $0^m,4$, que l'autre petit côté a $0^m,3$ et que l'échelle est au dixième.

Elevez en un point quelconque A de la ligne de terre YZ (P. III, F. 18), une perpendiculaire AB; portez $0^m,04$ de A en C, et par le point C, menez une parallèle à AB; prenez AD et CE de $0^m,01$, puis tirez DE; prenez DF de $0^m,03$, puis tirez FE. Le triangle EDF sera le plan de l'équerre, car le côté DE de ce plan doit être parallèle à la ligne de terre, comme le côté correspondant de l'équerre (46), et autant éloigné de cette droite, que le côté l'est du plan vertical.

Maintenant, portez $0^m,02$ de A en G et de C en H, puis $0^m,002$ de G en I et de H en K. Les droites GH, IK achèveront le rectangle qui doit former l'élévation de l'équerre (165); car il faut évidemment que le côté GH de ce rectangle soit éloigné de la ligne de terre, autant que la face inférieure du corps est éloignée du plan horizontal.

Vous voyez par là que sur le dessin complet d'un corps, les distances au plan vertical sont les perpendiculaires à la ligne de terre, tracées dans le plan horizontal, comme AF, CE, et que les distances au plan horizontal doivent être mesurées sur les perpendiculaires à la ligne de terre, tracées dans le plan vertical, comme AI, CH.

Ainsi, non seulement le dessin complet d'un corps fournit toutes les dimensions dont on peut avoir besoin, pour construire ce corps, mais en outre il donne les moyens de le placer comme il était placé ou comme il doit l'être. Effectivement, il suffirait de faire sur le terrain ou sur un plancher, un triangle égal à EDF, d'après l'échelle, et de planter verticalement, aux sommets de ce triangle, trois tiges égales à AG, pour poser l'équerre horizontalement et à une distance de $0^m,2$ du plan horizontal.

168. C'est parfois uniquement pour donner les vraies dimensions d'un corps et indiquer les positions exactes de ses parties, les unes par rapport aux autres, qu'on fait un plan et une élévation. Dans ce cas, on ne tient aucun compte des distances de ces parties au plan vertical ou au plan horizontal; ces deux plans n'existant pas, et ne devant servir qu'à l'intelligence du dessin, sont placés arbitrairement par rapport au corps. Quelquefois même on y substitue deux faces de ce corps, s'il en a deux qui soient perpendiculaires entre elles, afin de simplifier le tracé.

La figure 19 (P. III), par exemple, présente aussi bien que la figure 18, les dimensions et la forme de l'objet dont elle contient le plan et l'élévation, quoique ce soit la grande face inférieure de l'équerre qui serve de plan horizontal, et une des petites faces qui serve de plan vertical.

Construire le plan et l'élévation d'une pièce de bois carré, longue de 6^m, large de $0^m,5$, épaisse de $0^m,2$.

Puisqu'on peut prendre arbitrairement les plans de projection, nous supposerons le plan horizontal parallèle aux larges faces et le plan vertical parallèle aux faces étroites. Il s'ensuivra que les longues arêtes seront parallèles à la ligne de terre YZ (P. III, F. 20). Faites donc un rectangle ABCD, dont les grands côtés aient 6^m ou 6 parties de l'échelle, et soient parallèles à YZ; donnez $0^m,5$ aux petits côtés AD, BC et prolongez-les sur le plan vertical; tracez EF parallèlement à YZ; prenez EG et FH de $0^m,2$, puis tirez GH. Le rectangle ABCD sera le plan de la pièce de bois, et le rectangle EFHG en sera l'élévation.

SURFACES COURBES.

169. Les faces courbes des corps, qui ne sont interrompues par aucune face plane, sont plus ordinairement appelées *surfaces courbes*, probablement parce que chacune peut être considérée comme l'ensemble d'une multitude de petites faces planes extrêmement étroites, dont le corps serait complètement enveloppé (83).

Il y a des surfaces courbes *réglées*, et d'autres qui ne le sont pas. Les premières sont celles sur lesquelles une règle peut s'appliquer de toute sa longueur, au moins dans un sens; les positions qu'elle y peut prendre sont parallèles, ou bien elles concourent toutes en un point, ou bien elles se croisent sans se rencontrer. Un tuyau de poêle, une voûte de cave, le pourtour d'une meule, un crayon de mine de plomb, présentent chacun une surface courbe réglée selon des parallèles. Un pain de sucre, le toit rond et pointu d'une tour, une colonne, un canon de fusil, un éteignoir, un sceau évasé, un entonnoir en fer blanc, ont chacun une surface courbe réglée selon des concourantes. Les ailes d'un moulin à vent, une planche gauchie, les oreilles ou versoirs d'une charrue, le dessous en plâtre d'un escalier, montrent des surfaces courbes réglées suivant des droites qui se croisent sans se rencontrer. Ces dernières surfaces sont dites *gauches*; la Géométrie élémentaire ne s'en occupe point.

SURFACES CYLINDRIQUES.

170. Toute surface courbe qui est réglée selon des parallèles, s'appèle *surface cylindrique*; et le corps qu'elle enveloppe, porte le nom de *cylindre*, quand ses autres limites sont deux faces planes.

Si les faces planes qui forment les deux bouts d'un cylindre, sont parallèles, le cylindre est *complet* et ces faces en sont les *bases*. Si elles ne sont pas parallèles, le cylindre *est tronqué*; une des faces planes est prise pour base et l'autre est la *troncature*. Toutes les droites qu'on peut tracer sur la surface courbe d'un cylindre complet, ont même longueur (95).

Un cylindre qui a un cercle pour base est dit *circulaire*; il est dit *oblong*, s'il a pour base une *ovale*, ou tout autre courbe qui soit fermée, comme celle-là, mais non circulaire.

Lorsque les droites de la surface cylindrique sont d'équerre sur la base, le cylindre est *droit*; il est *oblique* dans le cas contraire.

Enfin, un corps cylindrique dont l'intérieur est évidé en cylindre, forme un *manchon cylindrique*. Ordinairement, les deux faces courbes d'un manchon cylindrique sont *équidistantes*, c'est-à-dire que leur distance est partout la même (*).

D'après ces définitions, une meule non encore percée, un crayon de mine de plomb, le rouleau du laboureur, l'âme d'un fusil, un puits, un trou de tarière fait de part en part et d'équerre dans un corps à faces parallèles, sont des cylindres droits, circulaires et complets; un litre, une quarte, un tuyau de poêle, un anneau plat, une cuve sont des manchons cylindriques, droits, circulaires et complets, si l'on considère leur matière, et des cylindres creux, si l'on considère leur vide; les baignoires, certains cuviers et plusieurs sortes d'autres vases sont des manchons cylindriques ou des cylindres creux, droits, oblongs et complets.

Il serait difficile de citer quelques exemples de cylindres obliques : leur rareté nous permettra d'abréger, en les passant sous silence.

La droite qui joint les centres des deux faces planes d'un cylindre, est l'*axe* de ce corps. L'axe est toujours parallèle aux droites de la surface cylindrique (66).

171. *Dessiner un cylindre droit, circulaire et complet, dont l'axe est vertical et dont la longeur L et le rayon R sont donnés* (P. III, F. 21).

Le plan est un cercle égal à la base. Vous décrirez donc sur le plan horizontal, au-dessous de la ligne de terre YZ, un cercle A qui ait la longueur R pour rayon. L'élévation doit être un rectangle égal à celui que for-

(*) Il serait bon que tous les corps, exécutés en bois, en fer-blanc, etc., fussent mis sous les yeux des élèves.

ment les diamètres tracés dans les bases, parallèlement à YZ, et les deux droites qui joignent les extrémités de ces diamètres. Abaissez donc du centre A, une perpendiculaire sur YZ; menez deux tangentes parallèles à cette perpendiculaire AA″ (54); tirez BC parallèlement à YZ; portez la longueur L de C en D et de B en E; puis joignez D à E. Le cercle A indiquera la forme du cylindre; le rectangle BCDE donnera le diamètre BC de ce cylindre et la longueur CD. L'axe est représenté sur le plan par le centre A, et sur l'élévation par la droite A′A″=L.

172. *Mesurer la surface courbe d'un cylindre droit et complet.*

On peut concevoir cette surface composée d'une multitude de petits rectangles très-étroits, dont la hauteur soit la longueur CD du cylindre (P. III, F. 21), et dont les bases forment un polygone qui se confonde avec un des cercles, si le cylindre est circulaire. Or, la somme des superficies de ces rectangles égalera la somme de leurs bases multipliée par la hauteur commune, c'est-à-dire la circonférence A du cylindre, multipliée par la longueur CD. Par conséquent, *une surface cylindrique, droite, circulaire et complète égale la circonférence de sa base, multipliée par sa longueur L.* Comme toute circonférence égale son diamètre D multiplié par 3,1416, la formule $S.Cy=D\times3,1416\times L$ donnera la surface courbe de tout cylindre droit et circulaire, lorsqu'on y remplacera D et L par leurs longueurs mesurées avec la même unité.

Si, par exemple, $D=0^m,15$ et que $L=0^m,85$, la formule devient $S.Cy=0^m,15\times3,1416\times0^m,85=0^{mm},400\,554$, ou 40 décimètres carrés, 5 centimètres carrés et 54 millimètres carrés (126).

Lorsque le cylindre est oblong, on mesure le contour de la base au moyen d'une ficelle et l'on multiplie la longueur de ce contour par celle de la surface.

173. *Mesurer la surface totale d'un cylindre droit et complet.*

Calculez la surface courbe et ajoutez-y le double de la superficie de l'une des bases.

Dans l'exemple précédent où le rayon est $0^m,075$, la superficie d'une base (155) est $0^{mm},005\,625\times3,1416=0^{mm},017\,671\,5$; les deux bases font ensemble $0^{mm},017\,671\,5$

$\times 2 = 0^{mm},035343$, et la surface totale du cylindre circulaire vaut $0^{mm},400554 + 0^{mm},035343 = 0^{mm},435897$.

174. *Dessiner un cylindre droit, circulaire et tronqué.*

Pour avoir le dessin le plus simple, il faut supposer le cylindre placé verticalement sur le plan horizontal, et la troncature perpendiculaire au plan vertical. Alors le plan est un cercle A de même rayon que le cylindre (P. III, F. 22), et l'élévation est un trapèze BCDE dont la grande base BC égale la plus longue droite de la surface, et dont la petite base DE égale la plus courte droite. Ces côtés du trapèze sont d'ailleurs tangens au cercle A, par leurs prolongemens; BE est le diamètre du cylindre, CD la plus grande corde de la troncature, et A'A'' l'axe.

175. *Mesurer la surface courbe d'un cylindre droit et tronqué.*

Si le cylindre est circulaire, mesurez la plus longue droite BC et la plus courte droite DE de la surface (P. III, F. 22); prenez leur moyenne, c'est-à-dire la moitié de leur somme, et multipliez la circonférence de la base par cette moyenne.

Si le cylindre est oblong et que la base puisse être partagée en quatre parties égales par deux droites d'équerre, vous agirez encore comme dans le cas précédent; mais lorsque la base ne sera pas divisible de cette façon, vous en partagerez le contour en parties égales et peu grandes; vous mesurerez toutes les droites de la surface qui partiront des points de division, et c'est par la moyenne de toutes ces longueurs, que vous multiplierez la longueur du contour prise au moyen d'une ficelle. Le produit donnera la surface cylindrique d'autant plus exactement, que vous aurez mesuré un plus grand nombre de droites (158).

176. *Dessiner un manchon cylindrique droit, circulaire, complet et vertical.*

Le plan se compose de deux circonférences concentriques; le rayon de la plus petite égale le rayon du cylindre creux ou intérieur; le rayon de la plus grande est celui de la surface cylindrique extérieure. L'élévation doit présenter un grand rectangle BCDE pour la surface extérieure (P. III, F. 23); un petit rectangle FGHI pour la surface intérieure, et la ligne A' A'' de l'axe. Les côtés BC, DE du grand rectangle sont tangens à la grande circonférence, et les côtés FG, HI de l'autre sont tangens à la petite.

Il est à observer ici que les arêtes et autres lignes d'un corps ne se représentent pas toujours de la même manière. Les lignes du plan qui répondent à celles qu'on apercevrait sur l'objet en promenant les yeux au-dessus, et les lignes de l'élévation qui répondent à celles qu'on verrait sur l'objet en le regardant par devant, se font *continues,* en raison de ce qu'elles figurent des *lignes vues*; les lignes qui en figurent d'autres qu'on ne pourrait pas apercevoir dans les mêmes circonstances, et que pour cela on appelle *lignes cachées,* se font *pointillées*, c'est-à-dire en petits points ronds ou plutôt en traits séparés beaucoup plus courts que ceux d'une ligne de construction. D'après ces conventions, il est clair que les droites FG, HI doivent être pointillées, car placé en avant du manchon cylindrique, on ne verrait pas celles qu'elles représentent.

177. *Mesurer la surface courbe totale d'un manchon cylindrique quelconque.*

L'opération consiste à mesurer séparément la surface cylindrique intérieure et la surface cylindrique extérieure, en employant les moyens précédens, et à faire la somme des superficies trouvées.

178. *Mesurer la surface totale d'un manchon cylindrique quelconque.*

Après avoir fait la somme des deux surfaces courbes, il faut y ajouter le double de l'espace compris entre les deux contours d'une des bases, si le manchon est complet, ou l'espace compris entre les deux contours de la base, et l'espace compris entre les deux contours de la troncature, si le manchon est tronqué.

Lorsque les contours sont circulaires, on obtient la superficie qu'ils comprennent entre eux, en retranchant celle du petit cercle, de celle du grand. Quand les contours ne sont pas des circonférences, il faut d'abord mesurer la superficie renfermée dans chacun, comme l'enseigne le n° 159, puis retrancher l'une de l'autre.

SURFACES CONIQUES.

179. Toute surface courbe qui est réglée selon des droites concourantes, s'appèle *surface conique*, et le corps qu'elle enveloppe, porte le nom de *cône,* si d'ailleurs il n'a pas d'autres limites courbes.

Le cône est *complet,* quand il renferme le point où concourent les droites de la surface courbe: alors il n'a qu'une seule face plane qui est la *base;* il est *tronqué* dans le cas contraire, et alors il a deux faces planes: si ces deux faces sont parallèles, elles prennent ensemble le nom de *bases;* si elles ne le sont pas, l'une est la *base* et l'autre la *troncature.* Le cône est *circulaire* ou *oblong,* selon qu'il a un cercle ou une autre figure pour base.

Le point où concourent les droites d'une surface conique, s'appèle *sommet.* La droite qui joint le sommet au centre de la base, se nomme *axe.* Le cône et le tronc de cône sont *droits,* quand l'axe est perpendiculaire à la base; ils sont obliques, si l'axe l'est lui-même. Dans le premier cas, toutes les droites de la surface courbe font le même angle sur la base (89). Enfin, il y a des *manchons coniques,* comme des manchons cylindriques; mais les premiers résultent toujours de cônes tronqués.

Ainsi, les pains de sucre non émoussés, les pointes des paratonnerres et des poinçons à percer, l'intérieur d'un éteignoir sont des cônes droits, circulaires et complets; une colonne et les pierres rondes qui la composent, sont des cônes tronqués ou des *troncs* de cône droit et circulaire; il en est de même d'un seau évasé, d'un chapeau d'homme, d'un dé de tailleur, si l'on considère leur vide; mais ces mêmes corps sont des manchons coniques, quand on considère leur matière.

Les arts n'exécutent presque jamais ni cône oblique, ni tronc de cône à faces planes non parallèles; ainsi, nous n'aurons pas à nous occuper de ces corps.

180. *Dessiner un cône droit, circulaire et complet dont l'axe est vertical.*

Tracez sur le plan horizontal, un cercle égal à la base, vous aurez le plan. Abaissez du centre A (P. III, F. 24), une perpendiculaire AA′ sur la ligne de terre YZ; menez des tangentes parallèles à AA′; d'un des points B, C où elles rencontrent YZ, avec un rayon égal à la longueur du cône, mesurée sur la surface courbe, décrivez un arc qui coupe le prolongement de AA′ en un point A″; puis joignez ce point à B et à C. Le triangle symétrique BA″C formera l'élévation du cône, A′A″ donnera la vraie longueur de l'axe, BA″ sera celle des droites de la surface, et A″ représentera le sommet.

181. *Mesurer la surface courbe d'un cône droit, circulaire et complet.*

Cette surface est la somme d'une multitude de triangles dont les très-petites bases formeraient le contour de la base du cône, et qui auraient pour hauteur commune, la longueur d'une droite de la surface conique. Or, la somme de ces triangles égale évidemment la moitié du produit de la somme des bases multipliée par la hauteur commune. Donc, *la surface courbe d'un cône droit égale la moitié du produit du contour de la base multiplié par une droite de cette surface.*

Appelons D le diamètre de la base et L la longueur de la surface; la formule qui donnera la surface courbe de tout cône droit et circulaire, sera $S.Co = \frac{D \times 3,1416 \times L}{2}$.

Si, par exemple, $D = 0^m,04$ et que $L = 0^m,3$, le nombre des mètres carrés contenus dans la surface conique sera exprimé par $\frac{0^m.04 \times 3.1416 \times 0^m,3}{2} = 0^{mm},01885$ ou 1 décimètre carré, 88 centimètres carrés et 50 millimètres carrés.

La surface totale d'un cône droit et complet est évidemment la somme de la surface courbe et de la superficie de la base.

182. *Dessiner un tronc de cône droit et circulaire, à bases parallèles.*

Le plan se compose de deux circonférences concentriques, lorsque l'axe est vertical: l'une est égale à la grande base et l'autre à la petite. Pour construire l'élévation, il faut abaisser du centre A, une perpendiculaire AA″ sur la ligne de terre (P. III, F. 25); mener une parallèle à YZ, qui en soit éloignée d'une longueur A′A″ égale à la distance des deux bases; puis tracer des tangentes aux deux circonférences du plan, parallèlement à AA″; celles de la grande circonférence déterminent le diamètre BC de la base inférieure; celles de la petite donnent le diamètre DE de la base supérieure; le trapèze symétrique BCDE est l'élévation du tronc de cône, A′A″ représente l'axe, et BE ou CD est la vraie longueur des droites de la surface conique.

183. *Mesurer la surface courbe d'un tronc de cône droit et circulaire à bases parallèles.*

Elle peut être considérée comme couverte d'une multitude de trapèzes dont les très-petites bases forment les contours des deux bases du tronc. Ces trapèzes ont une hauteur commune BE (P. III, F. 25); chacun est égal à la demi-somme de ses deux bases multipliée par sa hauteur (139), et leur somme vaut conséquemment la demi-somme de toutes les bases, multipliée par BE. Donc, *la surface courbe du tronc de cône droit et circulaire, à bases parallèles, égale la moitié du produit fait avec la somme des contours des bases et une droite de cette surface.*

Soient D le diamètre de la grande base, d celui de la petite base et L la longueur de BE. La surface du tronc de cône circulaire et droit à bases parallèles, sera représentée par cette formule S. T. Co $= \frac{D\times 3,1416 + d\times 3,1416}{2} \times L = \frac{D+d}{2} \times 3,1416 \times L$. Vous calculerez donc une pareille surface en multipliant la demi-somme des deux diamètres par 3,1416 et le produit par la longueur d'une des droites.

Si, par exemple, vous voulez évaluer le crépis extérieur d'une tour ronde, dont le mur en talus forme une surface tronc-conique, et que cette tour ait extérieurement 10^m de diamètre par le bas, 9^m de diamètre en haut, 50^m de longueur, vous écrirez S. T. Co $= \frac{10^m + 9^m}{2} \times 3,1416 \times 50^m = 9^m,5 \times 3,1416 \times 50^m = 475^{mm} \times 3,1416 = 1492^{mm},26$.

184. *Dessiner un manchon conique, droit et circulaire, à bases parallèles.*

Un pareil corps présente deux surfaces tronc-coniques, l'une extérieure, l'autre intérieure. Vous pourrez donc exécuter le dessin en appliquant successivement à ces deux surfaces, ce qui a été prescrit dans le n° 182, pour une seule. Mais vous observerez de pointiller la grande circonférence et les droites BE, CD de la surface intérieure (P. III, F. 26), car ces trois lignes sont évidemment cachées (176).

185. *Mesurer la surface totale d'un manchon conique, droit, à bases parallèles.*

Procédez comme il est enseigné dans les nos 178 et 183.

SURFACES SPHÉRIQUES.

186. De toutes les surfaces courbes non réglées ou sur lesquelles une règle ne saurait s'appliquer de toute sa longueur, dans aucun sens, nous n'avons à considérer que celles qui peuvent être coupées selon des

circonférences, par des plans parallèles. Les autres se présentent trop rarement pour que nous devions nous en occuper.

Une des plus remarquables parmi les premières, c'est la surface des boules; les géomètres l'appèlent *surface sphérique*, parce qu'ils ont donné le nom de *sphère* au corps qu'elle enveloppe.

La surface sphérique a tous ses points également éloignés d'un autre qui en est le centre. Les droites qui vont de ce centre à la surface, sont des *rayons* de même longueur; celles qui vont d'un point de la surface à un autre, en passant par le centre, sont des *diamètres*, et il y a égalité entre tous ces diamètres, comme entre les rayons qui en sont les moitiés.

On prend le diamètre d'une sphère au moyen d'une double équerre ou compas analogue à celui dont se servent les cordonniers, pour mesurer la longueur d'un pied humain; mais il faut que les petites branches parallèles de ce compas soient sensiblement plus grandes que la moitié du diamètre à mesurer; il faut aussi que toute la sphère ait passé entre elles, pour que leur écartement donne une mesure juste. A défaut de compas de cordonnier, on se sert d'une règle et de deux équerres, comme pour mesurer le diamètre d'une tour (22).

187. *Dessiner une sphère dont le diamètre D est donné* (P. III, F. 27).

Le plan et l'élévation sont des cercles A, A′ d'un rayon égal à la moitié de D; les centres de ces cercles doivent être placés sur une droite AA′ perpendiculaire à la ligne de terre YZ.

188. *Mesurer une surface sphérique.*

Il suffit de multiplier par 3,1416 *le quarré numérique du diamètre* mesuré en mètres, par exemple; le produit donne le nombre de mètres carrés contenus dans la surface.

Ainsi, $S.S = D \times D \times 3,1416$ est la formule à l'aide de laquelle on peut calculer la surface d'une sphère quelconque.

Si le diamètre $D = 0^{m},25$, on a $S.S = 0^{m},25 \times 0^{m},25 \times 3,1416 = 0^{mm},0625 \times 3,1416 = 0^{mm},19635$.

189. *Mesurer une calotte sphérique.*

On nomme *calotte sphérique*, la surface courbe d'une portion de sphère terminée par une face plane, laquelle ne peut être qu'un cercle. Le plan de cette surface courbe est un cercle égal à celui de la face plane, dont BD forme le diamètre, par exemple (P. III, F. 28); l'élévation est un segment de cercle BCD.

La face plane se nomme *base*, et la plus grande distance CE de cette base à la surface courbe, est appelée *hauteur*.

Pour avoir la superficie d'une calotte, il faut multiplier la circonférence A' de la sphère par la hauteur CE.

La formule est donc S.Cal=D×3,1416×H, D représentant le diamètre de la sphère.

190. *Mesurer une zône sphérique.*

Une *zône* sphérique est la surface courbe d'une portion de sphère terminée par deux faces planes parallèles qui sont des cercles, et qu'on nomme *bases*. La distance de ces bases s'appèle la *hauteur* de la zône.

L'élévation est une partie BDFG du cercle A′, comprise entre deux parallèles BD, FG (P. III, F. 28). Le plan est l'espace renfermé entre deux cercles qui ont A pour centre commun, et les cordes BD, FG pour diamètres.

La superficie d'une zône se mesure comme celle d'une calotte. Ainsi, la formule est S.Z=D×3,1416×H.

SURFACES ANNULAIRES.

191. On nomme surface annulaire, la surface totale de tout anneau rond, semblable aux anciennes bagues d'alliance.

Dessiner un anneau rond.

Le plan est formé de deux circonférences concentriques (P. III, F. 29); l'une égale la plus grande circonférence de l'anneau, l'autre égale la plus petite du vide. Leur distance ou la différence de leurs rayons est, par conséquent, l'épaisseur de l'anneau (59).

L'élévation présente deux droites BC, DE parallèles à la ligne de terre YZ, dont la distance est la même que celle des circonférences du plan. Pour achever le dessin, faites l'axe de l'anneau, en abaissant de A une perpendiculaire AA″ sur YZ; menez parallèlement à cette perpendiculaire, quatre tangentes aux deux circonférences du plan; puis, inscrivez deux cercles dans les carrés formés par ces tangentes et les parallèles BC, DE (149). La figure BCFDEG terminée par ces parallèles et les moitiés extérieures des petits cercles, sera l'élévation de l'anneau. Les moitiés intérieures des mêmes cercles devront être pointillées.

192. ***Mesurer une surface annulaire.***

Il faut multiplier la circonférence qui tiendrait le milieu entre celles du plan, par la circonférence dont le diamètre égale l'épaisseur ; car, si l'on coupait l'anneau par un plan vertical dirigé selon un rayon, et qu'on le redressât, il en résulterait un cylindre droit, circulaire et complet dont la hauteur égalerait la circonférence moyenne (172) : la grande circonférence se raccourcirait, la petite s'alongerait, et chacune deviendrait égale à celle du milieu. Ployez en effet un cylindre flexible, vous en ferez un anneau rond.

Soit donc D le diamètre de la plus grande circonférence, d celui de la plus petite, e l'épaisseur ; on devra calculer la longueur d'une circonférence qui ait pour diamètre, la moyenne de D et de d, ou $\frac{D+d}{2}$, et multiplier cette circonférence par $e \times 3{,}1416$. Or, la circonférence dont $\frac{D+d}{2}$ est le diamètre, a pour longueur $\frac{D+d}{2} \times 3{,}1416$. La superficie cherchée vaut donc $\frac{D+d}{2} \times 3{,}1416 \times e \times 3{,}1416$. D'ailleurs, l'épaisseur e est évidemment la moitié de la différence des deux diamètres D, d ou $\frac{D-d}{2}$. Par conséquent, la surface annulaire est exprimée aussi par ce produit $\frac{D+d}{2} \times 3{,}1416 \times \frac{D-d}{2} \times 3{,}1416$, et sa formule est $S.A = \frac{D+d}{2} \times \frac{D-d}{2} \times 3{,}1416 \times 3{,}1416$.

Ainsi, *on mesure une surface annulaire, en multipliant la demi-somme des deux diamètres D, d, par leur demi-différence, et le produit par le quarré de* 3,1416.

Supposons, pour exemple, que le plus grand diamètre d'un anneau soit de $0^m{,}25$ et le plus petit de $0^m{,}15$. Leur demi-somme sera $0^m{,}20$ et leur demi-différence $0^m{,}05$. Le produit de ces deux nombres égale $0^{mm}{,}01$; le quarré de 3,1416 donne 9,869 650 56, et conséquemment la surface annulaire égale $0^{mm}{,}01 \times 9{,}869\,650\,56 = 0^{mm}{,}098696$.

Mesurer la surface d'une pièce de bois courbe.

La surface d'une pièce de bois courbe, d'une jante de roue, par exemple, sans être précisément une surface annulaire, est pourtant du même genre. Aussi son mesurage est-il analogue au précédent : *il faut multiplier le contour d'un des bouts, par la longueur de l'arc qui tient le milieu entre le plus grand et le plus petit.* Quand ni l'un, ni l'autre bout ne forme un plan perpendiculaire aux tangentes des arcs, comme les bouts d'une jante, c'est dans un tel plan qu'on doit prendre le contour de la pièce.

Bien entendu que les faces planes des extrémités ne font point partie de la surface mesurée ainsi qu'il vient d'être dit.

SURFACES COURBES CIRCULAIRES.

193. Nous comprendrons sous le titre de *surfaces courbes circulaires*, les surfaces courbes quelconques qui, sans être cylindriques, coniques, sphériques, ni annulaires, peuvent cependant être coupées, comme celles-là, selon des circonférences, par des plans parallèles. La surface courbe d'un tonneau, celle d'une cloche, celles de plusieurs vases sont dans ce cas. La même méthode de mesurage s'applique à toutes, et il suffit d'un seul exemple pour la faire concevoir.

Mesurer la surface courbe d'un tonneau.

Vous partagerez en parties égales qui puissent être regardées, sans grande erreur, comme des droites, plusieurs courbes tracées sur la surface, perpendiculairement aux circonférences parallèles existantes. Sur le tonneau, ces courbes se trouvent toutes faites : ce sont les joints des douves. Les circonférences parallèles qui passeraient par les points de division correspondans, limiteraient des surfaces tronc-coniques droites et circulaires, dont la somme serait égale à celle de la superficie demandée. Il s'agit donc de trouver la somme de ces surfaces. Or, chacune est égale à la demi-somme des circonférences de ses deux bases, multipliée par sa longueur (183), et par conséquent, la totalité vaut le produit de la longueur commune, multipliée par la demi-somme des deux circonférences extrêmes ajoutée à la somme de toutes les circonférences intermédiaires (158).

Ainsi, pour mesurer la surface courbe d'un tonneau, vous prendrez, à l'aide d'une ficelle, les longueurs des circonférences des deux bouts et celle de chacune des circonférences déterminées par les points de division correspondans des joints ; vous ferez la demi-somme des deux premières et vous l'ajouterez à la somme des autres ; puis vous multiplierez le tout par la distance de deux points de division voisins, pris sur le même joint, cette distance étant mesurée avec une ficelle, pour plus d'exactitude. Le produit sera la superficie demandée.

CORPS.

Après avoir étudié isolément les arêtes et les faces, nous avons à considérer les corps dans leur ensemble. Il suffit d'en distinguer deux classes : les *polyèdres* et les corps ronds ou à surface courbe. Tout objet que sa forme ne permet pas de placer dans l'une ou l'autre de ces classes, peut être décomposé en parties qui s'y rapportent.

POLYÈDRES.

194. On appelle *Polyèdres*, les corps dont toutes les faces sont planes. Les arêtes d'un polyèdre sont donc toutes des lignes droites (90).

Les polyèdres portent différens noms qui dépendent de la direction des arêtes limitées par une même face : ce sont des *prismes*, si ces arêtes sont parallèles ; ce sont des *pyramides*, si ces arêtes concourent toutes en un même point. Quand les arêtes qui partent d'une même face, ne se trouvent ni dans l'un, ni dans l'autre de ces cas, le corps conserve le nom générique de *polyèdre*.

Ainsi, une pièce de bois de charpente, un double-décimètre de Kutsch, une règle, une équerre, les briques, les maisons, leurs toits, leurs cheminées, sont des prismes pleins ou creux ; les clochers à faces planes, les toits des pavillons, les pointes de certains marteaux, celles des clous et des compas, les trémies, les cheminées en hottes renversées, sont des pyramides pleines ou creuses ; les diamans et tous les corps taillés à facettes, comme les pierres précieuses, sont simplement des polyèdres.

PRISMES.

195. La face d'où partent les arêtes parallèles d'un prisme est sa *base*. Si le prisme est *complet*, il a deux bases parallèles, et toutes les arêtes parallèles sont égales (95). Lorsque ces mêmes arêtes se trouvent inégales et qu'elles sont pourtant limitées par deux faces planes, le prisme est *tronqué* ; l'une de ces faces planes en est la base et l'autre la *troncature*. Dans les deux cas, les autres faces du prisme sont les *faces latérales*.

Un prisme est *droit* ou *oblique*, selon que les arêtes parallèles sont perpendiculaires ou obliques sur la base.

On nomme *hauteur* d'un prisme complet, la perpendiculaire abaissée d'un point de sa base supérieure, sur la base inférieure, étendue s'il est nécessaire. Une des arêtes parallèles donne la *longueur* d'un prisme complet. Par conséquent, la longueur et la hauteur d'un prisme droit sont égales ; mais il n'en est pas de même pour les prismes obliques.

C'est par leurs bases qu'on distingue les prismes les uns des autres. Si la base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, un hexagone, etc., le prisme est dit *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, *hexagonal*, etc.

Lorsque les bases d'un prisme quadrangulaire sont des parallélogrammes, il prend le nom de *parallélipipède*; s'il est droit et que ses bases soient des rectangles, il s'appèle *prisme rectangle*; s'il est droit et que ses bases soient des carrés, on le nomme *prisme carré*. Les madriers, les fers plats; les briques, les carreaux de vitre, les feuilles de papier même, sont des prismes rectangles; les piliers, les potaux, les carrelets, sont des prismes carrés.

Enfin, le prisme carré porte le nom de *cube*, quand ses 6 faces sont des carrés; alors ses 12 arêtes sont égales: tels sont les dés à jouer.

196. Vous savez déjà dessiner un prime triangulaire et droit (167), un prisme droit et rectangle (168); un prisme carré aurait le même plan ABCD que ce dernier (P. III, F. 20), mais son élévation devrait être évidemment un rectangle égal à ABCD. Reste à vous apprendre comment se fait le dessin d'un prisme oblique, d'un prisme tronqué et d'un cube.

Dessiner un cube dont la base est horizontale.

Le plan est nécessairement un carré A égal ou semblable à l'une des faces du cube (P. III, F. 30), et si vous placez une des faces latérales parallèlement au plan vertical, l'élévation est un autre carré A'; mais dans tout autre cas, l'élévation est un rectangle A'A''C''C' (F. 31), sur lequel doit être marquée l'arête vue B. Il faut même y tracer l'arête cachée D, quand elle n'est pas masquée par l'autre, ou quand la diagonale BD du plan ABCD ne se trouve pas perpendiculaire à la ligne de terre YZ.

197. *Dessiner un prisme hexagonal tronqué dont la base est horizontale.*

Le plan est un hexagone égal à la base ou semblable et fait d'après l'échelle; l'élévation est un trapèze A'A''D''D' (P. III, F. 32), si vous placez le prisme de manière que la troncature soit perpendiculaire au plan vertical. Les arêtes vues B, C doivent être tracées sur ce trapèze. Vous n'y voyez pas les arêtes cachées E, F, parce que les diagonales BF, CE du plan sont perpendiculaires à la ligne de terre.

198. *Dessiner un prisme oblique à bases triangulaires.* Plaçons les bases horizontalement, et rendons les arêtes qui les séparent, parallèles au plan vertical. Il faudra faire sur le plan horizontal, un triangle ABC égal ou semblable à chaque base (P. III, F. 33); abaisser de A une perpendiculaire AA′ sur la ligne de terre; porter la hauteur du prisme de A′ en G; mener par G une parallèle à la ligne de terre, et décrire de A′, avec un rayon égal à la longueur du prisme, un arc qui coupe GE en D′. La droite A′D′ sera l'élévation de celle des arêtes parallèles qui part de A; pour en avoir le plan AD, vous tracerez par A une parallèle à la ligne de terre, et par D′ une parallèle à AG. Le dessin s'achève ensuite au moyen de parallèles à AD et à AA′ tirées par B, C, de parallèles à A′D′ menées par B′, C′, et de parallèles à AG tracées par E′, F′. Le plan du prisme oblique est donc la figure ABCFDE qui renferme deux triangles égaux et trois parallélogrammes; l'élévation est le parallélogramme A′B′E′D′ qui se compose de deux autres. Les droites BC, C′F′ sont pointillées, parce qu'elles représentent des lignes cachées, l'une par rapport au plan, l'autre par rapport à l'élévation.

Comparaison des prismes.

199. L'espace renfermé entre toutes les faces d'un corps est ce qu'on appelle le *volume* ou la *capacité* de ce corps : le premier de ces mots s'emploie pour désigner tout l'espace plein compris entre des faces extérieures, le second, pour désigner tout l'espace vide compris entre des faces intérieures : on dit, par exemple, le volume d'une pierre de taille, d'une pièce de bois, d'une barre de fer; la capacité d'une quarte, d'un litre, d'un seau, d'un tonneau. La capacité du tonneau est bien différente du volume; elle en diffère de tout l'espace occupé par le bois dont sont faites les parois. Par conséquent, la capacité d'un vase quelconque égale le volume du liquide ou des grains qu'il faudrait pour le remplir, et le volume du même vase égale la capacité plus le volume des parois. Toutefois, les relations qui existent entre les volumes, sont les mêmes pour les capacités, et cela doit être, puisque la capacité d'un vase est toujours le volume du corps ou de l'ensemble des corps qui le rempliraient.

200. *Deux prismes quelconques sont équivalens en*

volume, quand ils ont des bases équivalentes et même hauteur. Si, par exemple, le carré A de la figure 30 (P. III), et le triangle ABC de la figure 33 renfermaient la même superficie, que de plus le côté de ce carré égalât A′G (F. 33), le volume du cube serait le même que celui du prisme triangulaire oblique.

En effet, chaque corps peut être considéré comme composé de tranches extrêmement minces parallèles aux bases; ces tranches sont en même nombre dans l'un et dans l'autre; elles égalent les bases correspondantes (150), et par conséquent, celles du prisme ont même superficie que celles du cube; d'où suit que les deux volumes se trouvent composés d'un même nombre d'élémens équivalens.

Deux prismes quelconques de même hauteur, se contiennent comme leurs bases, et deux prismes qui ont des bases équivalentes, se contiennent, comme leurs hauteurs. Si donc il est reconnu qu'un prisme rectangle et un prisme triangulaire ont chacun 14^{mm} de base, que la hauteur du premier est 15^{m} et celle du second 5^{m}, on pourra être certain que le prisme rectangle vaut trois fois le prisme triangulaire. Cela résulte évidemment de la démonstration précédente.

Ces principes font éviter de longs mesurages. Supposez, pour vous en convaincre, qu'une pile de bois à brûler, longue de 10^{m}, contienne 16 cordes, et qu'il s'agisse de corder une autre pile de même hauteur, longue de 40^{m}. On pourra trouver le nombre des cordes de cette grande pile, en multipliant 16 par le quotient d'une des bases divisée par l'autre. Or, les bases sont des rectangles qui ont pour largeur commune la longueur des bûches; ces bases se contiennent donc comme leurs longueurs 40 et 10 (120), c'est-à-dire 4 fois, et l'on trouve que la grande pile renferme 64 cordes, par la simple multiplication des deux nombres 16 et 4.

Si les deux piles de bois avaient même longueur, il y aurait égalité entre leurs bases, et dans le cas où les hauteurs seraient 12^{m} et 8^{m}, la petite contenant toujours 16 cordes, il y en aurait $16 \times \frac{12}{8} = 24$ dans la grande.

Combien faut-il de briques pour construire une cloison longue de 8^{m} et haute de 4^{m}?

Les briques sont ordinairement posées de champ; ainsi leur épaisseur est la même que celle de la cloison. Par conséquent, cette cloison doit contenir autant de briques, que sa superficie 32^{mm} contient une grande face de brique.

Cette grande face a $0^m,23$ sur $0^m,112$; elle est donc de $0^{mm},02576$. Divisant 32^{mm} par $0^{mm},02576$, on trouve 1242 plus une fraction, et l'on en conclut qu'il faut 1243 briques.

201. *Deux prismes sont égaux, quand les arêtes, les faces et les coins de l'un sont de même grandeur que les parties correspondantes de l'autre* (92) ; mais il suffit pour prononcer que deux cubes sont égaux, d'avoir reconnu qu'il y a égalité entre les arêtes des deux corps ; car elle existe alors entre les faces, et tous les coins étant droits, sont nécessairement égaux.

Mesurage des prismes.

202. Un prisme présente 6 choses distinctes à mesurer : une arête, la hauteur, une face, la surface latérale, la surface totale et le volume. Le mesurage d'une arête rentre dans celui des droites (71) ; le mesurage d'une face revient à celui des triangles, des quadrilatères, ou des polygones d'un plus grand nombre de côtés. On obtient la surface latérale, en faisant la somme de tous les parallélogrammes qui vont d'une base à l'autre (195), et l'on a la surface totale, si à cette somme on ajoute les deux bases. Quant à la hauteur, elle est donnée par la longueur d'une arête, si le prisme est droit ; elle se prend au fil-à-plomb, lorsque le prisme est oblique et à bases horizontales ; enfin, il faudrait un compas analogue à celui des cordonniers, pour mesurer la hauteur du prisme oblique dont les bases seraient inclinées : les petites branches parallèles devraient s'appliquer sur ces bases. Il ne vous reste donc plus qu'à savoir mesurer le volume.

203. L'unité de mesure pour les volumes, est ordinairement le volume d'un cube qui a pour arête l'unité de mesure des longueurs ; c'est pourquoi l'on dit souvent *cuber* au lieu de *mesurer un volume.* Si son arête est d'un pouce, l'unité de volume est nommée *pouce cube,* ce qui signifie *cube d'un pouce de côté ;* si l'arête est d'un pied, on a le *pied cube* ; si elle est d'une toise, elle donne la *toise cube.*

On peut employer aussi des prismes carrés pour mesurer les volumes. Le bois de charpente se mesurait autrefois à la *solive ;* cette unité avait 12 pieds de longueur et 6 pouces *d'écarrissage,* c'est-à-dire que ses bases étaient des carrés de 6^{po} de côté. On la partageait en 6 parties égales appelées *pieds de solive;* le pied de solive valait 12 *pouces de solive*, le pouce de solive contenait 12 *lignes de solive*, et la ligne, 12 *points*.

Il y avait dans l'ancien système de mesures et il y a encore aujourd'hui pour les mesures usuelles dérivées du mètre, la toise-toise-pied, la toise-toise-pouce, la toise-toise-ligne. Ce sont des prismes carrés qui ont, comme l'indiquent leurs noms, une toise carrée pour base et un pied ou un pouce ou une ligne pour hauteur.

Le bois de chauffage se mesurait à la *corde*, et il se mesure encore de même dans un grand nombre de localités. La corde la plus usitée est un prisme carré de 4 pieds d'équarrissage sur 8 pieds de long. On le divise en moitiés, quarts, huitièmes, seizièmes et trente-deuxièmes de corde.

Les unités des anciennes mesures de capacité dérivaient du pied cube et du pouce cube, mais ce n'était ni des cubes, ni des prismes carrés. Elles variaient tellement d'un lieu à un autre, et par suite le nombre en était si grand, qu'il serait à-peu-près inutile d'en citer quelques-unes. Il suffira d'ailleurs, pour pouvoir les employer avec les méthodes de mesurage qui vont être enseignées, de connaître leurs valeurs en pieds cubes ou en pouces cubes.

204. Le cube qui sert à mesurer les volumes, selon le système décimal, se nomme *millimètre cube*, si l'arête est d'un millimètre; *centimètre cube*, si l'arête a un centimètre; *décimètre cube* ou *litre*, si l'arête est d'un décimètre; *mètre cube* ou *stère*, si l'arête a un mètre.

Les dixièmes, centièmes, millièmes, etc., du mètre cube, sont des prismes carrés qui ont un mètre carré de base et un décimètre, ou un centimètre, ou un millimètre, etc., de hauteur (200).

Les subdivisions du litre sont le *décilitre* ou dixième et le *centilitre* ou centième; les composés sont le *décalitre* ou dixaine, l'*hectolitre* ou centaine.

Le stère n'a pas d'autres subdivisions que le *décistère* ou dixième, ni d'autre composé que le *décastère* ou dixaine.

205. Un prisme rectangle quelconque contient l'unité de mesure prismatique ou cubique, autant de fois que l'indique le produit de la superficie de sa base multipliée par sa hauteur ou longueur. En effet, supposons que cette longueur A'A" donnée par l'élévation A'A"B"B' du prisme (P. III, F. 34), contienne 4 fois la hauteur de l'unité de mesure. Si nous coupions le corps à tous les points de divi-

sion et parallèlement à la base, il se trouverait décomposé en 4 prismes rectangles qui auraient des bases égales, des hauteurs égales et par suite même volume (200). Tous contiendraient donc l'unité de mesure le même nombre de fois, et il suffirait de multiplier ce nombre de fois par le nombre 4 de ces petits prismes, pour avoir la mesure du grand. Or, le premier A'A'''B'''B' contiendrait l'unité de mesure autant de fois que sa base, qui est la base ABCD du grand prisme, pourrait recevoir la base carrée de cette unité, c'est-à-dire autant de fois que le marque la superficie de ABCD (123). Donc, pour connaître le volume d'un prisme rectangle, il faut multiplier la superficie de la base, mesurée avec la base de l'unité de volume, par la hauteur, mesurée avec celle de la même unité. Cette superficie est ici 35 et le volume est par conséquent $35 \times 4 = 140$.

Comme la superficie de la base ABCD est égale au produit des 7 unités de AB largeur du prisme, multipliées par les 5 unités de l'épaisseur AD, on peut dire aussi que *le volume de tout prisme rectangle égale le produit de sa largeur, de son épaisseur et de sa hauteur*, mesurées avec la largeur, l'épaisseur et la hauteur de l'unité de volume. De là cette formule $V.P.R = L \times E \times H$, dans laquelle V.P.R signifie *volume prismatique rectangle*.

Ainsi, lorsque vous voudrez mesurer un prisme rectangle en mètres cubes, vous mesurerez les trois dimensions avec le mètre, vous multiplierez deux des longueurs l'une par l'autre, puis le produit par la 3e. Lorsqu'il faudra mesurer en toise-toise-pieds, vous prendrez en toises les deux dimensions de la base du prisme, et vous multiplierez leur produit par la hauteur exprimée en pieds.

206. Il suit de là que la toise cube, cas particulier du prisme rectangle, contient 216 pieds cubes, car $6 \times 6 \times 6 = 216$; que le pied cube vaut 1728 pouces cubes, car $12 \times 12 \times 12 = 1728$; que le pouce cube égale 1728 lignes cubes; que le mètre cube renferme 1000 décimètres cubes, puisque $10 \times 10 \times 10 = 1000$; que le décimètre cube se compose de 1000 centimètres cubes, et que le centimètre cube vaut 1000 millimètres cubes.

Vous voyez aussi que la solive égale 3 pieds cubes (203), puisque $6^{po} \times 6^{po} \times 12^{pi} = \frac{1}{2}^{pi} \times \frac{1}{2}^{pi} \times 12^{pi} = \frac{1}{4}^{ppi} \times 12^{pi} = \frac{12}{4}^{pi\,c}$; concluez-en que la solive est contenue dans la toise-cube autant que $3^{pi.c}$ dans $216^{pi.c}$, ou 72 fois. La toise-toise-pied, qui est $\frac{1}{6}$ de la toise-cube, vaut de même 72 fois le pied de solive qui est $\frac{1}{6}$ de la solive; la toise-toise-pouce, douzième de la toise-toise-pied, contient 72 fois le pouce de solive, douzième du pied de solive; et enfin la toise-toise-ligne, douzième de la toise-toise-pouce, comprend 72 fois la ligne de solive, douzième du pouce de solive.

207. *Mesurer un prisme rectangle en mètres cubes et parties décimales.*

Supposons que la longueur soit $15^m,35$, que la largeur soit $7^m,15$ et que l'épaisseur ait $2^m,328$. La formule du n°205 vous donnera V.P.R$=7^m,15\times2^m,328\times15^m,35=16^{mm},6452\times15^m,35=255^{mc},50382$. L'abréviation *mc* signifie *mètres cubes*.

208. *Mesurer un prisme rectangle en mètres cubes et parties cubiques.*

Faites les mêmes opérations que dans le cas précédent, et partagez les décimales du dernier produit en groupes de 3 chiffres chacun, à partir de la virgule. Le dernier groupe à droite pourra se trouver incomplet; vous le compléterez en écrivant un ou deux zéros à la suite.

On voit ainsi que le prisme rectangle dont le volume est de $255^{mc},50382$, contient 255 mètres cubes, 503 décimètres cubes et 820 centimètres cubes (206). Ce second mode de mesurage est moins usité que le premier.

209. *Jauger un prisme rectangle en litres.*

On dit ordinairement *jauger*, *jaugeage*, quand il s'agit de mesurer un volume creux, une capacité. Pour résoudre le problême proposé, agissez comme si vous vouliez mesurer en mètres cubes, et reculez la virgule de 3 rangs vers la droite; vous aurez des litres pour unités principales, puisque le litre vaut un décimètre cube et que le décimètre cube est le millième du mètre cube (204 et 206).

Ainsi, un prisme rectangle creux qui aurait $4^m,256$ de hauteur, 2^m de largeur et $1^m,004$ d'épaisseur, serait en volume de $8^{mc},546048$ et contiendrait $8546^l,048$, à peu près 8546 litres et 5 centilitres.

210. *Jauger un prisme rectangle en hectolitres.*

Opérez comme s'il s'agissait de mesurer en mètres cubes et reculez la virgule d'un seul rang vers la droite; vous aurez des hectolitres pour unités principales, puisque l'hectolitre vaut 100 litres et que pour les litres il faut reculer la virgule de 3 rangs.

Le vase de l'exemple précédent contiendrait donc $85^{hl},46048$ ou environ 85 hectolitres, 46 litres et 5 centilitres.

211. *Le mesurage en stères doit se faire absolument comme le mesurage en mètres cubes*, puisque ces deux unités sont égales.

Pour *mesurer une pièce de bois carré en décistères*, il faut opérer comme si l'on voulait obtenir des mètres cubes et reculer la virgule d'un rang à droite, car le décistère est le dixième du stère. On se borne ordinairement aux millièmes de décistère dans ce mesurage.

212. *Mesurer un prisme rectangle en toises cubes et parties prismatiques.*

Vous mesurerez chacune des trois dimensions avec la toise linéaire et ses subdivisions, puis vous ferez le produit de ces trois nombres, au moyen de deux multiplications complexes. Dans la première, il faudra regarder le multiplicande comme exprimant des toises carrées, toise-pieds, etc.; le produit donnera la superficie d'une des faces prise pour base (129). Dans la seconde, ce produit qui sera multiplicande, devra être considéré comme un nombre de toises cubes, toise-toise-pieds, toise-toise-pouces, etc., et le 2e produit fera connaître en pareilles unités le volume du prisme. Ces opérations ne présenteront aucune difficulté à ceux qui auront l'habitude de la multiplication complexe ordinaire et qui se rappelleront que les toises carrées et leurs parties rectangulaires, les toises cubes et leurs parties prismatiques se contiennent comme les toises linéaires, les pieds, les pouces et les lignes (203).

213. *Mesurer un prisme rectangle en toises cubes et parties cubiques.*

Mesurez les trois dimensions avec la toise linéaire et ses subdivisions, réduisez ces longueurs en unités de la plus petite espèce qu'elles contiennent, en lignes par exemple : le produit des trois nombres de lignes vous donnera en lignes cubes, le volume du prisme. Alors, il faudra chercher par la division, combien ce nombre contient de fois $1728^{l.c}$, valeur d'un pouce cube (206); le reste donnera les lignes cubes du prisme, et le quotient exprimera des pouces cubes. Ce quotient divisé par $1728^{po.c}$, valeur d'un pied cube, donnera pour reste les pouces cubes du prisme, et pour second quotient un nombre de pieds cubes. Le 2e quotient divisé par $216^{pi.c}$, valeur d'une toise cube, donnera pour reste les pieds cubes du prisme et pour 3e quotient les toises cubes. Ecrivant donc à la suite de ce 3e quotient, successivement les trois restes, en commençant par le dernier, vous aurez le volume en toises cubes, pieds cubes, pouces cubes et lignes cubes. Cette méthode est analogue à celle du nº 128, et n'en diffère que par les diviseurs.

214. *Mesurer une pièce de bois carré en solives.*

Mesurez les trois dimensions avec la toise linéaire et ses subdivisions; multipliez-en une par 6, une autre par 6 et la 3e par 2; puis faites le produit des trois longueurs ainsi modifiées, comme s'il fallait obtenir des toises cubes et des parties prismatiques de la toise cube (212). Le produit exprimera des solives au lieu de toises cubes, des pieds de solive au lieu de toise-toise-pieds, des pouces de solive au lieu de toise-toise-pouces; des lignes de solive au lieu de toise-toise-lignes, et des points de solive au lieu de toise-toise-points; car en multipliant deux dimensions par 6 et la 3e par 2, c'est comme si vous eussiez fait d'abord le produit des trois et que vous l'eussiez multiplié ensuite par 72 qui vaut $6 \times 6 \times 2$; or il faut multiplier la toise cube et ses parties primastiques par 72, pour les convertir en solives et parties de solive (206).

215. *Corder une pile de bois de chauffage qui forme un prisme rectangle.*

Comme la largeur de cette pile égale la longueur des bûches, elle est la même que la largeur de la corde. Or la largeur d'un prisme rectangle peut être prise pour sa hauteur. La pile et la corde ont donc même hauteur et se contiennent comme leurs bases (200), c'est-à-dire, comme les produits des longueurs par les épaisseurs. Mesurez donc la longueur horizontale et l'épaisseur verticale de la pile en pieds; multipliez ces deux dimensions et divisez le nombre de pieds carrés que donne le produit, par 32, nombre des pieds carrés d'une grande face de la corde. Vous aurez pour quotient, la quantité de cordes de la pile.

Si la pile n'avait comme la corde que 4 pieds d'élévation, elle serait aussi un prisme carré; les deux prismes étant terminés à chaque bout par des carrés égaux, se contiendraient comme leurs longueurs, et il suffirait de prendre le huitième de la longueur de la pile exprimée en pieds, pour connaître le nombre de cordes.

216. *Mesurer un cube.*

Appliquant ce qui a été dit du prisme rectangle, dont le cube n'est qu'un cas particulier, vous verrez qu'il faut faire le quarré de la longueur de l'arête et multiplier ce quarré par cette même longueur. Si donc l'arête AB du cube de la figure 31 (P. III), a 8^m, le volume de ce corps vaudra $64^{mm} \times 8^m = 512^{mc}$.

Un produit qui résulte, comme 512, de deux multiplications où le même nombre forme le premier multiplicande et les deux multiplicateurs, est appelé le *cube* de ce nombre. On peut donc dire que le *volume d'un cube égale le cube numérique de l'arête*. De là cette formule $V.C = A \times A \times A$.

Il est bon de savoir par cœur les cubes des douze premiers nombres; les voici :

Nombres:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12.
Cubes :	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000,	1331,	1728.

Vous verrez aisément qu'en effet 343, par exemple, est le produit de 49 quarré de 7, multiplié par 7, ou, ce qui revient au même, que $343 = 7 \times 7 \times 7$.

217. *Cuber un prisme quelconque.*

Imaginez un prisme rectangle qui ait même hauteur et même superficie de base que le prisme quelconque; les deux corps seront équivalens (200). Par conséquent, le volume du prisme quelconque égalera le produit de la base du prisme rectangle multipliée par la hauteur commune (205). Mais, on aurait le même produit en multipliant par la hauteur commune, la superficie de la base du prisme quelconque, puisqu'elle égale la superficie de la base du prisme rectangle. *On trouve donc le volume de tout prisme, en multipliant la superficie de la base par la hauteur*, et la formule du calcul est $V.P = B \times H$.

Ainsi, pour cuber une pièce de bois de charpente qui aurait la forme et la position du prisme triangulaire oblique de la figure 33 (P. III), vous calculeriez la superficie de la base ABC en mètres carrés, par exemple (137), et vous la multiplieriez par la longueur de E'H prise en mètres, au moyen du fil-à-plomb. Le produit serait le volume de la pièce en mètres cubes; mais vous le convertiriez aisément en décistères (211).

S'il fallait déterminer la capacité d'un grenier à fourrage dont la forme fût celle d'un prisme triangulaire et droit, vous mesureriez la superficie d'un des pignons triangulaires et vous la multiplieriez par la distance horizontale de ces pignons, laquelle est la hauteur du prisme.

218. *Corder une pile de bois de chauffage qui a 4 pieds*

d'élévation, dont un des bouts est vertical et l'autre en talus.

C'est un semblable prisme qu'on forme, pour corder le bois à la porte de l'acheteur. Il contient la corde autant que son trapèze contient un rectangle de 8^{pi} sur 4^{pi} (200). Or, le trapèze a aussi 4^{pi} de hauteur; il contient donc le rectangle autant de fois que la demi-somme de ses deux bases contient 8^{pi} (123 et 139). Au lieu de mesurer les deux bases, le cordeur mesure, pour abréger, l'arête AB du talus (P. III, F. 35); il en marque le milieu C, abaisse à vue une perpendiculaire CD, sur la base inférieure BE, et mesure DE: cette longueur divisée par 8, donne les cordes. Si, par exemple, DE$=35^{pi}\ 8^{\circ}$ ou $35^{pi}\ \frac{2}{3}$, le nombre des cordes de la pile est $\frac{35}{8}+\frac{2}{3\times8}=4^{c}+\frac{3}{8}+\frac{2}{24}=4^{c}+\frac{11}{24}$.

Il est facile de voir qu'en effet DE vaut la demi-somme des bases BE, AF; car si l'on prolonge AF jusqu'à la rencontre de CD, AG=BD, puisque AC=CB (67); donc FA+AG+ED=FA+BD+ED=FA+EB. Mais FA+AG ou FG=ED, ce sont des parallèles comprises entre parallèles (66); par conséquent ED+ED=FA+EB ou bien ED est la moitié de FA+EB.

Si la pile de bois se terminait par deux talus, il faudrait marquer aussi le milieu du talus de gauche, abaisser à vue une seconde perpendiculaire sur la grande base du trapèze et diviser par 8 l'intervalle des deux perpendiculaires.

219. *Cuber un tronc de prisme triangulaire.*

Mesurez en mètres carrés la superficie de la base ABC (P. III, F. 36); mesurez en mètres les arêtes A'A'', B'B'', C'C'', si le tronc est droit; additionnez ces longueurs et prenez le tiers de la somme, pour connaître la moyenne. Vous aurez le volume du tronc de prisme triangulaire et droit en mètres cubes, si vous multipliez la superficie de la base, par la moyenne des trois arêtes parallèles.

Dans le cas où le tronc de prisme serait oblique, vous multiplieriez la base par la moyenne des 3 perpendiculaires abaissées de A'', B'', C'', sur le plan de cette base.

Il s'ensuit que *le volume d'un tronc de prisme triangulaire quelconque égale la superficie de la base, multipliée par la moyenne des distances de cette base aux trois sommets de la troncature.* La formule de ce principe est V.T.P.T$=B\times\frac{D+D'+D''}{3}$, les trois distances étant représentées par D, D', D''.

220. *Cuber un tronc de parallélipipède.*

Ce mesurage est analogue au précédent : il faut multiplier la superficie de la base ABCD (P. III, F. 57), par la moyenne des quatre arêtes parallèles A'A'', B'B'', C'C'', D'D'', lorsque le tronc est droit.

Si le tronc de parallélipipède était oblique, vous devriez multiplier la base, par la moyenne des 4 perpendiculaires abaissées de A'', B'', C'', D'' sur le plan de cette base.

Par conséquent, *le volume d'un tronc de parallélipipède quelconque égale la superficie de la base, multipliée par la moyenne des distances de cette base aux quatre sommets de la troncature.* Vous avez donc pour formule

$$\text{V.T.Pa} = \text{B} \times \frac{\text{D} + \text{D}' + \text{D}'' + \text{D}'''}{4}.$$

On mesure aussi de la même manière, dans certains cas, le volume des prismes complets : il est aisé de voir en effet que multiplier la base inférieure, par la hauteur du prisme (217) ou par la moyenne des distances de cette base aux sommets de la base supérieure, c'est alors absolument la même chose, puisque chacune de ces distances est égale à la hauteur.

PYRAMIDES.

221. La face d'où partent toutes les arêtes concourantes d'une pyramide, en est la *base* (194) ; cette base peut être un polygone quelconque.

Le point où se coupent toutes les arêtes concourantes, est le *sommet* de la pyramide, et la perpendiculaire abaissée de ce sommet sur le plan de la base, est la *hauteur* du corps. Les faces latérales, qui vont de la base au sommet, sont nécessairement des triangles.

La pyramide est *complète*, si elle contient le sommet ; elle est *tronquée*, lorsqu'au lieu du sommet, c'est une face plane qui se trouve opposée à la base. La pyramide tronquée a deux bases, quand la troncature est parallèle à la face opposée ; les faces latérales sont alors des trapèzes.

Une pyramide est *régulière*, lorsqu'elle a pour base un polygone régulier et que son *axe*, c'est-à-dire la droite qui joint le sommet au centre de la base (141), est perpendiculaire sur le plan de cette base. Si ces deux conditions ne sont pas remplies à la fois, la pyramide est *irrégulière*.

Toutes les arêtes concourantes d'une pyramide régulière sont égales ; car ce sont des obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire à la base (60).

On distingue les pyramides, comme les prismes, par les noms des polygones de leurs bases; elles sont *triangulaires*, *quadrangulaires*, *pentagonales*, *hexagonales*, etc., selon qu'elles ont pour base un triangle, un quadrilatère, un pentagone, un hexagone, etc.

222. *Dessiner une pyramide régulière et complète.*

Le plan comprend un polygone régulier ABCDEF semblable ou égal à celui de la base (P. III, F. 38); le centre S de ce polygone représente le sommet de la pyramide, sur le plan horizontal, et les rayons SA, SB, etc., y représentent les arêtes concourantes.

Pour faire l'élévation, abaissez de S et de tous les sommets A, B, C, etc. du polygone, des perpendiculaires sur la ligne de terre; prenez S'S″ égale à la hauteur ou à l'axe, et joignez le point S″ aux points A′, B′, etc. Si le rayon AS est parallèle à YZ, la droite A'S″ donnera la longueur de chaque arête.

223. *Dessiner une pyramide irrégulière.*

Le plan comprend toujours un polygone ABCD égal ou semblable à la base (P. III, F. 39). Si, à l'aide d'un *fil-à-plomb*, vous avez pris les distances horizontales du sommet de la pyramide à deux sommets B, D de la base, vous pourrez, avec ces longueurs, marquer le sommet S sur le plan horizontal. Les droites AS, BS, CS, DS y représenteront les arêtes concourantes.

Pour faire l'élévation, abaissez de tous les points du plan, des perpendiculaires sur la ligne de terre; prenez S'S″ égale à la hauteur de la pyramide, et joignez le point S″ aux points A′, B′, C′, D′. Les droites que vous tirerez ainsi, représenteront les arêtes concourantes, sur le plan vertical; mais il est possible qu'aucune ne soit représentée dans sa vraie grandeur. Cependant, comme je vous l'ai annoncé, le dessin complet d'un corps peut toujours en donner exactement les différentes dimensions.

Voulez-vous, par exemple, avoir la vraie longueur de l'arête qui va de C au sommet? il suffira de porter sur la ligne de terre, de S′ en E, la droite CS du plan, et de tirer S″E; cette hypothénuse du triangle rectangle ES'S″ donnera la longueur cherchée. Pour les autres, vous agiriez d'une manière analogue.

224. *Dessiner un tronc de pyramide régulière, à bases parallèles.*

Le plan se compose de deux polygones réguliers, concentriques, égaux ou semblables aux bases, et de droites Aa, Bb, etc. (P. III, F. 40), qui joignent les sommets correspondans des polygones. Ces droites représentent les arêtes concourantes, sur le plan horizontal.

L'élévation doit offrir un trapèze dont les côtés parallèles soient éloignés l'un de l'autre autant que les bases du tronc de pyramide. On détermine ce trapèze en abaissant des perpendiculaires sur la ligne de terre, des points A, C jusqu'à cette droite, et des points *a*, *c*, jusqu'à sa parallèle *a'c'*. Si, comme dans la figure, deux côtés AF CD de la grande base sont perpendiculaires à la ligne de terre, les droites A' *a'*, C' *c'* représentent chacune deux arêtes concourantes, sur le plan vertical. Par le même moyen, on trace la droite B'*b'* qui représente les deux autres. Le dessin n'a aucune ligne pointillée, attendu que toutes les lignes cachées de l'élévation se confondent avec des lignes vues, par suite de la position donnée arbitrairement au tronc de pyramide.

Comparaison des pyramides.

225. *Deux pyramides triangulaires sont égales, si leurs arêtes correspondantes ont même longueur, ou bien si trois faces de l'une sont égales à trois faces de l'autre.* Alors, la première étant creuse pourrait contenir exactement la seconde.

Deux pyramides régulières sont égales, lorsqu'il y a égalité entre les bases et entre les hauteurs ou deux arêtes concourantes prises chacune sur un des corps.

Deux pyramides irrégulières sont égales, s'il y a égalité entre leurs bases et si trois arêtes concourantes qui se suivent, ont dans l'une mêmes longueurs que leurs correspondantes dans l'autre.

226. *Deux pyramides qui ont des bases de même superficie et des hauteurs égales, sont équivalentes.* La démonstration est analogue à celle du n° 107.

Lorsque l'on coupe un prisme triangulaire en passant par le point D et par la droite BC (P. III, F. 53), on en détache une pyramide triangulaire DABC qui a même hauteur E'H et même base ABC que le prisme. Si ensuite on coupe le polyèdre restant, en passant par le même point D et par la droite CE, on forme une seconde pyramide triangulaire DCEF ou CDEF qui, ayant son sommet au point C et pour base le triangle DEF, a aussi même hauteur et même base que le prisme. Le reste est une 3e pyramide triangulaire DBCE équivalente à chacune des deux premières, car on peut la changer en une autre de même volume qui ait aussi même base et même hauteur que le prisme. En effet, DBCE équivaut à la pyramide dont A serait le sommet et BCE la base, puisque AD est parallèle à la face BCFE; mais la pyramide ABCE étant retournée, aurait E pour sommet et ABC pour base. Par conséquent, le volume d'un prisme triangulaire égale 3 fois celui d'une pyramide triangulaire qui aurait même base et même hauteur, ou bien *le volume d'une pyramide triangulaire est le tiers de celui d'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur.*

227. Il s'ensuit que les pyramides triangulaires sont entre elles comme les prismes triangulaires dont elles seraient le tiers: si l'un des prismes est double, triple, etc., de l'autre, le tiers du premier se trouve nécessairement double, triple, etc., de celui du second. Par conséquent, *deux pyramides triangulaires dont les bases sont de même superficie, se contiennent comme leurs hauteurs, et deux pyramides triangulaires de même hauteur, se contiennent comme leurs bases* (200).

Ces relations s'étendent à deux pyramides quelconques, car si vous coupez ces corps en passant par le sommet et par les diagonales qui divisent la base en triangles, vous les partagerez en pyramides triangulaires, et ils seront entre eux comme les sommes de leurs parties. Or, ces deux sommes de pyramides triangulaires sont évidemment entre elles comme les sommes des bases, s'il y a égalité dans les hauteurs, ou comme les hauteurs des deux pyramides quelconques, si les sommes des bases sont égales. Ainsi, dans ces cas, il n'est pas nécessaire de mesurer les pyramides pour les comparer; il suffit de comparer les hauteurs, si les bases se trouvent équivalentes, ou les bases, si les hauteurs se trouvent égales.

Mesurage des pyramides.

228. Il est possible qu'on ait besoin de connaître la surface d'une pyramide. Rien n'est plus facile; l'opération consiste à mesurer successivement la base et chaque face triangulaire, et à faire la somme de toutes leurs superficies.

229. *Cuber une pyramide triangulaire.*

Mesurez la base en mètres carrés, par exemple, et la hauteur en mètres; puis faites le produit des deux nombres trouvés; vous aurez en mètres cubes le volume d'un prisme triangulaire de même base et de même hauteur que la pyramide (217). Or, d'après le nº 226, le volume cherché est le tiers de celui-là; donc, *pour cuber une pyramide triangulaire, il faut prendre le tiers du produit de la superficie de la base multipliée par la hauteur.*

230. *Cuber une pyramide quelconque.*

Si vous coupiez la pyramide de la figure 38 (P. III) en passant par le sommet S′ et successivement par les diagonales AD, BE, CF de la base, vous la diviseriez en six pyramides triangulaires qui auraient même hauteur S″S′ que la pyramide hexagonale, et pour bases, les triangles ASB, BSC, etc.; la somme des volumes de ces six pyramides donnerait évidemment le volume demandé. Or chacun est égal au tiers du produit d'un des triangles ASB, BSC, etc., multiplié par la hauteur commune S″S′; leur somme est donc le tiers du produit de la somme des triangles multipliée par S″S′, et puisque la somme des triangles ASB, BSC, etc., forme la base de la pyramide donnée, il est clair que *le volume de cette pyramide est égal au tiers du produit de la superficie de la base multipliée par la hauteur,* comme celui d'une pyramide triangulaire.

Si donc B représente la superficie de la base d'une pyramide quelconque, et H la hauteur, le volume sera exprimé par la formule $V.Py=\frac{B\times H}{3}$. Supposez que $B=12^{mm}$ et que $H=2^{m},15$; cette formule vous donnera $V.Py=\frac{12^{mm}\times 2^{m}.15}{3}=\frac{25^{mc},80}{3}=8^{mc},60$.

Il est visible que ce mesurage confirme les principes du nº 227.

231. *Cuber un tronc de pyramide à bases parallèles.*

Il faut multiplier la grande base par la longueur d'un quelconque de ses côtés, multiplier la petite base par le côté correspondant, multiplier la différence des deux produits par la hauteur du tronc, et diviser enfin le troisième produit par le triple de la différence des deux côtés.

Soient B, *b* les superficies des bases ABCDEF, *abcdef* régulières ou irrégulières (P. III, F. 40); C, *c* les longueurs des côtés correspondans AF, af, par exemple, et H la hauteur $B'b'$ du tronc droit ou oblique. La formule du mesurage est $V.T.Py = \frac{(B \times C - b \times c) \times H}{3(C-c)}$.

En effet, le tronc est l'excès de la grande pyramide S'ABCDEF sur la petite $S'abcdef$, c'est-à-dire (230) l'excès de $\frac{B \times H'}{3}$ sur $\frac{b \times h'}{3}$, si H', h' représentent les hauteurs S'B', $S'b'$.

Or, à cause du parallélisme des bases, le plan S'SA qui renferme les concourantes projetées en S'B', S'A', coupe ces bases selon deux parallèles, et ces parallèles divisent les deux concourantes de la même manière. Par conséquent, H' et H se contiennent comme S'A', a'A'. Les côtés AF, af sont aussi parallèles et divisent les deux arêtes projetées en SA, SF, S'A'. Conséquemment, S'A', $S'a'$ se contiennent comme C,c, et S'A', S'A'—$S'a'$ ou a'A' se contiennent comme C, C—c. Par suite, H', H se contiennent comme C, C—c, ce qui donne $H' = \frac{C \times H}{C-c}$.

Pour les mêmes raisons, h', H se contiennent comme $S'a'$, a'A', et ces deux dernières longueurs se contiennent comme c, C—c. Donc, h', H se contiennent aussi comme c, C—c, ce qui donne $h' = \frac{c \times H}{C-c}$.

Ainsi, le volume de la grande pyramide $\frac{B \times H'}{3} = \frac{B \times C \times H}{3(C-c)}$, le volume de la petite $\frac{b \times h'}{3} = \frac{b \times c \times H}{3(C-c)}$, et le tronc vaut $\frac{B \times C \times H - b \times c \times H}{3(C-c)} = \frac{(B \times C - b \times c) \times H}{3(C-c)}$.

Supposons $B = 64^{mm},94$, $b = 10^{mm},39$, $C = 5^m$, $c = 2^m$ et $H = 3^m$; on aura $V.T.Py = \frac{(64^{mm}.94 \times 5^m - 10^{mm}.39 \times 2^m) \times 3^m}{3(5^m - 2^m)} = \frac{324^{mc}.7 - 20^{mc}.78}{3} = \frac{303^{mc},92}{3} = 101^{mc},306$

CORPS RONDS.

Les corps ronds dont nous allons nous occuper, sont ceux que déjà vous savez dessiner et dont vous avez appris précédemment à mesurer les surfaces. Reste donc à vous enseigner les moyens d'en comparer et d'en mesurer les volumes.

COMPARAISON ET MESURAGE DES CORPS RONDS.

232. Il résulte du n° 172 que le cylindre est un prisme

dont les faces latérales sont extrêmement nombreuses, et le nº 181 montre que le cône est au fond une pyramide qui a une multitude de faces triangulaires. On peut donc dire de deux cylindres et de deux cônes, comme de deux prismes et de deux pyramides (200 et 227), qu'*ils se contiennent autant de fois que leurs bases, s'ils ont même hauteur, ou autant de fois que leurs hauteurs, si leurs bases sont équivalentes.*

233. *Cuber un cylindre quelconque.*

Il faut multiplier la superficie de la base par la hauteur, après avoir mesuré les longueurs nécessaires avec la même unité; car tel est le mesurage d'un prisme (217).

Si donc R est le rayon d'un cylindre circulaire et H la hauteur, on a pour formule $V.Cy = R \times R \times 3,1416 \times H$, puisque (155) la superficie de la base est alors $R \times R \times 3,1416$.

Quand, au lieu du rayon, on veut employer le diamètre, la formule devient $V.Cy = \frac{D}{2} \times \frac{D}{2} \times 3,1416 \times H$ ou $V.Cy = \frac{D \times D \times 3.1416 \times H}{4}$.

Les mesures de capacité pour les matières sèches et pour le lait, sont des cylindres creux dont la hauteur H égale le diamètre D, et ce diamètre est, pour le décalitre, par exemple, de $0^m,2335$. Il est facile de reconnaître qu'en effet cette dimension est juste à fort peu près, car la capacité est alors le quart du cube de $0^m,2335$ multiplié par 3,1416, ce qui donne 9 litres, plus 0,991 584 497 5, quantité dont la différence à 10 litres est seulement 0,008 615 502 5.

Les mesures de capacité pour les liquides, l'huile et le lait exceptés, sont des cylindres creux dont la hauteur est double du diamètre; celui du litre doit avoir $0^m,086$. En effet, la capacité de la mesure égale la moitié du cube de $0^m,086$ multiplié par 3,1416, ce qui donne $0^{lit},999\,116\,764\,8$, quantité dont la différence à un litre est seulement 0,000 883 235 2.

234. *Cuber un tronc de cylindre droit qui a un axe.*

Un cylindre tronqué a un axe, quand sa base et sa troncature ont chacune un centre, c'est-à-dire un point situé au milieu de toutes les cordes qui le contiennent : il n'est pas nécessaire que ces cordes soient de même longueur, comme les diamètres du cercle; peu importe leur inégalité; pourvu que leurs milieux se confondent tous avec le point où elles se croisent, ce point est un centre, et la droite qui joint celui de la base à celui de la troncature, est un axe. Par conséquent, certaines ovales ont un centre, comme le cercle, et certains cylindres oblongs ont un axe, comme le cylindre circulaire.

Si vous pouvez mesurer l'axe d'un tronc de cylindre quelconque, mais droit, *vous aurez le volume en multipliant la superficie de la base, par la longueur de cet axe.* La formule à suivre est $V.T.Cy=B\times A$, la base étant représentée par B et l'axe par A.

Pour le tronc de cylindre circulaire de la figure 22 (P. III), vous devriez multiplier la superficie du cercle A, par A'A". Cela vous donnerait le volume d'un cylindre complet dont la hauteur serait A'A" (233), et en effet ce volume égale celui du tronc, attendu que ce qu'il a de moins, à gauche de A'A", est compensé par ce qu'il a de trop, à droite.

Si vous ne pouvez mesurer l'axe, à cause de l'impossibilité d'atteindre au centre de la troncature, *vous aurez le volume du tronc de cylindre droit, en multipliant la superficie de la base, par la moyenne de la plus grande et de la plus petite des droites de la surface cylindrique.* Il faudra donc employer la formule $V.T.Cy=B\times\frac{G+P}{2}$, la plus grande des droites étant représentée par G et la plus petite par P.

Effectivement, l'axe A'A" du tronc de cylindre circulaire égale la demi-somme de BC et DE, côtés parallèles du trapèze BCDE; car contenant le centre A de la base et le centre A" de la troncature, il passe par le milieu du diamètre BE et par le milieu de CD (218).

235. *Cuber un manchon cylindrique.*

Calculez le volume du grand cylindre dont le diamètre est BE (P. III, F. 23), et le volume du petit qui a FI pour diamètre; puis retranchez ce dernier volume du premier; la différence sera le volume de la paroi cylindrique du corps.

Un puits doit avoir $1^m,62$ de diamètre, 12^m de profondeur et des parois de $0^m,64$ d'épaisseur. Combien faudra-t-il de mètres cubes de pierres pour le construire?

Le grand cylindre aura en diamètre $1^m,62+0^m,64\times2=2^m,90$; son volume sera donc $\frac{2^m,90\times2^m,90\times3,1416\times12^m}{4}=79^{mc},263$. Le volume du vide ou petit cylindre sera $\frac{1^m,62\times1^m,62\times3,1416\times12^m}{4}=24^{mc},734$, et par conséquent, la paroi du puits contiendra $79^{mc},263-24^{mc},734=54^{mc},529$.

236. *Cuber un cône quelconque.*

On doit prendre le tiers du produit de la superficie de la base, multipliée par la hauteur, car tel est le mesurage d'une pyramide (230), et d'après le n° 181, le cône est une pyramide dont les faces latérales sont très-nombreuses et très-étroites, même à la base.

Représentant par R le rayon d'un cône circulaire, et par H la hauteur, vous aurez donc pour formule $V.\ C\hat{o}=\frac{R\times R\times 3,1416\times H}{3}$. Le diamètre D vous donnerait $V.\ C\hat{o}=\frac{D\times D\times 3,1416\times H}{12}$.

237. *Cuber un tronc de cône à bases parallèles.*

Le mesurage du tronc de pyramide est applicable (231); seulement au lieu des côtés C, c, il faut employer des cordes correspondantes ou les rayons R, r des bases, quand le tronc de cône est circulaire : ces rayons sont évidemment proportionnels aux cordes correspondantes, et conséquemment $\frac{C}{C-c}=\frac{R}{R-r}, \frac{c}{C-c}=\frac{r}{R-r}$. Comme d'ailleurs (155) la grande base $B=R\times R\times 3,1416$, et que $b=r\times r\times 3,1416$, la formule donne $V.T.C\hat{o}=\frac{(R\times R\times 3,1416\times R-r\times r\times 3,1416\times r)H}{3(R-r)}=\frac{(R\times R\times R-r\times r\times r)\times 3,1416\times H}{3(R-r)}$.

Or, il est facile de s'assurer en multipliant le quotient par le diviseur, que $\frac{R\times R\times R-r\times r\times r}{R-r}=R\times R+R\times r+r\times r$. La formule du mesurage du tronc de cône est donc aussi $V.T.\ C\hat{o}=H\times 3,1416\times\frac{R\times r+R\times R+r\times r}{3}$.

Ainsi, *pour avoir le volume d'un tronc de cône circulaire à bases parallèles, on peut multiplier la différence des cubes numériques des rayons, par* 3,1416, *puis le produit par la hauteur, et diviser ce second produit par le triple de la différence des rayons*, ou bien *le même volume égale le tiers du produit fait avec la hauteur, le nombre* 3,1416 *et le produit des rayons des bases ajouté à la somme de leurs quarrés numériques.*

Soient 3^m le grand rayon R d'une cuve en tronc de cône, $2^m,75$ le petit r, et $2^m,80$ la profondeur H, vous aurez $V.T.C\hat{o}=2^m,80\times 3,1416\times\frac{3^m\times 2^m,75+9^{mm}+7^{mm},5625}{3}=2^m,80\times 3,1416\times\frac{24^{mm},8125}{3}=2^m,80\times\frac{77^{mm},95095}{3}=\frac{218^{mc},26266}{3}=72^{mc},75422=727,54$ hectolitres (210).

Les arbres en grume, c'est-à-dire ceux qui, dépouillés de leurs branches, se trouvent prêts à être écarris, sont des troncs de cônes, lorsqu'ils sont bien droits. Cependant, on ne les cube pas comme il vient d'être enseigné, attendu que ce mesurage ferait payer l'écorce et l'aubier qui ne sont bons qu'à brûler.

Pour connaître le nombre des décistères qui seront contenus dans la pièce de bois carré que fournira un arbre en grume, on mesure en mètres les circonférences des deux bouts de l'arbre, à l'aide d'une ficelle, et ordinairement on prend les $\frac{5}{48}$ de leur somme. Le résultat est l'écarissage; il faut donc le multiplier par lui-même, multiplier le quarré obtenu, par la longueur de la pièce mesurée en mètres, et reculer la virgule d'un rang à droite (211).

L'artillerie emploie un mode de mesurage plus avantageux pour l'acheteur : au lieu de prendre les $\frac{5}{48}$ de la somme des circonférences extrêmes, elle n'en prend que le dixième ; l'écarissage qu'elle suppose est donc moindre que celui qui est usité entre particuliers : il en diffère d'une quantité égale à la 240^{e} partie de la somme des circonférences extrêmes.

238. *Cuber un manchon conique.*

Calculez le volume du grand tronc de cône et celui du petit ; puis retranchez ce dernier du premier. La différence sera le volume de la paroi tronc-conique.

239. *Cuber une sphère.*

Une sphère peut être considérée comme composée d'une infinité de pyramides dont les très-petites bases couvrent la surface courbe, qui aient le centre pour sommet commun et le rayon pour hauteur commune. Or, la somme de toutes ces pyramides est évidemment égale au tiers du produit fait avec la somme de toutes les bases et la hauteur commune (230) ; donc *le volume d'une sphère vaut le tiers du produit de la surface multipliée par le rayon.*

Comme une surface sphérique est donnée par la formule $D \times D \times 3,1416$, si D représente le diamètre (188), ou par la formule $R \times R \times 3,1416 \times 4$, si R représente le rayon, il est clair que la formule du volume doit être $V.\ S = \frac{R \times R \times R \times 3,1416 \times 4}{3}$ ou $\frac{D \times D \times D \times 3,1416}{6}$. Vous voyez donc que *pour trouver le volume d'une sphère, il faut multiplier le cube du rayon par 3,1416 et prendre les $\frac{4}{3}$ du produit, ou multiplier le cube du diamètre par 3,1416 et prendre le sixième du produit.*

Quand il s'agit de déterminer le volume d'une paroi sphérique, c'est-à-dire le volume de la matière d'une sphère creuse, on calcule celui de la sphère limitée par la surface courbe extérieure et celui de la sphère limitée par la surface courbe intérieure; la différence des deux résultats donne le volume de la paroi sphérique.

240. Il suit des formules qui donnent le volume d'un corps sphérique, que *deux sphères se contiennent comme les cubes de leurs rayons ou comme les cubes de leurs diamètres*.

Si, par exemple, une boule a $0^m,05$ de diamètre et qu'une autre boule ait un diamètre de $0^m,15$, celle-ci contiendra la première autant de fois que 3375 cube de 15 contient 125 cube de 5, c'est-à-dire 27 fois.

241. *Cuber le volume d'une calotte sphérique.*

Calculez le volume du cylindre dont BD serait le diamètre et CE la hauteur (P. III, F. 28), puis le volume de la sphère dont CE serait le diamètre; ajoutez ce dernier volume à la moitié de celui du cylindre, et vous aurez pour somme le volume de la calotte ou le *segment sphérique* dont CE est la hauteur.

242. *Cuber le volume d'une zône sphérique.*

Calculez la superficie de la grande base dont FG est le diamètre (P. III, F. 28), et la superficie de la petite base dont BD est le diamètre; prenez la moitié de la somme de ces deux superficies; multipliez le résultat par la hauteur EH de la zône, et ajoutez au produit le volume de la sphère qui aurait EH pour diamètre. La somme sera le volume de la zône ou la *tranche sphérique* dont l'élévation est la figure BDFG.

243. *Cuber un anneau rond.*

Si l'on coupait un anneau et qu'on le redressât, on aurait un cylindre droit et complet dont la hauteur égalerait la circonférence moyenne de cet anneau; car la grande circonférence se raccourcirait et la petite s'allongerait; celle du milieu serait la seule qui ne varierait pas. Il faut donc, pour obtenir le volume (233), multiplier la superficie du cercle dont A'A" est le diamètre (P. III, F. 29), par la moyenne des deux circonférences du plan. Cela revient à multiplier la somme des rayons de ces deux circonférences, par le quarré de la différence des mêmes rayons, à multiplier le produit par le quarré de 3,1416 et à prendre le quart du résultat.

La formule d'un pareil mesurage est donc $V.A = \frac{(R+r)\times(R-r)\times(R-r)\times 3,1416\times 3,1416}{4}$.

Supposons, pour exemple, que la plus grande circonférence de l'anneau ait $0^m,33$ de rayon, et que le plus petit rayon du vide soit de $0^m,30$. On aura $V.A = \frac{0^m,63\times 0^m,03\times 0^m,03\times 9,869\,650\,56}{4} = \frac{0^m,63\times 0^{mm},000\,9\times 9,869\,650\,56}{4}$
$= \frac{0^{mc},000\,567\times 9,869\,650\,56}{4} = \frac{0^{mc},005\,596\,0918}{4} = 0^{mc},0014.$

Mesurer le volume d'une pièce de bois courbe.

Si les bouts sont des figures à centre, perpendiculaires aux tangentes des arcs parallèles, *vous multiplierez la superficie d'un de ces bouts, par la moyenne des arêtes courbes ou par celle du plus grand et du plus petit des arcs de la surface annulaire, lorsqu'il n'y aura pas d'arêtes.* Vous concevez en effet que la pièce redressée deviendrait un prisme ou un cylindre droit et complet dont la longueur serait précisément la moyenne employée pour multiplicateur.

Si les bouts n'ont point de centre, ou qu'un seul soit d'équerre sur les arcs, le même moyen donne un mesurage qui généralement n'est qu'approximatif, mais dont on peut se contenter dans la plupart des cas de la pratique.

244. *Jauger un tonneau.*

Plongez un mètre divisé dans le tonneau, par la bonde, de manière à prendre exactement le plus grand diamètre intérieur, qu'on appelle diamètre du *bouge;* doublez la longueur trouvée ; ajoutez ce double au diamètre d'un des fonds ; prenez le tiers de la somme ; faites le quarré numérique de ce tiers ; multipliez ce quarré par 3,1416, et le produit par la longueur de la capacité du tonneau. Le quart du résultat sera cette capacité en mètres cubes qu'il vous sera facile de convertir en litres ou en hectolitres (209 et 210).

Soient D le diamètre du bouge, *d* le diamètre des fonds, et L leur distance. La formule à employer est $T = \frac{2D+d}{3}\times\frac{2D+d}{3}\times 3,1416\times\frac{L}{4}$.

Observez que pour avoir la longueur L de la capacité du tonneau, il faudrait mesurer une ligne droite perpendiculaire aux deux fonds et comprise entre les faces internes de ces fonds. Comme on ne le peut pas, on mesure la perpendiculaire comprise entre les faces externes et l'on en retranche le double de l'épaisseur d'une douelle. Cette épaisseur varie de 18 à 24 millimètres.

Supposez qu'un tonneau ait pour diamètre du bouge $0^m,625$, pour diamètre des fonds $0^m,553$, et pour longueur interne $0^m,727$. En suivant ce qui vient d'être prescrit, conformément à une instruction ministérielle de l'an VII, vous trouverez que la capacité du tonneau est de $0^{mc},206\,241$ ou de 2,062 41 hectolitres.

Si vous calculiez la même capacité, en la considérant comme composée de deux troncs de cônes accolés par leurs grandes bases (237), vous obtiendriez $0^{mc},198\,340$, nombre dont la différence à $0^{mc},206\,241$ est $0^{mc},007\,901$. Ainsi, l'erreur ne serait au plus que de 8 litres en moins.

DESSIN ET MESURAGE DES CORPS QUELCONQUES.

245. La plupart des corps dont on peut avoir à faire le dessin, à mesurer la surface ou le volume, se rapportent aux diverses formes que vous venez d'étudier. Vous verrez aisément, par exemple, qu'un tombereau offre un tronc de pyramide quadrangulaire, dont les bases, c'est-à-dire le devant et le derrière, peuvent être considérées comme parallèles, sans grande erreur. Une hotte en bois, propre au transport des liquides, doit être assimilée à un tronc de cône à bases parallèles, bien qu'elle ait une face latérale sensiblement plane. Tous les corps ronds, pleins ou creux, sont des cylindres, des cônes, des sphères, des anneaux, ou peuvent se décomposer en parties qui présentent ces formes, soit complètement, soit partiellement. Reste donc à vous enseigner comment on dessine et l'on mesure un corps qui ne ressemble à aucun de ceux dont nous nous sommes occupés.

Auparavant et comme introduction, j'exposerai le procédé à suivre pour *cuber un corps tronqué, à base quelconque perpendiculaire aux arêtes des faces latérales.*

Faites d'abord, au moyen d'une échelle, le plan ABCD de ce corps (P. III, F. 41) et l'élévation A'A''C''C'; puis décomposez la base ABCD en triangles tels que ABD et en segmens terminés par des droites et des courbes, comme le segment BCD. Après avoir marqué sur la courbe BCD des parties arbitraires, égales ou inégales, qui puissent être prises pour des droites, sans grande erreur, vous abaisserez, des points de division a,b,d,C, des perpendiculaires sur la corde BD, et vous menerez des parallèles *ae* à cette corde, de manière à former des rectangles tels que *aefg* et des triangles tels que D*ag*, *abe*; enfin, par les sommets des rectangles et des triangles, vous tirerez des parallèles aux arêtes A'A'',B'B'' etc., jusqu'à la troncature A''C''.

Alors le corps donné se trouvera décomposé en prismes tronqués triangulaires et rectangles, dont les arêtes parallèles seront comprises entre la ligne de terre A'C' et la troncature A''C''; il sera facile de mesurer ces prismes et la somme de leurs volumes donnera celui du corps.

Par exemple, le prisme triangulaire dont la base est ABD, a pour volume, le produit de la superficie ABD et de la moyenne des arêtes A'A'',B'B'',D'D'' (219).

Le prisme dont la base est le triangle D*ag*, a pour volume, la superficie D*ag* multipliée par la moyenne des arêtes D'D'',*g'g''*,*a'a''*.

Le prisme rectangle dont la base est *aefg*, a pour volume, la superficie *aefg* multipliée par la moyenne des quatre arêtes *a'a''*,*e'e''*,*f'f''*,*g'g''* (220). Ainsi des autres.

C'est de cette manière que doit se faire le cubage d'une portion de cylindre droit et tronqué, et de tout corps tronqué qui, sous une forme cylindrique, a une base dépourvue de centre.

246. *Dessiner un corps quelconque.*

Prenons pour exemple un tas de sable auquel nous supposerons 0m,95 de hauteur. Vous tracerez autour un rectangle ABCD (P. III, F. 42), de manière que deux des côtés soient parallèles à la plus grande droite qui puisse être tirée dans la base; puis, à l'aide d'une mesure, d'un niveau de maçon et d'une règle placée verticalement sur AB, en des points E,F,G,H,I, dont les distances à A seront connues, vous mesurerez à 0m,9 du sol, les distances horizontales E1,F1,G1,H1,I1, perpendiculaires à AB, et vous les coterez sur un croquis pareil au plan de la figure 42. Portant ensuite la distance AE de D en E', la distance EF de E' en F', etc., vous marquerez sur CD des points E',F', etc., qui correspondront à ceux de AB, et vous mesurerez à 0m,9 du sol, les distances horizontales F1',G'1', etc.

Vous serez alors en état de rapporter sur le dessin au net, le contour 1.1.1...1'.1' qui résulterait d'une coupe faite dans le tas de sable, par un plan horizontal élevé de

$0^m,9$ au-dessus du terrain. Il faudra pour cela construire, d'après une échelle, un rectangle ABCD qui ait même longueur et même largeur que celui du sol, et dont les grands côtés soient parallèles à la ligne de terre YZ; tracer les droites EE',FF', etc., conformément aux cotes du croquis; y porter les distances E1,F1,F'1', etc., et joindre par une courbe les points 1,1....1', etc. qui en résulteront.

Opérant à $0^m,6$ du sol, comme vous venez d'opérer à $0^m,9$, et plaçant la règle aux points K,E,F....L, vous mesurerez les distances horizontales K2,E2...L2,I'2', etc; puis à l'aide du croquis, vous tracerez sur le plan le contour 2.2.....2.2'...

Répétez les mêmes opérations à $0^m,3$ de terre, pour obtenir le contour 3, et sur le sol même, pour le contour 4 de la base, vous aurez le plan du tas de sable. Ce plan est ici, comme vous voyez, l'ensemble des contours donnés par des plans horizontaux espacés de $0^m,3$; mais on peut les prendre plus ou moins écartés, ainsi que les points E,F,G, etc: il suffit que les arcs de courbe compris entre ces plans horizontaux et entre les plans verticaux EE', FF', etc., diffèrent peu de lignes droites.

L'élévation résulte du plan. Tracez à des intervalles de $0^m,3$ autant de parallèles à la ligne de terre, que vous avez *levé* de contours, et coupez-les par les prolongemens des parallèles à AD. Les droites E'E,I'I vous donneront, par leurs rencontres avec la parallèle située à $0^m,9$ de YZ, l'élévation *ab* du contour 1; les droites K'K,L'L formeront, en coupant la parallèle située à $0^m,6$ de YZ, l'élévation *cd* du contour 2; l'élévation *ef* du contour 3 sera produite par les droites M'M,N'N; enfin *gh* qui représente la base du tas, sur le plan vertical, aura pour extrémités les intersections de O'O,P'P avec la ligne de terre. Si donc vous supposez que le point le plus élevé du corps se trouve dans le même plan vertical que G et G', vous achèverez l'élévation en portant $0^m,05$ de *i* en *k* et en joignant par une courbe les points *g, e, c, a, k, b, d, f, h*.

C'est ainsi que se fait le dessin complet de l'extérieur de tout corps plein ou creux dont la forme ne peut être désignée par un terme géométrique. Pour dessiner l'intérieur d'un corps creux, vous marqueriez sur les bords les points 4.4 d'une droite Q,R, et plaçant la règle dans l'alignement de ces points, vous mesureriez les distances horizontales du plan vertical QR aux divers points de chaque contour de niveau. Sur le plan, la droite QR serait une parallèle à la ligne de terre, et le reste se ferait comme dans le cas précédent.

247. Rien de plus facile que de *cuber un corps quelconque dont on a un dessin complet*, analogue à celui de la figure 42 (P. III); ce corps se trouvant divisé en prismes droits, tronqués, rectangles ou triangulaires, il ne s'agit que de calculer le volume de chaque prisme (219 et 220) et de faire la somme de tous les résultats.

Transportez en effet, par la pensée, l'élévation dans le plan vertical QR, en plaçant la ligne de terre sur la droite QR, vous verrez aisément que le rectangle *lmno*, par exemple, est la base d'un prisme rectangle et tronqué dont les arêtes parallèles ont pour longueurs $o'4$, $n'4$, $o'3$, $n'3$. La troncature est une petite face courbe dont eplan est la figure 3.3.4.4 formée par les extrémités des arêtes parallèles; et vous pouvez la considérer comme une face plane, sans grande erreur, si les points o', n' sont peu écartés, si leur distance n'est que de $0^m,3$ comme celle des plans qui donnent les courbes 4,3, ou qui forment la face supérieure et la face inférieure du prisme rectangle. Le volume de ce prisme sera donc le produit de la superficie du rectangle *lmno*, multipliée par la moyenne des quatre longueurs $o'3$, $n'3$, $o'4$, $n'4$, exactement données par le plan.

Le rectangle *epqr* est la base d'un prisme rectangle et tronqué qui n'a que trois arêtes parallèles $q'3$, $q'4$, $r'4$! la 4^e est nulle, puisque la courbe 3 aboutit au point r'; la troncature est la petite face courbe $r'3.4.4$ qui peut aussi être regardée comme plane. Le volume de ce prisme est donc le produit de la superficie du rectangle *epqr*, multipliée par la moyenne des quatre longueurs $q'3$, $q'4$, $r'4$, et zéro, ou par le quart de $q'3+q'4+r'4$.

Le triangle *egr* est la base d'un prisme triangulaire droit et tronqué dont les trois arêtes parallèles se réduisent à une seule $r'4$; de sorte que ce prisme est au fond une pyramide triangulaire dont la hauteur est $r'4$. Mais, que vous considériez cette partie du corps comme prisme tronqué ou comme pyramide, vous trouverez toujours le même volume : comme pyramide, son volume égale la superficie de la base triangulaire *egr*, multipliée par le tiers de la hauteur $r'4$; comme prisme tronqué, son volume égale la même superficie, multipliée par la moyenne des trois arêtes parallèles $r'4$, zéro et zéro ou par le tiers de $r'4$.

Les prismes qui ont pour bases les triangles *cep*, *ast*, *buv*, *bdx*, etc., sont dans le même cas que le précédent.

Le prisme dont la base est *dxyz* et tous ceux qui lui ressemblent, doivent être traités comme le prisme dont la base est *epqr*.

Enfin, les prismes qui ont pour bases les rectangles *kiuv*, *kist*, n'ont chacun que deux arêtes parallèles: $o'1$, $n'1$ pour le 1er, $o'1$, $s'1$ pour le 2e. Les troncatures sont les petites faces courbes représentées sur le plan par les figures $n'o'1.1$, $o's'1.1$. Pour avoir le volume de chacun, il faut en multiplier la base par le quart de la somme des deux arrêtes parallèles.

Après avoir cubé tous les prismes rectangles situés en avant du plan vertical QR, on cube de la même manière ceux qui se trouvent en arrière. La somme de tous les volumes obtenus est le volume du corps.

Lorsqu'on applique cette méthode à un polyèdre, il peut se faire que quelques-uns des prismes rectangles soient complets; mais on n'a pas besoin de les distinguer des autres : la remarque qui termine le nº 220 fait voir que les volumes des diverses parties prismatiques du corps, peuvent se calculer comme si ces parties étaient toutes des prismes rectangles tronqués.

LEVER D'UN BATIMENT.

248. Tous les corps que vous venez d'apprendre à dessiner, étaient supposés isolés; mais bien souvent on est obligé de faire le dessin complet de l'ensemble de plusieurs corps. Le procédé à suivre alors est au fond le même que celui qui a été employé pour lever le plan d'un terrain (153). Afin de vous montrer comment on doit l'appliquer, nous supposerons qu'il s'agisse de représenter un bâtiment et toutes ses dépendances. Ce bâtiment sera, par exemple, une maison d'école (*).

Il est clair d'abord que si la distribution intérieure n'est pas la même aux divers étages, le dessin doit présenter le plan de chacun, pour faire bien connaître le bâtiment. Vous aurez donc à lever successivement le plan des caves, celui du rez-de-chaussée et celui de l'étage. Le plan du grenier ne se fait que dans le cas où cette partie se trouve divisée par des cloisons.

Plan des caves.

Le plan des caves est aussi celui des fondations de la

(*) Le projet en est dû à M. *Derobe* fils, architecte.

partie principale du bâtiment. Vous pourrez en faire le croquis complet, bien qu'il soit impossible de parcourir tout l'intérieur qui n'est pas entièrement évidé. Il faudra d'abord tracer à vue un quadrilatère ABCD (P. IV, F. 1), à-peu-près semblable au quadrilatère EFGH (F. 2) que les murs du bâtiment principal forment sur le sol.

Le plan des caves est censé passer par l'horizontale qui forme l'arête inférieure de l'orifice d'un soupirail. Il coupe tous les murs à cette hauteur. Vous prendrez aisément l'épaisseur de ces murs, en introduisant horizontalement une mesure dans un des soupiraux. Vous la coterez sur le croquis, comme vous avez coté la largeur d'un chemin dans la figure 8. Cotez aussi la largeur tant extérieure qu'intérieure des soupiraux *i*, les quatre côtés et au moins une diagonale de chaque cave I et de chaque caveau K, la largeur des portes de communication *k*, l'épaisseur des murs de séparation, la longueur et la largeur d'une marche d'escalier, enfin la longueur horizontale de tout l'escalier. S'il y a des marches triangulaires, comme dans la figure 1re, vous prendrez la largeur de chacune le long du mur. S'il y en avait qui eussent la forme de trapèze, vous coteriez la largeur de chaque bout.

La petitesse de l'échelle, n'a pas permis d'inscrire toutes les cotes; mais celles que présentent les figures montrent assez comment elles doivent êtres écrites.

Les diverses dimensions qui viennent d'être indiquées, vous suffisent pour faire au net, par triangles, le plan des caves. Quelle que soit la forme du quadrilatère ABCD, vous l'obtiendrez exactement en prolongeant les côtés des triangles I et en prenant AD égal à EF, BC égal à GH. Les murs coupés doivent être couverts de hachures, ou coloriés en rouge; on met aussi des hachures ou une bordure rouge le long des murs qui soutiennent les massifs de terre T et dont on n'a pu prendre les épaisseurs.

Plan du rez-de-chaussée.

Supposez que tous les murs soient coupés par le dessus des tablettes des fenêtres inférieures étendu convenablement, et dessinez la figure qui doit en résulter, vous aurez le plan du rez-de-chaussée. Pour en faire le croquis, il faut diviser le rectangle EFGH (F. 2) à-peu-près comme il est divisé en réalité; mesurer les côtés et une diagonale de chaque pièce, la largeur, la saillie et la profondeur des cheminées *l* et des niches *m*, la largeur tant extérieure qu'intérieure des fenêtres *a* et des portes d'entrée *b*, la largeur des portes de communication *c*, la longueur et la largeur du four L, l'épaisseur des murs et des cloisons. Les dimensions des escaliers M se prennent comme il a été dit pour ceux des caves.

Observez que la cheminée O de la cuisine étant *en hotte*, a le même plan qu'un tronc de pyramide quadrangulaire dont deux faces sont verticales.

Au plan des appartemens, s'ajoute celui des jardins, des cours et de tout ce qu'elles renferment: bûchers, écuries, latrines P; ce 2e plan est plus élevé que le premier, car c'est l'arête horizontale inférieure N d'une des fenêtres du bûcher (F. 7) qui en détermine la hauteur. Le croquis se fait toutefois comme le précédent; il doit présenter les cotes des quatre côtés et d'une diagonale de chaque quadrilatère; celles de l'épaisseur des murs, de la largeur des portes, des fenêtres, des allées *e* et des plates-bandes *f* des jardins; enfin celles de la longueur et de la largeur des deux marches d'escalier *d* placées devant les deux portes d'entrée des appartemens.

Les murs de clôture QRS n'ont pas la même épaisseur que les autres. On la détermine en retranchant de la longueur FQ, la largeur de la cour.

Vous aurez soin, dans le dessin au net, de faire les fenêtres *a* comme les représentent la figure 3. Leur plan se compose d'un rectangle et d'un trapèze: les grands côtés du rectangle égalent la largeur extérieure; les petits côtés, qu'il faut mesurer et coter, égalent l'épaisseur de la partie du mur, ordinairement en pierres de taille, qui forme cet encadrement dont la croisée est précédée. La grande base du trapèze égale la largeur intérieure des fenêtres, et la petite base excède un peu la largeur extérieure, de manière à laisser de chaque côté une petite feuillure où se loge le châssis des croisées.

Le plan d'une porte d'entrée se fait exactement comme celui d'une fenêtre, si ce n'est que les grands côtés du rectangle et la grande base du trapèze n'y sont point tracés: effectivement, ces arêtes n'existant point sur le seuil d'une porte, ne doivent pas paraître dans un plan, car on y représente seulement les objets coupés et ceux qui se trouvent moins élevés que les tablettes des fenêtres, à l'exception pourtant des escaliers: les escaliers M qui servent à monter au 1er étage, sont figurés entièrement sur le plan du rez-de-chaussée ; ceux qui vont au 2e étage, ont toutes leurs marches tracées sur le plan du premier, et ainsi des autres.

Plan de l'étage.

Le croquis de chaque étage se fait absolument comme celui du rez-de-chaussée. On y figure et l'on y cote de plus les saillies *g* des corps de cheminée (F. 4); sur le plan au net, on indique en outre dans l'épaisseur des murs, ceux de ces corps qui ne sont pas apparens. Vous voyez en *m*, par exemple, la cheminée commune aux niches *m* du rez-de-chaussée : ses distances au mur de devant et au mur de refend *n*, sont évidemment égales à celles des niches aux mêmes murs.

Coupes verticales.

Des plans et une élévation ne suffisent pas pour rendre complet le dessin d'un bâtiment : l'élévation donne bien les hauteurs de toutes les parties extérieures ; mais elle n'indique jamais celles des parties intérieures. Il serait possible, à la vérité, d'y figurer quelques unes de ces parties par des lignes pointillées ; mais outre que ce moyen compliquerait et gâterait l'élévation, il serait insuffisant, attendu que les lignes de certains objets couvriraient celles de quelques autres.

Pour éviter cet inconvénient, on fait une ou plusieurs *coupes verticales*, c'est-à-dire qu'on suppose enlevée toute la partie du bâtiment située à droite du plan vertical dont la ligne de terre est YZ, par exemple (F. 2), et qu'on dessine tout ce qui est alors visible de la partie située à gauche. Ainsi, la coupe verticale qu'offre la figure 5, représente, sur une plus grande échelle, la face verticale *a* de la fenêtre Z du rez-de-chaussée, la face verticale *h* de la fenêtre située au-dessus, à l'étage, les saillies *o* des tablettes de ces fenêtres et les consoles qui les soutiennent, le soubassement *p* du mur de face, la niche *m* de la salle des garçons, le profil du mur de renfend *n*, l'élévation L du four, l'élévation O de la cheminée en hotte, le profil du mur EH, celui du plancher *q* de l'étage, le corps *g* de la cheminée de la cuisine, enfin le profil du plancher *r* du grenier et celui d'une ferme de charpente.

La face verticale *a* de la fenêtre se compose, comme le plan, d'un rectangle et d'un trapèze ; seulement, le trapèze cevez au-dessus des fenêtres de chaque grenier à fourrage, sont les bouts des chevrons du toit; leur hauteur verticale, à-peu-près égale à leur largeur, est donnée par la coupe 6. Il n'y a pas de pareils rectangles au-dessus des fenêtres de l'étage, parce que les chevrons du toit du bâtiment principal sont taillés en biseau et ne descendent même pas jusqu'au bord de la saillie : c'est une large planche qui l'achève.

MESURAGE DES POIDS.

249. Il existe des corps d'un tel poids qu'on ne saurait les peser ni avec des balances, ni avec une romaine. Le mesurage des poids est, en pareil cas, du ressort de la Géométrie. On cube le corps et l'on multiplie par le volume, le poids de l'unité de ce volume; le produit exprime évidemment le poids entier.

Ce mode d'évaluation des poids nécessite, comme vous voyez, la connaissance de ce que pèse l'unité de volume du corps donné. On prend pour cette unité, le *décimètre cube*, et en voici la raison. Comme 1 décimètre cube d'eau pure pèse exactement 1 kilogramme, il suffit, pour avoir en kilogrammes le poids du décimètre cube d'un corps, de trouver combien ce poids contient de fois celui du décimètre cube d'eau pure. Or, ce nombre de fois est visiblement égal à celui que donneraient les poids de deux volumes quelconques, mais égaux, des mêmes substances. Donc, pour connaître en kilogrammes, le poids du décimètre cube d'un corps donné, il ne s'agit que de chercher combien le poids d'un volume quelconque de ce corps contient de fois le poids du même volume d'eau pure, et la Physique enseigne les moyens de faire facilement une telle recherche.

Le poids d'un décimètre cube est ce qu'on nomme le *poids spécifique* du corps, c'est-à-dire le poids qui le *spécifie*, qui le caractérise, qui le distingue des autres. Une masse de plomb peut peser 50 kilogrammes, comme une masse de bois ou de houille ou de fer; mais le plomb est le seul corps dont le décimètre cube pèse $11^{kg},3523$.

Les poids spécifiques des corps les plus importans, ont été déterminés avec une grande précision. Voici ceux qu'il vous est utile de connaître; quelques-uns ne sont qu'approximatifs, mais leur degré d'approximation est suffisant pour la pratique.

	kg.		kg.		kg.
Acier......	7,67	Hêtre......	0,852	Pommier ...	0,793
Air........	0,0013	Houille.....	1,3292	Prunier.....	0,783
Argent.....	10,7	Huile de lin.	0,94	Sable pur...	1,9
Bois d'aulne.	0,8	Huile de nav.	0,919	Sable terreux	1,7
Beurre.....	0,942	Lard.......	0,948	Sapin......	0,55
Brique.....	2,168	Liège......	0,24	Sapin jaune..	0,657
Cerisier....	0,715	Mercure....	13,598	Saule......	0,685
Chêne (cœur)	1,17	Meules (moul)	2,484	Sel marin...	1,92
Cire jaune...	0,965	Noyer......	0,671	Suif.......	0,942
Cuivre rouge.	8,788	Or fondu....	19,2581	Terre argileuse	1,6
Diamant....	3,531	Orme......	0,671	Terre-glaise.	1,9
Eau-de-vie..	0,86	Peuplier blanc	0,529	Terre végétale	1,4
Esprit de vin.	0,837	Peupl. ordin.	0,383	Tilleul.....	0,604
Etain......	7,2914	Pierre à bâtir.	2,08	Tuile......	2
Fer en barre.	7,788	Pierre à plâtre	2,2168	Vapeur d'eau	0,0008
Fonte de fer.	7,207	Platine.....	19,5	Verre......	2,4882
Frêne......	0,845	Plomb fondu.	11,3523	Vin (bon)...	0,99
Glace d'eau.	0,93	Poirier.....	0,661	Zinc.......	7,191

250. Pour vous apprendre l'usage de ce tableau, supposons qu'il faille déterminer le poids d'un mètre cube de bon sable. Vous multiplierez 1^{kg},9, poids spécifique du sable pur, par 1000, attendu que le mètre cube contient 1000 décimètres cubes, et le produit 1900^{kg} sera le poids cherché.

Si l'on avait à trouver le poids de 35^{mc},45 du même sable, il faudrait d'abord convertir ce volume en décimètres cubes, ce qui donnerait 35 450^{dc}, et multiplier ensuite par 35 450, le poids 1^{kg},9 d'un seul décimètre cube. On aurait ainsi 67 355^{kg}.

S'agit-il de connaître, sans peser, le poids d'une pièce de bois carré, essence de chêne, qui porte 0^{m},6 sur 14^{m}? Vous calculez le volume du prisme en décimètres cubes (208), et vous trouvez 0^{m},6×0^{m},6×14^{m}=5^{mc},04=5 040^{dc}; puis vous multipliez par ce dernier nombre, le poids spécifique 1^{kg},17, ce qui vous donne 5 896^{kg},8.

Vous trouveriez d'une manière analogue, le poids d'un essieu de fer : le poids spécifique du fer en barre devrait être multiplié par le volume de l'essieu calculé en décimètres cubes. Pour avoir ce volume, vous observeriez que le corps de l'essieu est un prisme rectangle et que les fusées sont deux troncs de cône égaux.

AVIS SUR LE RÉSUMÉ.

Ce qu'il y a de plus difficile dans l'étude d'une science, c'est de se familiariser avec les termes nouveaux qu'on y emploie. Faute de se bien rappeler ces termes et leurs valeurs, on a de la peine à suivre la description d'un tracé, à retenir la série des opérations qui conduisent au résultat, et l'on éprouve plus de difficulté encore à comprendre les explications et les raisonnemens. Cependant, l'habitude du langage géométrique ne suffit point pour qu'on soit en état de sentir la justesse d'une démonstration, ou de faire des applications sans commettre de graves erreurs : les principes doivent être tout aussi présens à l'esprit que les termes.

Nous croyons donc faire une chose extrêmement utile aux étudians, en terminant ce livre par un *résumé* succinct des définitions et des principes les plus importans. Ce résumé est en quelque sorte l'abrégé de la science ; tout ce qu'il renferme est du ressort de la mémoire et doit lui être confié. Nous pensons même que le seul moyen d'obtenir des succès rapides et soutenus dans l'enseignement de la Géométrie, c'est de faire apprendre par cœur, après chaque leçon, la partie du résumé qui s'y rapporte, et d'exiger, avant de commencer la leçon suivante, une récitation exacte de toutes les définitions et de tous les principes précédemment appris.

Lorsque la tâche devient trop grande, l'instituteur peut se borner à faire reciter le résumé de la dernière leçon, puis ce qui concerne les *cercles*, par exemple ; le lendemain, il demandera le chapitre des *angles* ; le surlendemain, la *comparaison des droites*. L'essentiel est d'obtenir que les élèves répètent imperturbablement chaque chapitre du résumé, d'empêcher qu'ils n'en oublient aucun article, et de s'assurer, en leur faisant tracer rapidement des figures, qu'ils comprennent ce qu'ils récitent.

Pour éviter de grossir le livre inutilement, nous avons cherché à faire du résumé une espèce de *Table des matières:* à droite sont les numéros des pages et à gauche les numéros des articles où se trouvent, soit les définitions, soit les principes.

RÉSUMÉ.

LIGNES ET ARÊTES DES CORPS.

Nos. Pag.

On appelle *corps*, tout ce qui peut être touché; un corps a des faces et des arêtes ou *lignes*. 9

On nomme aussi *lignes*, tous les traits fins qu'on trace sur un corps.

Un *point* est une partie extrêmement courte d'une ligne.

LIGNE DROITE.

1. Une ligne est *droite*, quand elle peut se confondre avec une des arêtes d'une bonne règle; elle est courbe, lorsqu'elle ne le peut pas.

La *ligne droite* est le plus court chemin pour aller d'un point à un autre, et la *vraie distance* de ces deux points.

3. Deux points suffisent pour déterminer une ligne droite. 10

CERCLE.

4. Le *cercle* ou *circonférence* est une ligne courbe fermée, qui se décrit avec un compas 11

5. Le *centre* du cercle est le point occupé par la pointe fixe du compas qui décrit la courbe.

Un *rayon* est une droite qui va du centre à la circonférence.

Une *corde* est une droite qui joint deux points de la circonférence.

Un *arc* est une partie quelconque de la circonférence.

Un *diamètre* est une corde qui passe par le centre.

Tous les rayons d'un cercle sont égaux.

Chaque diamètre vaut deux rayons. 12

Tous les diamètres d'un cercle sont égaux.

La circonférence est le lieu où se trouvent tous les points situés à une distance du centre, égale au rayon.

COMPARAISON DES CERCLES ET DE LEURS ARCS.

8. Les longueurs des circonférences se contiennent comme les rayons ou comme les diamètres.

11. Les nombres de tours que font dans le même tems deux roues dentées qui engrènent l'une sur l'autre, se contiennent à l'inverse des rayons. 13

13. Deux circonférences de même rayon sont égales. . . . 14

14. Un arc en contient un autre de même rayon, autant de fois qu'il peut en recevoir la corde.

Nos.		Pag.
	Chaque parallèle est le lieu de tous les points situés à une même distance de l'autre	31
46.	Deux droites parallèles à une troisième, sont parallèles entre elles.	
47.	Une *transversale* est une droite qui traverse d'une manière quelconque, l'ensemble de plusieurs autres droites.	
	Deux parallèles et une tranversale forment des couples *d'angles correspondans* et des couples *d'angles alternes-internes*	32
	Les angles correspondans sont tous deux du même côté de la transversale, l'un en dedans des parallèles, l'autre en dehors.	
	Les angles alternes-internes sont tous deux en dedans des parallèles et séparés par la transversale.	
	Les angles correspondans sont égaux.	
	Les angles alternes-internes sont égaux.	
	Si deux droites coupées par une troisième, forment des angles égaux qui aient des positions analogues à celles des angles correspondans ou à celles des angles alternes-internes, ces deux droites sont parallèles.	
	Des perpendiculaires à une même droite sont parallèles.	

TANGENTES ET CERCLES TANGENS.

51.	Une *tangente* est une droite qui n'a qu'un seul point de commun avec un cercle.	34
	Le *contact* d'une tangente est le point commun à la droite et au cercle.	
	Une droite est tangente, quand elle est perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon.	
53.	On peut toujours mener deux tangentes par un point situé hors d'un cercle.	35
54.	Les tangentes parallèles d'un cercle sont perpendiculaires aux extrémités d'un même diamètre.	
55.	Deux cercles ont quatre tangentes communes.	
	Les contacts d'une tangente commune à deux cercles sont sur des rayons parallèles.	
56.	Deux cercles tangens l'un à l'autre n'ont qu'un seul point de commun.	
	Le contact de deux cercles tangens est sur la droite des centres	36
	Deux cercles se touchent extérieurement, quand la distance des centres est la somme des rayons.	
	Un cercle en touche un autre intérieurement, quand il est moindre et que la distance des centres égale la différence des rayons.	
57.	Deux arcs se *raccordent*, lorsqu'ils sont tangens.	
	Les *cintres surbaissés* et les *arcs rampans* sont des courbes ordinairement composées d'arcs de cercle qui se raccordent.	

N°. Pag.

COMPARAISON DES DROITES.

EXTRACTION DE RACINE.

POLYGONES.

Mesurage des quadrilatères et des triangles.

POLYGONES RÉGULIERS.

COMPARAISON DES POLYGONES.

Nos Pag.

Pour mesurer l'ensemble d'une suite de trapèzes qui ont tous même hauteur et deux à deux une base commune, il faut faire la somme des bases communes, y ajouter les moitiés des bases extrêmes, et multiplier le total par la hauteur d'un trapèze. . . 112

159. Lorsque dans une suite de trapèzes, terminée par deux triangles, les figures ont toutes même hauteur et deux à deux une base commune, on obtient la superficie totale en multipliant la somme des bases par une seule hauteur. 113

161. Un terrain en pente doit être arpenté horizontalement. 114

162. *Partager* un terrain, consiste en général à y tracer des triangles égaux aux moitiés des portions. . . 115

DESSIN DES CORPS.

164. Le *dessin complet* d'un corps se compose d'un plan et d'une élévation. 118

Le *plan* d'un corps est l'ensemble des pieds des perpendiculaires abaissées des divers points du corps, sur un plan horizontal.

165. L'*élévation* d'un corps est l'ensemble des pieds des perpendiculaires abaissées des divers points du corps, sur un plan vertical 119

166. La *ligne de terre* d'un dessin sépare le plan de l'élévation; elle représente l'intersection du plan horizontal et du plan vertical. 120

SURFACES COURBES.

169. La *surface courbe* d'un corps est une face courbe qui n'est interrompue par aucune face plane. . . . 122

Une surface courbe *réglée* peut être touchée dans quelques sens seulement, par tous les points d'une règle.

SURFACES CYLINDRIQUES.

170. La *surface cylindrique* est une surface courbe réglée selon des parallèles.

Un cylindre est un corps terminé par une surface cylindrique et deux faces planes.

Un *cylindre complet* a deux faces planes parallèles; ces faces en sont les bases.

Les droites de la surface courbe d'un cylindre complet, sont toutes de même longeur 123

Un *cylindre tronqué* a deux faces planes non parallèles; l'une en est la base et l'autre la *troncature*.

Un *cylindre circulaire* a un cercle pour base.

Un *cylindre oblong* a pour base une courbe fermée non circulaire.

Nos Pag.

SURFACES SPHÉRIQUES.

186. La *surface sphérique* est une surface courbe non réglée ; tous ses points sont également distants d'un autre qui est le *centre*. 130
Une *sphère* est un corps terminé de toutes parts par la surface sphérique.
Les *rayons* d'une sphère sont des droites qui vont du centre à la surface courbe ; ils sont tous égaux.
Les *diamètres* d'une sphère sont des droites qui joignent chacune deux points de la surface courbe, en passant par le centre ; ils sont tous égaux.
Le diamètre d'une sphère est double du rayon.
188. Une surface sphérique égale le produit de 3,1416 par le quarré numérique du diamètre.
189. Une *calotte sphérique* est la surface courbe d'une portion de sphère terminée par un cercle qui en forme la base.
La hauteur d'une calotte sphérique est la plus grande distance de la face courbe à la base. 131
Une calotte sphérique égale le produit fait avec le diamètre de la sphère, le nombre 3,1416 et la hauteur.
190. Une zône sphérique est la surface courbe d'une portion de sphère terminée par deux cercles parallèles qui en sont les bases.
La hauteur d'une zône est la distance de ses bases.
Une zône se mesure comme une calotte.

SURFACES ANNULAIRES.

191. Les surfaces courbes des anneaux ronds sont des *surfaces annulaires*.
192. La surface courbe d'un anneau rond égale le produit fait avec la demi-somme du plus grand diamètre et du diamètre du vide, la demi-différence de ces longueurs et le quarré de 3,1416. 132
La surface d'une pièce de bois courbe et ronde, non compris les faces des bouts, égale le produit de l'arc qui tient le milieu entre le plus grand et le plus petit, multiplié par le contour pris dans un plan perpendiculaire aux tangentes de ces arcs.

SURFACES COURBES CIRCULAIRES.

193. Une *surface courbe circulaire* peut être coupée selon des circonférences, par des plans parallèles. . . 133
Une surface courbe circulaire égale la somme des surfaces courbes des troncs de cône à bases parallèles, et d'une très-petite longueur, dont se compose le corps.

CORPS.

Les corps sont des *polyèdres* ou des *corps ronds* ou des combinaisons de ces deux espèces.

Nos Pag.

POLYÈDRES.

194. Un *polyèdre* est un corps dont toutes les faces sont planes. 154

Un *prisme* est un polyèdre dans lequel toutes les arêtes limitées à une même face, sont parallèles.

Une *pyramide* est un polyèdre dans lequel toutes les arêtes limitées à une même face, sont concourantes.

PRISMES.

195. La *base* d'un prisme est la face d'où partent les arêtes parallèles.

Un *prisme complet* a deux bases parallèles, et ses arrêtes parallèles sont égales.

Un *prisme tronqué* n'a qu'une base; ses arêtes parallèles sont inégales, mais comprises entre deux faces planes.

Les *faces latérales* d'un prisme sont celles qui vont d'une base à l'autre, ou de la base à la troncature.

Un prisme est *droit*, quand les arêtes parallèles sont perpendiculaires sur la base.

Un prisme est *oblique*, lorsque les arêtes parallèles sont inclinées sur la base.

La *hauteur* d'un prisme complet est la perpendiculaire abaissée d'un point de la base supérieure, sur la base inférieure.

La *longueur* d'un prisme égale celle d'une des arêtes parallèles.

On distingue les prismes par les noms des polygones qui forment les bases 155

Un *parallélipipède* est un prisme qui a pour base un parallélogramme.

Un *prisme rectangle* est droit et a pour base un rectangle.

Un *prisme carré* est droit et a pour base un carré.

Un *cube* est un parallélipipède dont les six faces sont des carrés.

Comparaison des prismes.

199. Le *volume* d'un corps est l'espace plein renfermé entre toutes les faces. 156

La *capacité* d'un corps creux est l'espace vide renfermé entre les parois.

La capacité se mesure comme le volume.

200. Deux prismes quelconques sont équivalens en volume, quand il y a équivalence entre les bases et égalité entre les hauteurs.

Deux prismes quelconques de même hauteur se contiennent comme leurs bases 157

Comparaison des pyramides.

Mesurage des pyramides.

FIN.

GÉOMÉTRIE DES COURBES

APPLIQUÉE AUX ARTS.

Seront réputés contrefaits, les exemplaires qui ne porteront pas la signature de l'auteur.

Bergery

METZ. — TYPOGRAPHIE DE S. LAMORT.

GÉOMÉTRIE

DES COURBES

APPLIQUÉE AUX ARTS,

par

C. L. BERGERY,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR DES SCIENCES APPLIQUÉES
A L'ÉCOLE D'ARTILLERIE DE METZ, MEMBRE CORRESPONDANT DE L'INSTITUT
ET DE PLUSIEURS AUTRES SOCIÉTÉS SAVANTES.

SECONDE ÉDITION,

FAITE SUR UN NOUVEAU PLAN,

AUGMENTÉE DE PLUSIEURS COURBES ET D'UN GRAND NOMBRE DE PRINCIPES,
DE DÉMONSTRATIONS, DE TRACÉS ET D'APPLICATIONS.

METZ.

Mme THIEL, ÉDITEUR, RUE DU LANCIEU, 7.
WARION, RUE DU PALAIS, 2.

PARIS.

BACHELIER, QUAI DES AUGUSTINS, 55. | CHAMEROT, QUAI DES AUGUSTINS, 33.
HACHETTE, RUE PIERRE-SARRASIN, 12. | CARILIAN-GOEURY, Q. DES AUGUSTINS, 39.

1843.

AVANT-PROPOS.

L'utilité de l'étude des courbes ne saurait être mise en doute, du moins par ceux qui donnent aux corps les formes appropriées aux besoins des arts, ni par ceux dont les conceptions créent ces besoins, et l'opinion de juges si compétents est bien assez puissante pour entraîner l'assentiment général. S'il restait pourtant à convaincre quelques esprits rebelles, nous n'aurions qu'à mettre sous leurs yeux le tableau des applications signalées dans notre ouvrage : ils y verraient des preuves aussi fortes qu'intéressantes et nombreuses.

Pourquoi donc les propriétés des courbes, toujours importantes, et si belles parfois qu'on pourrait les dire merveilleuses, ne sont-elles pas mises à la portée de tout le monde, comme celles de la ligne droite et du cercle? De nos jours, les sections coniques exigent le secours d'une analyse difficile; les courbes mécaniques ne sont étudiées qu'avec la partie la plus élevée de la science du mouvement ; d'autres courbes transcendantes servent d'applications au calcul différentiel et intégral, où elles sont traitées fort incomplètement ; les caustiques se trouvent reléguées parmi les secrets de l'optique, qu'à peu de personnes il est donné de pénétrer ; la sinusoïde et les hélices ne sortent jamais du domaine de la Géométrie descriptive ; enfin, les érudits seuls connaissent les livres où se rencontrent les lemniscates et les conchoïdes.

Est-ce donc pour abréger, ou pour éluder de graves difficultés qu'on a rejeté la méthode synthétique des anciens ? Sans doute, dans bien des cas, l'analyse décompose plus rapidement une vérité en toutes ses conséquences, que la synthèse ne parvient à l'édifier par la combinaison de tous les éléments ; mais dans d'autres cas, aussi nombreux peut-être, l'avantage appartient à la marche géométrique, qui est même alors beaucoup moins pénible que l'autre. De tous les faits dont nous pourrions appuyer cette assertion, nous citerons seulement la théorie des caustiques : elle offrira une preuve frappante, si l'on compare les beaux travaux analytiques de M. *Sturm* et de M. *de Saint-Laurent*, insérés dans les Annales de mathématiques, au peu de pages où nous avons complètement démontré toutes les remarquables propriétés de ces courbes, à l'aide des ingénieuses considérations qu'employait *Tschirnhaus*, vers 1680, et qu'au commencement de ce siècle, *Petit* a reproduites sous une forme nouvelle, dans la Correspondance sur l'École Polytechnique.

Quant aux dificultés, elles seraient insurmontables, il est vrai, si la Géométrie restait réduite aux seules ressources que lui fournissent les éléments enseignés dans les écoles. Mais, pourquoi s'obstiner à restreindre ainsi la puissance de cette belle science ? Pourquoi ne pas ajouter aux théorèmes des traités en vogue, quelques théorèmes sur les transversales, les polaires, les centres de similitude et les axes radicaux? Notre Géométrie appliquée à l'industrie, où, pour la première fois, ils ont été présentés d'une manière élémentaire, montre bien qu'ils sont tout aussi faciles que ceux d'*Euclide*, et l'on doit déplorer le peu de succès qu'a obtenu la méritante tentative de M. *Vincent* pour les introduire dans l'enseignement des colléges.

Nos lecteurs verront que les principes additionnels qui viennent d'être indiqués, joints parfois aux premières notions de l'Algèbre et de la Trigonométrie, nous ont suffi, avec la féconde méthode des projections, pour mettre en lumière, touchant les courbes et leurs aires et les corps qu'elles engendrent, toutes les vérités qui, jusqu'à présent, n'ont été établies qu'au moyen de l'analyse la plus savante.

Si quelques-unes de nos démonstrations paraissent dénuées de cette rigueur extrême dont *Legendre* a inspiré le goût exclusif à ses disciples, la faute n'en est point aux ressources dont nous disposions; elle doit être uniquement attribuée à notre préférence pour les raisons que leur simplicité n'empêche pas de porter dans l'esprit une entière conviction. Maintes fois nous avons trouvé tout d'abord, et même entièrement rédigées, de ces démonstrations très-rigoureuses, bien propres à constater une certaine égalité de puissance entre la Géométrie et l'analyse; cependant, quelque bonnes qu'elles fussent, nous n'avons pas hésité à les rejeter, pour leur en substituer d'autres, inférieures en force, mais aussi beaucoup moins compliquées. Qu'un fait nouveau soit mis à l'abri de la moindre objection, tout bon esprit en reconnaît la nécessité, tant l'erreur est à craindre; mais la briéveté de la vie et la propagation des lumières veulent que l'interprète de la science se borne à faire admettre et comprendre les principes sanctionnés.

Pascal disait qu'on n'est pas dispensé de démontrer synthétiquement une vérité, pour l'avoir découverte par voie d'analyse. C'est là, d'ailleurs, le seul moyen de pénétrer l'essence des choses, et d'en reconnaître les causes, que les formules tiennent presque toujours cachées. Tous les grands géomètres du même temps partageaient l'opinion de Pascal, puisqu'à leurs opérations de calcul infinitésimal succédaient ordinairement des démonstrations géométriques, et si ces sages savants n'avaient pas eu à découvrir, nul doute qu'ils eussent commencé par où ils finissaient, après avoir employé leur admirable instrument d'invention. Faisons donc ce qu'ils auraient fait à notre place, puisqu'il ne s'agit plus que d'exposer des propriétés connues, puisque les moyens de les démontrer facilement ne nous manquent pas. Laissons les procédés modernes, qui exigent de fort longues études, à ceux dont la mission est de reculer les bornes de la science, et revenons à la manière des Grecs, pour faire descendre jusqu'aux commençants, des connaissances utiles, maintenant placées dans des régions trop élevées.

Mais, c'est bien ici le cas de dire, avec le fabuliste: *On le peut, je l'essaïe; un plus savant le fasse.* Néanmoins, nous avons conscience d'avoir employé tout ce qui nous a été départi de force et de volonté, pour rendre cette seconde édition digne de l'empressement flatteur qu'elle a excité. La première n'était guère qu'une compilation indigeste, rédigée à la hâte, dans l'hiver de 1826, pour les Cours industriels de Metz; plusieurs courbes, beaucoup de principes manquaient; il en était de même d'importants tracés et d'utiles applications; les démonstrations étaient rares: nous n'avions pu donner, faute de temps, que celles qui se présentaient d'elles-mêmes, pour ainsi dire. Cependant, cette Géométrie des courbes répondait si bien à un besoin du public studieux, qu'en moins de deux ans l'édition fut épuisée, et que la réimpression n'a pas cessé d'être sollicitée, depuis 1828.

Aujourd'hui, l'ouvrage semble à peu près complet: nous avons ajouté les conchoïdes, les logarithmiques, les développées des sections coniques, les caustiques et leurs développantes; tous les principes, tous les tracés, sans aucune exception, sont démontrés avec soin et aussi simplement qu'il nous a été possible. Un chapitre, placé en tête des autres, offre, sous le titre de *Notions générales*, les définitions, les faits et les tracés communs à toutes les courbes, pour qu'on les retrouve plus aisément, ou qu'il y ait moins de redites. Le second chapitre traite spécialement des sections coniques, parce que ses trois parties qui concernent l'ellipse, l'hyperbole, la parabole, étendues chacune en raison de son importance, et placées à leurs rangs dans le chapitre des courbes planes, eussent trop éloigné les parties voisines, beaucoup plus courtes. Un quatrième et dernier chapitre est consacré à l'étude générale des courbes à double courbure, et particulièrement à celle des hélices, les seules de cette nature qui soient intéressantes.

Enfin, nous avons dû chercher une classification des courbes, différente de la classification usitée: basée sur les degrés des équations, celle-là convient sans doute à une discussion analytique, mais elle ne dit absolument rien à l'esprit. Il nous a paru que la Géométrie devait plutôt considérer l'analogie des formes et des modes de génération, et cette idée nous a conduit à un système de classes, d'ordres, de genres, d'espèces, de variétés même, qui embrasse non-seulement le petit nombre de courbes connues que leur peu d'importance nous a fait omettre, mais encore toutes les courbes planes ou à double courbure dont l'existence est possible.

Outre les auteurs déjà nommés dans cet AVANT-PROPOS, et ceux qui se trouvent cités à la fin de la première édition, nous avons consulté la collection de *Pappus*, les œuvres de *Jean Bernoulli*, plusieurs mémoires de *Leibnitz* et de *Huygens*, insérés dans les Actes de Leipsick. Distinguer les emprunts faits aux uns et aux autres, des principes, des tracés et des nombreuses démonstrations qui nous appartiennent, nous serait maintenant à peu près impossible, n'ayant pas attaché assez d'importance à nos petites productions pour les noter, ni voulu charger les pages du livre de fastidieuses citations. Mais il n'y a pas grand inconvénient à la confusion de trésors connus de tous les savants, avec notre pauvre billon. Ceux qui écriront un jour l'histoire de la Géométrie moderne, sauront bien faire notre faible part, s'ils daignent s'occuper de nos œuvres, et quant à nos lecteurs actuels, peu doivent leur importer les sources où nous avons puisé : l'essentiel pour eux est que cette géométrie leur enseigne ce qu'ils veulent apprendre des *courbes*. Au reste, et afin de prévenir toute contestation, nous consentons bien volontiers à n'avoir que le mince mérite de rédacteur, sans décliner toutefois la responsabilité des erreurs qui peuvent se trouver dans le fond; car cet ouvrage a été composé uniquement pour glorifier la science et la rendre facile; si l'intérêt de notre vanité, au lieu du désir d'*être utile*, avait pu nous porter à l'entreprendre, il n'eût certes pas été assez puissant pour nous soutenir jusqu'à la fin.

Qu'il nous soit permis de témoigner, en terminant, nos sincères regrets, à tous ceux que nous avons fait attendre si long-temps. Notre excuse est dans les énormes et nombreuses difficultés qu'il a fallu vaincre pour rendre élémentaires des connaissances jusqu'ici transcendantes, et dans la composition de deux ouvrages, d'assez longue haleine, qui nous ont été imposés depuis l'annonce de cette seconde édition, l'un sur les Affûts et les Voitures, l'autre sur les Machines des établissements de l'Artillerie.

Le lecteur est invité, dans son intérêt, à opérer, avant de commencer l'étude de ce livre, les petites corrections qu'indique l'errata, et à marquer d'un signe marginal toutes les autres lignes fautives, ainsi que les endroits où doivent être placées les additions.

GÉOMÉTRIE

DES COURBES.

NOTIONS GÉNÉRALES.

1. Il n'y a qu'un seul chemin pour aller directement d'un point à un autre; lorsqu'on s'en écarte, on suit soit une ligne brisée, c'est-à-dire un chemin composé d'un certain nombre de lignes droites mesurables, soit une *ligne courbe*, c'est-à-dire un chemin qui, changeant de direction à tout instant, peut être considéré comme formé d'une infinité de lignes droites extrêmement courtes.

Les lignes brisées différentes qui conduisent d'un point à un autre, sont évidemment innombrables; il doit en être de même des lignes courbes puisqu'elles ne se distinguent des lignes brisées que par l'exiguité de leurs parties. Aussi peut-on, pour passer d'un point à un autre, suivre, par exemple, un arc de cercle, une courbe qui coupe trois fois, quatre fois, cinq fois, etc., la ligne droite que déterminent les deux points, une courbe qui tourne autour de l'un de ces points ou autour des deux, une courbe qui revienne sur elle-même et se coupe à plusieurs reprises, comme une corde dans un nœud droit, enfin, une courbe qui ait des points sur les divers plans où se trouvent les deux points donnés.

Il existe donc une infinité de courbes différentes. Les unes, contenues tout entières dans un seul plan, sont appelées *courbes planes;* les autres qui changent de plan pour ainsi dire en chaque point, ont *deux courbures*, comme les arêtes d'une vis.

« C'est principalement des courbes planes que nous allons nous occuper; comme les courbes à double courbure ne sont pas à beaucoup près aussi importantes pour les arts, et qu'elles ne peuvent être représentées qu'au moyen des procédés de la géométrie descriptive, nous étudierons seulement celles qui forment les arêtes des vis cylindriques et des vis coniques. »

« Notre marche sera la même que dans la géométrie de la ligne droite et du cercle: nous exposerons successivement les propriétés, les tracés et les mesurages des courbes les plus employées, la formation, les propriétés et les mesurages des surfaces que limitent ces courbes, la formation et la comparaison des corps terminés par ces surfaces; enfin nous combinerons chaque courbe, chaque surface avec les lignes et les surfaces précédemment étudiées, toutes les fois du moins qu'il en pourra résulter quelque notion utile. »

« Mais avant de s'occuper d'une courbe déterminée, il convient d'acquérir les notions et d'apprendre les tracés qui concernent toutes les courbes planes. C'est donc par là que nous allons commencer, afin de grouper d'une manière saillante ces généralités, et de n'avoir plus qu'à y renvoyer, quand l'occasion se présentera d'en faire l'application. »

TRACÉ DES COURBES.

2. Certaines courbes peuvent être tracées d'un mouvement continu, comme la circonférence; mais elles sont en très-petit nombre. Quant aux autres, leurs propriétés fournissent les moyens d'en déterminer plusieurs points, et il faut ensuite joindre ces points par une ligne. C'est là ce qu'on appelle *le tracé par points*.

Problème : *Tracer une courbe dont plusieurs points sont donnés.*

Si l'opération se fait sur le papier, on peut l'exécuter à vue ou à l'aide d'un instrument nommé *pistolet*. Le tracé à vue exige qu'en joignant deux points voisins A, B (P. I, F. 1), on regarde au moins le point suivant C; sans cette attention, le crayon, après avoir été de A en B, ne pourrait plus probablement joindre B à C, ni, à plus forte raison, C à D, sans faire un ou plusieurs angles visibles, et la ligne ABCDE qui aurait alors des *jarrets* F, G, H, I (F. 2), ne serait pas une courbe (1); elle offrirait l'ensemble de plusieurs lignes courbes A'B'F, FC'D'G, GH, HI, IE'.

Le pistolet (F. 3) est une feuille mince de bois, découpée de manière à présenter des arcs de cercle de différents rayons, qui se raccordent, et même des arcs de courbes arbitraires. Pour tracer à l'aide de cet instrument une courbe dont on connaît plusieurs points, on le place de façon qu'un des arcs couvre les trois premiers A, B, C, puis on fait glisser le crayon ou la plume le long de cet arc, de A en C. Il faut ensuite chercher un autre arc qui puisse couvrir à la fois une partie de BC et le quatrième point D, puis un arc qui puisse couvrir une partie de CD et le cinquième point, et continuer toujours ainsi jusqu'au dernier E. La ligne que fournit ce procédé est un ensemble d'arcs qui, se raccordant parfaitement et unissant tous les points donnés, diffère très-peu de la courbe qu'il s'agit d'obtenir.

Sur le terrain, vous planterez des piquets aux points A, B, C, etc., le premier un peu à gauche de A, le second un peu à droite de B, le troisième un peu à gauche de C, et ainsi des autres; puis vous placerez de champ une règle flexible qui laisse le piquet A à gauche, le piquet B à droite, le piquet C à gauche, et vous tracerez une ligne le long de cette règle; puis vous ferez glisser l'instrument jusqu'à ce qu'il s'appuie contre le piquet D, en le laissant à droite, tout en continuant de toucher les piquets B, C, et vous tracerez une seconde ligne, de C en D. Opérant de la même manière pour chacun des autres points, vous finirez par avoir une courbe ABCDE, composée d'arcs parfaitement raccordés.

3. Le tracé par points se fait plus facilement et avec plus d'exactitude, quand on connaît à l'avance les positions de quelques tangentes de la courbe. Ces droites forment alors des limites que la pointe traçante ne peut franchir et que doit toucher la ligne par laquelle on unit les points donnés.

Problème : *Tracer une courbe dont on connaît des points et des tangentes.*

Supposons qu'il s'agisse de faire passer par les points A, B, C, D, E (P. I, F. 4), une courbe qui doive avoir pour tangentes les droites FG, GH, HI, IK; vous tracerez d'abord l'arc AB de manière qu'il touche FG quelque part; puis vous rendrez l'arc BC tangent à GH, l'arc CD tangent à HI, et l'arc DE tangent à IK, quel que soit celui des trois procédés du n° 2 qui se trouve employé.

COMBINAISONS DES COURBES ET DE LA DROITE.

4. Une droite considérée par rapport à une courbe est sécante, ou tangente, ou *normale*, c'est-à-dire perpendiculaire à une tangente, au point de contact même, comme les rayons du cercle.

Il y a des courbes qui ne peuvent être coupées qu'en deux points par chacune de leurs sécantes : la circonférence fait partie de cette classe; d'autres sont coupées en deux points dans de certaines parties, et en un plus grand nombre de points dans des parties différentes : les courbes en S en offrent des exemples (P. I, F. 1); d'autres enfin sont coupées en une infinité de points par plusieurs de leurs sécantes : dans ce nombre se trouvent les courbes qui serpentent et celles qui font un nombre infini de tours autour d'un point (F. 4).

5. La partie de sécante comprise entre deux points de la courbe est une *corde*, comme dans le cercle.

Lorsque toutes les cordes parallèles d'une courbe sont divisées en deux parties égales par une autre corde, cette dernière est un *diamètre*, et si tous les diamètres se croisent au même point, ce point est un *centre*. Mais tous les diamètres d'une courbe ne sont pas égaux comme ceux de la circonférence, et le centre n'est pas également distant de tous les points de la courbe.

Il peut se faire qu'un diamètre soit perpendiculaire aux cordes qu'il coupe par le milieu. Dans ce cas, la courbe est dite *symétrique*, parce que ses deux parties, rabattues l'une sur l'autre, pouvant se couvrir avec exactitude, sont symétriquement placées par rapport au diamètre. Cette droite prend alors le nom *d'axe de symétrie* ou *d'axe* tout simplement.

6. Il existe encore d'autres axes qu'on appelle *axes des coordonnées* : ce sont deux droites prises à volonté, mais ordinairement perpendiculaires entre elles, par exemple les droites AB, AN, pour la courbe de la figure 20 (P. I). Les parallèles OG, PK menées à l'une, des points de l'autre, jusqu'à la courbe, se nomment *ordonnées*; les parties AO, AP de la seconde sont appelées *abscisses*; les ordonnées et les abscisses portent en commun le nom de *coordonnées*, et le point A, intersection des deux axes, est *l'origine* des coordonnées. Celui AN de ces axes qui est parallèle aux portions de cordes OG, OK est souvent nommé *axe des ordonnées*, et celui AB sur lequel se prennent les abscisses, reçoit la désignation particulière *d'axe des abscisses*.

Les coordonnées servent à indiquer, à déterminer les points d'une courbe. Ainsi, après avoir fixé les positions des axes AB, AN, on assigne celle du point K, par exemple, en donnant la longueur de l'abscisse AP et celle de l'ordonnée PK. Il est clair, effectivement, qu'ayant porté la longueur de l'abscisse de l'origine A en P, on arrivera au point K, si l'on parcourt, parallèlement à AN, un chemin droit égal à la longueur de l'ordonnée.

7. La tangente d'une courbe est, comme celle du cercle, une sécante dont deux points d'intersection se trouvent réunis en un seul qui forme le contact ; mais il arrive souvent qu'après avoir touché la courbe, la tangente va la couper en un autre point ou en plusieurs; quelquefois même le contact est un point d'intersection. Enfin certaines tangentes ne vont toucher la courbe qu'en un point infiniment éloigné; on nomme ces droites *asymptotes* (acemptote), pour exprimer que la courbe ne les atteint qu'à l'infini ou plutôt qu'elle ne les atteint jamais, quoiqu'elle s'en rapproche de plus en plus.

La tangente qu'on menerait à la courbe ABCDE, par le point B (P. I, F. 1), n'aurait que ce seul point de commun; mais celle dont le contact serait D irait couper la courbe près de E.

La tangente qui toucherait en B la courbe sans fin ABCD... (F. 4) la couperait en une infinité d'autres points.

Le contact est une intersection, quand la tangente d'une courbe en S la touche précisément au point A où cette courbe cesse d'être concave d'un côté et commence à le devenir par rapport au côté opposé (F. 5). Comme toute tangente se détache d'une courbe du côté de la convexité, il est clair que BC doit laisser à gauche l'arc DEA et à droite l'arc AFG; par conséquent, elle coupe la courbe DEAFG au point A; mais elle n'en est pas moins tangente à l'arc EAF de la courbe, puisqu'elle n'a qu'un seul point de commun avec cet arc.

8. Tout point A où une courbe est à la fois touchée et coupée par sa tangente, est un *point d'inflexion*. On le nomme ainsi, parce que la courbe s'y *infléchit* dans un sens opposé au précédent.

La tangente en un point d'inflexion est comprise dans la série des sécantes qui coupent la courbe trois fois, comme la droite EF; mais pour elle, les trois points d'intersection sont réunis en un seul A, et c'est pour cela même que ce point A est à la fois un contact et une intersection, car il suffit de la réunion de deux intersections pour former un contact (7).

9. Les points d'inflexion sont au nombre des points remarquables ou *singuliers* des courbes, et dans cette catégorie se trouvent aussi les *points multiples* et les *points de rebroussement*.

On donne le premier de ces deux noms à tout point où la courbe passe deux fois au moins. Ainsi, A est un point multiple (P. I, F. 6), puisque la courbe y passe en allant de B vers C, et y repasse en allant de C vers D. Tout point multiple est le contact de tangentes différentes dont le nombre égale celui des arcs qui s'y croisent.

Le deuxième nom est donné à tout point qui termine deux arcs contigus tangents l'un à l'autre. Mais il y a trois espèces de points de rebroussement : la première présente une pointe de pique A (F. 7), la seconde B (F. 8) fait partie d'une échancrure en cœur, et la troisième C (F. 9) est l'extrémité d'une sorte de corne. Dans chaque espèce, les deux arcs ont nécessairement une tangente commune dont le contact est le point de rebroussement.

10. Les applications des courbes aux arts obligent souvent à déterminer la position d'une tangente, et il existe pour cela des procédés généraux que nous devons faire connaître dès à présent.

PROBL. (*a*) : *Tracer une droite qui touche une courbe en un point donné* A (P. I, F. 10).

Solution 1 : Tirez par A un grand nombre de cordes AB, AC, AD, AE, AF, AG, etc., qui forment deux faisceaux, l'un à gauche de A, l'autre à droite ; portez sur toutes ces cordes une longueur arbitraire, à partir de la courbe et en dedans pour l'un des faisceaux, en dehors pour l'autre ; vous marquerez par là les points *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, etc. Joignez ces points par une courbe ; elle passera nécessairement par A, puisque de ce point on peut toujours mener une corde de la courbe donnée, qui soit égale à la longueur arbitraire B*b*. Maintenant, avec cette longueur pour rayon, décrivez de A un arc qui coupe la courbe auxiliaire *dcb*A*cfg* en un point H, et tirez AH ; cette droite sera la tangente demandée, car il est visible que si l'on connaissait la tangente en A de la courbe donnée, on obtiendrait un point H de la courbe auxiliaire, en portant B*b* sur cette tangente, à partir de A.

Observez que la longueur arbitraire B*b* doit être prise aussi grande qu'il est possible, afin que H et A déterminent plus exactement la position de la tangente. Si vous êtes obligés de faire B*b* fort courte, vous la porterez une seconde fois, sur les mêmes cordes, mais en sens contraire ; il en résultera une seconde courbe auxiliaire $d'c'b'$A$e'f'g'$ qui vous fournira un troisième point H′ de la tangente, plus éloigné de H que A.

C'est surtout dans le voisinage de la position présumée de AH, qu'il faut mener des cordes, afin d'y déterminer avec plus d'exactitude les points des courbes auxiliaires. Or la seconde extrémité B d'une de ces cordes peut se trouver tellement près de A, qu'il soit difficile de bien tracer une droite d'un de ces points à l'autre. Dans un semblable cas, vous marquerez, avec une seule ouverture de compas, deux points d'une perpendiculaire au milieu de AB, comme si cette corde était déjà tirée; puis, de chacun de ces points I, K et avec un rayon quelconque, vous décrirez un arc, ce qui vous donnera un point L appartenant au prolongement de AB. Cela résulte de ce que AB est perpendiculaire au milieu de la droite IK non tracée.

Solution 2: Marquez sur la courbe deux points quelconques B, C, près de A, l'un à droite, l'autre à gauche (P. I, F. 11); tirez les cordes BA, AC, et prolongez-les indéfiniment du même côté; portez BA au bout de AC, de C en D, puis AD sur le prolongement de BA, de A en D'; prenez AB' égale à AB, et menez, par B', une parallèle à AD'. Le point T où cette parallèle rencontrera DD', appartiendra à la tangente au point A de la courbe, et AT sera cette tangente*.

Nous démontrerons que AT touche la courbe, en faisant voir qu'elle touche en A le cercle O qui passe par B, A, C, car ce cercle est nécessairement tangent à la courbe, au même point. Or, d'après la construction, $B'D = AD - AB' = AC + CD - AB'$, $CD = AB$, $AB' = AB$, et par suite, $B'D = AC$. Les perpendiculaires Dd, $D'd'$ abaissées sur AT donnent

$$D'd' : Dd :: D'T : DT :: AB' : B'D.$$

Donc, $$D'd' : Dd :: AB : AC.$$

Mais en abaissant encore sur AT, les perpendiculaires Bb, Cc, on a les deux autres proportions

$$Dd : Cc :: AD : AC,$$
$$Bb : D'd' :: AB : AD',$$

et $AD' = AD$. Multipliant les trois dernières égalités de rapports, nous obtiendrons

$$Bb : Cc :: \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2.$$

Reste donc à démontrer qu'effectivement *les distances* Bb, Cc *de deux points d'un cercle à sa tangente sont proportionnelles aux quarrés numériques des cordes* AB, AC *comprises entre ces points et le contact.*

Abaissons de B une perpendiculaire BE sur le diamètre AF. Le segment $AE = Bb$, et la propriété connue des cordes du cercle (G. 176) fournit la proportion $Bb : AB :: AB : AF$, ou l'égalité $Bb \times AF = \overline{AB}^2$. De même $Cc \times AF = \overline{AC}^2$. Conséquemment

$$Bb : Cc :: \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2.$$

---

* Cette construction est due à M. *Babinet*.

Un autre procédé repose sur ce principe : *tout point A sollicité à prendre des mouvements invariables dans deux directions* AB, AC (P. I, F. 11), *suit la diagonale* AD *du parallélogramme* ABDC *dont les côtés sont les chemins* AB, AC *que parcourrait ce point dans un temps déterminé, s'il pouvait se mouvoir successivement selon chacune des directions.*

Supposons que le point A pût aller en 1″, de A en B, s'il n'était pas tiré selon AC, et de A en C, s'il n'était pas tiré selon AB. Obéissant à la fois aux deux tractions, il n'arrivera dans 1″, ni en B, ni en C : dès qu'il commencera à se mouvoir selon AB, il devra se mouvoir aussi selon AC, et ne pouvant aller par ces deux chemins, il en prendra un qui divisera l'angle BAC. Dans l'instant suivant, il tendra à se mouvoir parallèlement à AB et à AC, et par conséquent, il suivra un second chemin qui divisera l'angle des parallèles, comme le premier divise l'angle BAC. Or, deux droites qui, placées bout à bout, divisent de la même manière deux angles à côtés parallèles, n'en forment réellement qu'une seule. Conséquemment, le point suivra une certaine ligne droite AD, et arrivera, dans 1″, en D par exemple. Mais, puisqu'il eût été en B, dans 1″, s'il n'avait pas subi de traction parallèlement à AC, BD est nécessairement le chemin dû à cette traction, et BD = AC ; de même, puisque A eût été en C dans 1″, s'il n'avait subi aucune traction parallèlement à AB, CD est nécessairement le chemin dû à cette seconde traction, et CD = AB. Donc, ABDC est un parallélogramme, et le chemin AD réellement suivi en est la diagonale.

Il s'ensuit que si un point animé de deux mouvements invariables engendre une courbe, chaque élément droit de cette courbe (1), est dirigé selon la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés sont les chemins que parcourrait le point dans le cas où il n'obéirait à ses deux mouvements que successivement et pendant le même temps.

Or, la tangente d'une courbe est le prolongement de l'élément droit dont le point de contact forme le milieu ; cette tangente se confond donc avec la diagonale du *parallélogramme des chemins.*

PROBL. (*b*) : *Tracer une tangente en un point d'une courbe dont la génération est due à deux mouvements simultanés et invariables.*

Supposons, par exemple, que la courbe ABC (P. I, F. 13) soit la trace d'un point qui, dans un temps donné, s'éloigne de la droite DE, deux fois autant que du point fixe F, et proposons-nous de mener une tangente par le point C. La droite CG perpendiculaire à DE sera double de CF ; de sorte que si le point C pouvait se mouvoir uniquement selon GC, il parcourrait cette longueur dans le même temps qu'il mettrait à parcourir FC, en se dirigeant uniquement selon FC. Menons donc GH parallèle à CF ; CGHF sera le parallélogramme des chemins, et sa diagonale CH donnera la tangente demandée.

PROBL. (*c*) : *Tracer par un point* A *donné à l'extérieur d'une courbe, une droite qui la touche* (P. I, F. 14).

Si le point de contact n'est pas nécessaire, on peut se contenter d'appliquer une règle sur le point donné, de manière qu'elle touche la courbe; la droite tirée le long de cette règle sera la tangente demandée.

Mais, pour marquer le contact avec exactitude, il faut tirer un grand nombre de sécantes par le point A; construire pour chacune, sur la partie qui forme corde, deux triangles équilatéraux, et joindre par une courbe tous les sommets B, C, D, E, F, etc. qu'on obtient ainsi; le point H où elle coupera la courbe donnée, sera le contact de la tangente cherchée, et il ne restera plus qu'à tirer AH, pour avoir cette tangente.

En effet, la tangente est une sécante dont les deux intersections sont confondues; les deux triangles équilatéraux sont donc nuls pour elle, ou plutôt ils se réduisent à un point qui ne peut être que celui du contact; par suite, la courbe des sommets doit passer par ce contact.

Probl. (*d*) : *Tracer une droite qui soit tangente à une courbe et parallèle à une droite donnée* AB (P. I, F. 15).

Lorsqu'on n'a pas besoin du point de contact, il suffit d'appliquer une règle contre la courbe, parallèlement à AB. La droite CD tirée le long de cette règle est la tangente demandée.

Pour marquer exactement le contact, tracez plusieurs cordes parallèles à AB, et le lieu des troisièmes sommets de triangles équilatéraux construits sur ces cordes, de chaque côté, comme dans le problème précédent. Ce lieu EFG coupera la courbe donnée au point de contact F, et il ne restera plus qu'à tirer par F, une parallèle à AB.

Probl. (*e*) : *Tracer une droite qui soit tangente à une courbe et perpendiculaire à une droite donnée* A'B' (P. I, F. 15).

Ce problème présente aussi deux cas, et les solutions sont les mêmes que celles du problème précédent, si ce n'est qu'au lieu de tirer les cordes parallèlement à la droite donnée, il faut les tirer perpendiculairement.

11. Les *normales* des courbes ne sont pas moins utiles que les tangentes, et il y a aussi pour leur tracé des procédés généraux.

Probl. (*a*) : *Tracer une normale en un point donné* C *d'une courbe* (P. I, F. 13).

Menez la tangente CH (10, probl. *a* ou *b*), puis élevez au point de contact C, une perpendiculaire IK sur cette tangente (4).

Probl. (*b*) : *Tracer une normale par un point* A *situé hors d'une courbe* (P. I, F. 16).

Solution 1 : Supposons le problème résolu. La normale demandée AB sera aussi normale à la circonférence décrite de A avec AB pour rayon, puisque les normales d'un cercle sont ses rayons. La circonférence A et la courbe ayant même normale en B, ont aussi même tangente en ce point, et par suite ces deux lignes sont tangentes l'une à l'autre. Si donc nous pouvions déterminer leur contact B, nous aurions un second point de la normale AB, et il serait facile de tracer cette droite.

Or un cercle tangent est au nombre des cercles sécants décrits du même point; seulement, pour celui-là, les deux intersections se confondent et forment le contact.

Décrivez donc de A plusieurs cercles sécants, avec des rayons arbitraires; marquez les troisièmes sommets des deux triangles équilatéraux construits sur chacune des cordes communes à ces cercles et à la courbe donnée; puis joignez par une courbe tous les points ainsi obtenus. Ce lieu des troisièmes sommets passera nécessairement par le contact B du cercle tangent, car la corde commune à ce cercle et à la courbe donnée étant réduite au point B, il s'ensuit que ses deux triangles équilatéraux se réduisent à ce même point. Ainsi, l'intersection de la courbe et du lieu des troisièmes sommets donne un second point de la normale cherchée, et la droite ABC est cette normale.

Solution 2 : Menez plusieurs tangentes BC, B'C', etc. de chaque côté de la position présumée du point où la normale demandée doit rencontrer la courbe (F. 17); abaissez de A des perpendiculaires sur ces tangentes; unissez les pieds D, D', D'', etc. de ces perpendiculaires par une courbe tracée à la main avec beaucoup de soin; le point *d* où elle touchera la courbe donnée sera aussi le point de rencontre d'une tangente *bc* menée par *d* et de sa perpendiculaire, puisque la courbe DD'D''... est le lieu géométrique de toute pareille rencontre. Si donc vous joignez *d* avec A, vous aurez la perpendiculaire à la tangente *bc*, et comme cette perpendiculaire passe par le contact, elle est la normale demandée.

Observation: La courbe DD'D''... passe deux fois par A. La raison de ce fait, c'est que du point A on peut mener deux tangentes à la courbe donnée, et que le même point est le pied de chacune des perpendiculaires abaissées sur ces deux tangentes.

Probl. (*c*) : ***Tracer une normale par un point situé dans l'intérieur d'une courbe.***

Solution 1 : Appliquez la solution 1 du problème précédent.

Solution 2 : Appliquez la solution 2 du problème précédent; mais observez que la courbe des pieds des perpendiculaires aux tangentes ne passe pas par le point donné, attendu qu'on ne peut mener une tangente de ce point intérieur.

12. Toute courbe en engendre une autre, si l'on fait mouvoir une tangente d'une longueur déterminée, de manière que le contact change de position sur la courbe et sur la droite, sans que cette droite glisse en avant, ni en arrière. La tangente change alors de direction à chaque instant; il en est de même du chemin de son extrémité, et par conséquent, cette extrémité trace une courbe (1).

Si, par exemple, la droite AB est assujettie à se mouvoir tangentiellement à la courbe BB′RB″B‴ (P. I, F. 18), sans glisser dans le sens AB, ni dans le sens BA, un point quelconque C de cette droite engendrera une courbe dont la forme dépendra de celle de la directrice BB′RB″B‴: quand le contact se fera en B′, le contact primitif B se trouvera en un point *b* tel que *b*B′ aura une longueur égale à celle de l'arc BB′, et si l'on porte BC de *b* en C′, ce dernier point sera la nouvelle position de C. Puis il arrivera un moment où la distance de *b* au contact sera égale à BC, en même temps qu'à l'arc parcouru sur la directrice, et alors le point générateur formera lui-même le contact, comme en R. Ensuite, il quittera la directrice, et quand le contact se fera en B″, par exemple, on trouvera la position correspondante de C, en prenant *b*C″ égale à BC ou bien en prenant B″C″ égale à l'arc B″R, car *b*C″ = *b*R = BB′R, *b*B″ = BB′RB″, et conséquemment B″C″ = B″R.

Mais au lieu d'être engendrée comme il vient d'être dit, la partie RC′C.... peut évidemment être décrite par l'extrémité R d'un fil enroulé sur RB′B.... et attaché en un point quelconque D. La partie RC″C‴.... peut être décrite aussi par l'extrémité R d'un autre fil enroulé sur RB″B‴.... et attaché en E. Or, en déroulant ces fils, on rectifie, on *développe* les arcs RB′B...., RB″B‴.... de la courbe directrice, puisqu'à tout instant la longueur de chaque portion droite du fil, telle que B′C′, égale celle de l'arc compris entre le point de départ R et le contact actuel B′. Aussi, nomme-t-on *développante* la courbe ...CC′RC″C‴.... suivie par l'extrémité du fil; la courbe DBB′RB″B‴E, dont ce fil développe les arcs, est la *développée*.

De là et de ce que le point générateur C peut être pris aussi loin ou aussi près de B qu'on veut, nous devons conclure que *toute courbe a une infinité de développantes.*

13. *Les tangentes de la développée sont normales à la développante.* On peut effectivement regarder chaque élément C de la développante comme décrit du point de contact correspondant B, par un mouvement circulaire, avec un rayon BC. Or un très-petit arc de circonférence est d'équerre sur son rayon. Donc réciproquement, BC est d'équerre sur l'élément C ou sur la tangente qui en est le prolongement, et par conséquent, BC est une normale de la développante ...CC′RC″C‴....

Il suit de là que R est un point de rebroussement (9); car la tangente *b*R de la développée est normale en R aux deux arcs RC′C, RC″C‴; RS perpendiculaire à *b*R est conséquemment une tangente qui leur est commune, et ces arcs sont tangents l'un à l'autre.

14. Si l'on tirait des normales de la développante en des points très-voisins, et qu'on traçât une courbe tangentiellement à toutes ces normales, on aurait évidemment la développée. Donc, *toute courbe a une développée qui peut en être déduite et dont elle est la développante.*

Les considérations précédentes étant appliquées au cercle font voir que la circonférence a un point pour développée, et que réciproquement les développantes d'un point sont des circonférences.

COMBINAISONS DES COURBES ET DU CERCLE.

15. La circonférence peut couper une courbe, la toucher seulement, ou la couper et la toucher à la fois.

Les courbes symétriques, qui n'ont pas de points singuliers (5 et 9), sont coupées par une circonférence uniquement sécante, en deux points ou en quatre, car une fois entrées dans une telle circonférence, elles doivent en sortir. Pour les autres, le nombre de leurs points d'intersection avec la circonférence ne saurait être indiqué d'une manière générale; il varie d'une courbe à l'autre, en même temps que la forme de ces lignes.

Une circonférence qui touche une courbe n'est autre chose qu'une circonférence sécante dont un nombre pair d'intersections se sont réunies en un seul point. Le contact est de *première espèce*, s'il provient de la réunion de deux points seulement, et il est de *seconde espèce*, s'il est produit par la réunion de quatre points.

Puisque les intersections d'une courbe symétrique et d'un cercle sont toujours en nombre pair, toute circonférence tangente et sécante à la fois d'une telle courbe la coupe nécessairement en deux points. Lors donc que les deux lignes n'ont que deux points communs, c'est que le contact est aussi un point d'intersection.

Ainsi, certaines circonférences tangentes coupent la courbe précisément à leur contact, comme certaines tangentes droites (8), et alors trois points d'intersection se trouvent réunis en un seul.

16. Pour distinguer des autres cercles tangents, celui dont le contact offre la réunion de trois points d'intersection, on l'appelle *cercle osculateur*. Cette épithète ne signifie pourtant pas autre chose que *tangent*.

C'est par la *courbure* du cercle osculateur qu'en général on juge de celle d'une courbe en un point déterminé. Si le point est tel qu'il n'y ait pas de cercle osculateur, on y substitue le cercle tangent à contact de seconde espèce (15). Il est visible en effet que ces deux sortes de circonférences tangentes sont celles qui approchent le plus de se confondre avec la courbe, dans les environs du contact, et d'avoir conséquemment même courbure en ce point.

La *courbure* d'un arc AB de courbe (P. I, F, 17) est l'angle qui mesure le changement de direction qu'on fait en passant d'une extrémité A à l'autre B. Cet angle BCD se trouve nécessairement formé par les tangentes aux points A, B, qui ont mêmes directions que les éléments extrêmes de l'arc (10).

Il s'ensuit que la courbure en un point est l'angle infiniment petit formé par les tangentes aux extrémités de l'élément qui fait ce point, et c'est parce qu'un tel angle n'est pas appréciable, qu'on y substitue celui qui donne la courbure du cercle osculateur. Ce dernier n'est pourtant pas plus facile à mesurer; mais comme en raison de la courbure uniforme de la circonférence, il a une relation constante avec le rayon, on le remplace par ce rayon.

17. Il est aisé de reconnaître qu'en effet *la circonférence a une courbure uniforme.*

Soient deux arcs égaux AB, A'B' (P. I, F. 19). Leurs courbures sont les angles BCD, B'C'D', et ces angles ajoutés respectivement à ACB, A'C'B' forment deux angles droits. Or, ACB, A'C'B' sont égaux, comme angles extérieurs qui comprennent les mêmes arcs. Donc aussi BCD = B'C'D', et la courbure du cercle est partout la même.

18. *L'indication de l'angle de courbure pour un arc de cercle est le nombre de degrés de cet arc* AB (P. I, F. 19).

En effet, l'indication de l'angle extérieur ACB est

$$\frac{AB'B - AB}{2} = \frac{AB'B + AB - 2AB}{2} = \frac{360^\circ - 2AB}{2} = 180^\circ - AB.$$

Mais la même indication vaut aussi 180° moins celle de l'angle de courbure BCD. Donc 180° — AB = 180° moins l'indication de BCD, et par suite cette indication est l'arc AB.

19. *Les courbures de deux circonférences ont pour rapport le rapport inverse des rayons.*

Les courbures sont les angles infiniment petits formés par les tangentes aux extrémités de deux éléments (16); ces angles sont entre eux (17) comme ceux que forment les tangentes aux extrémités d'arcs AB, *ab* de même longueur (P. I, F. 19), et ceux-là, BCD, *bcd*, se contiennent comme les nombres de degrés de leurs arcs d'indication AB, *ab*. Or, les nombres de degrés d'arcs de même longueur sont inverses des rayons. Conséquemment, BCD : *bcd* :: E*a* : EA, et les courbures des deux circonférences ont le même rapport.

Ainsi, une circonférence a une courbure d'autant plus forte que son rayon est plus petit, ou d'autant plus faible que son rayon est plus grand; de sorte que si l'on prend pour unité de courbure, celle de la circonférence dont le rayon est l'unité de longueur, la courbure d'une circonférence dont le rayon sera 2, se trouvera exprimée par $\frac{1}{2}$, et celle de la circonférence dont le rayon sera $\frac{1}{3}$, se trouvera exprimée par 3.

20. *Les courbures d'une courbe en deux points déterminés ont pour rapport le rapport inverse des rayons des cercles osculateurs pour ces points.*

Car le rapport inverse des rayons est celui des courbures des deux circonférences osculatrices, et ces courbures sont sensiblement égales à celles de la courbe (16).

Le centre du cercle osculateur est appelé *centre de courbure* de la courbe, et le rayon du même cercle, *rayon de courbure*.

On peut donc dire que *les courbures d'une courbe en deux points déterminés ont pour rapport le rapport inverse des rayons de courbure pour ces points*.

De là suit que la courbure d'une courbe en un point marqué est d'autant plus forte que le rayon de courbure pour ce point est plus petit, et d'autant plus faible que le rayon de courbure est plus grand.

« Après avoir ainsi réduit, au moyen de quelques principes, la comparaison des courbures à celle de lignes droites, il est inutile d'insister sur l'importance du tracé des cercles osculateurs. »

PROBLÈME : *Tracer le cercle osculateur d'une courbe en un point donné.*

Solution 1 : Le procédé le plus général consiste à tirer plusieurs normales de chaque côté du point, à tracer la courbe qui peut toucher ces normales, et à mener par le point une tangente à cette courbe. La partie de la tangente comprise entre son contact et le point donné est le rayon du cercle osculateur.

On voit d'abord que la courbe tracée est la développée de la courbe donnée (14). Reste donc à démontrer que toute normale d'une développante, comprise entre cette courbe et la développée, égale le rayon du cercle osculateur de la première.

Prenons trois points A, B, C sur la courbe (P. I, F. 20), et cherchons le centre D du cercle qui la coupe en ces points. Opérons de même pour les trois points E, A, B, pour les trois points B, C, F, etc.; nous aurons une courbe des centres GDH.... dont seront cordes les perpendiculaires élevées au milieu de chaque côté du polygone EABCF. Mais, si nous diminuons les côtés de cette figure en les multipliant, jusqu'à ce que les trois points A, B, C se confondent en B, les perpendiculaires DI, DK ne formeront plus qu'une seule droite BL normale à la courbe donnée, et tangente à la courbe des centres GDH, car les points G, D se seront rapprochés et confondus en un seul L, comme A, B, C. Le contact L se trouvera donc le centre d'un cercle tangent et sécant en B à la courbe donnée (15), et LB sera le rayon de ce cercle osculateur (16). Or il est visible que la courbe des centres devenue alors tangente à toutes les normales de EABCF, formera la développée de celle-ci (13). Donc enfin, la tangente menée d'un point d'une courbe à la développée fournit le centre et le rayon du cercle osculateur.

« Mais le tracé des normales est long; il y a peu d'exactitude dans celui d'une courbe tangente à des droites données, en des points qui ne sont pas déterminés, et il n'est guère possible de marquer à vue, avec précision, le contact d'une tangente menée par un point extérieur. On devra donc préférer le procédé suivant. »

Solution 2 : Menez une tangente AB par le point A donné (10), afin de pouvoir en déduire la normale AC (F. 21). Tirez arbitrairement de chaque côté de A, des cordes AA′, AA″, etc., Aa′, Aa″, etc., puis élevez une perpendiculaire au milieu de chacune de ces cordes. Par les points C', C'', etc., c', c'', etc., où les perpendiculaires couperont la normale AC, élevez des perpendiculaires sur cette même normale, et prenez-les égales aux cordes respectives, c'est-à-dire de manière que $C'D' = AA'$, $C''D'' = AA''$, etc. Enfin, faites passer une courbe par les extrémités D''', D'', D', d', d'', d'''. Le point C où cette courbe coupera la normale AC sera le centre du cercle osculateur, et la distance CA donnera le rayon de courbure pour le point A.

En effet, la courbe auxiliaire $D'''Cd'''$ est telle que les pieds de ses ordonnées marquent les centres C''', etc., c''' de cercles qui toucheraient en A la courbe donnée et la couperaient en A''', etc., a'''; de plus ces mêmes ordonnées égalent respectivement les cordes communes à la courbe donnée et aux divers cercles. Conséquemment, le point C de la courbe auxiliaire, étant le pied d'une ordonnée nulle, forme le centre d'un cercle tangent en A et sécant en un point situé à une distance nulle du contact, c'est-à-dire le centre d'un cercle tangent et sécant à la fois au point A (16).

MESURAGES DES COURBES ET DES AIRES.

21. Mesurer une courbe, c'est la *rectifier*, c'est-à-dire trouver une ligne droite qui présente un chemin de même longueur. Mais peu de courbes sont rectifiables; la plupart n'ont point de rapport assignable avec aucune ligne droite, ou en d'autres termes, le nombre de fois qu'elles contiennent l'unité ordinaire des longueurs ne saurait être exprimé exactement ni par un nombre entier, ni par une fraction. La circonférence même est dans ce cas, puisque son rapport au diamètre renferme une suite de décimales qui ne peut être terminée, quelque loin qu'on la prolonge.

Le mesurage d'une courbe non rectifiable n'est donc qu'approximatif. Le seul moyen de l'opérer, quand la courbe est tracée sur un tableau, consiste à la décomposer en arcs assez petits pour qu'ils puissent être considérés comme des lignes droites, sans grande erreur, et à porter les cordes de ces arcs sur une ligne droite, de manière que deux consécutives aient une extrémité commune. La longueur comprise entre l'extrémité isolée de la première corde et l'extrémité isolée de la dernière donne à peu près la longueur de la courbe.

Si la courbure n'éprouve pas de grandes variations, on abrège l'opération en prenant les petits arcs de façon que leurs cordes soient égales; car alors il suffit de porter sur la droite autant de fois la même ouverture de compas qu'il y a d'arcs.

Lorsque la courbe se trouve sur la surface convexe d'un corps, on peut l'entourer d'une ficelle mince et peu susceptible de s'étendre, puis mesurer la longueur de cette ficelle.

22. Le mesurage de l'aire limitée par une courbe n'est généralement qu'approximatif non plus, attendu que l'unité ordinaire des superficies ayant des limites droites doit se trouver rarement dans un rapport fini avec l'espace à contour courbe. Le cercle, par exemple, ne se mesure pas plus exactement avec le mètre carré, que la circonférence avec le mètre linéaire.

La courbe qui entoure l'aire à mesurer peut se trouver dans deux cas distincts : elle renferme deux points de rebroussement opposés, ou bien elle n'a pas un seul de ces points singuliers et présente des arcs applatis plutôt que des pointes.

Dans le premier cas (P. I, F. 22), portez sur la droite AB qui joint les points de rebroussement des parties arbitraires, mais égales et assez petites pour que les arcs correspondants de la courbe puissent être, sans grande erreur, regardés comme des lignes droites. Tracez, par les points de division qui en résultent, des cordes perpendiculaires à AB. Mesurez ces cordes; ajoutez la moitié de la dernière CD à la somme de toutes les autres, et multipliez le total par une des parties égales de AB. Le produit donnera l'aire ACDA, et en y ajoutant la superficie du petit triangle BCD, vous aurez l'aire que limite toute la courbe.

Pour démontrer la vérité de ce procédé, nous désignerons par h chacune des parties égales de AB, et respectivement par b, b', b''.... $b^{[m]}$, $b^{[n]}$, les cordes mesurées, $b^{[n]}$ représentant la dernière CD. Il s'ensuivra

$$\mathrm{AEF}=\frac{b}{2}h,\quad \mathrm{EFGH}=\frac{b+b'}{2}h,\quad \mathrm{GHIK}=\frac{b'+b''}{2}h,\quad \text{etc.},$$

$$\mathrm{LMDC}=\frac{b^{[m]}+b^{[n]}}{2}h,$$

et

$$\mathrm{ACDA}=\left(\frac{b}{2}+\frac{b+b'}{2}+\frac{b'+b''}{2}\cdots\cdot+\frac{b^{[m]}+b^{[n]}}{2}\right)h$$

$$=\left(b+b'+b''\cdots\cdot+b^{[m]}+\frac{b^{[n]}}{2}\right)h,$$

car $\frac{b''}{2}$ fera partie de la base moyenne du troisième trapèze, et $\frac{b^{[m]}}{2}$ fera partie de celle de l'avant-dernier.

Soit maintenant une courbe sans pointes AEHBGFA (F. 23). Vous marquerez les extrémités A, B d'une des plus grandes cordes, puis à partir d'un point C peu éloigné de A, vous porterez sur AB des parties égales, comme dans le procédé précédent. Il en résultera un point D tel que DB sera moindre qu'une des parties. Traçant ensuite des cordes perpendiculaires à AB, par tous les points de division, ajoutant la moitié de chacune des extrêmes à la somme de toutes les autres, et multipliant le total par une des parties égales de CD, vous aurez pour produit la superficie de la figure EFGH.

Alors, il ne restera plus qu'à mesurer les portions AEFA, GBHG de l'aire donnée, et comme ces portions, ayant une droite dans leurs limites, présentent deux pointes chacune, vous pourrez les traiter comme l'aire de la figure 22.

SECTIONS CONIQUES.

23. Les *sections coniques* méritent, par leur importance, d'être placées en tête de toutes les courbes que nous avons à étudier. Leur nom provient de ce que chacune forme, comme on le verra plus loin, la section d'une surface conique coupée par un plan convenablement dirigé. On les appelle parfois aussi *courbes du second degré*, parce que la relation générale de leurs abscisses et de leurs ordonnées (6) s'exprime au moyen d'une équation du deuxième degré.

Les courbes dont il s'agit sont au nombre de quatre: la circonférence, l'*ellipse*, l'*hyperbole* et la *parabole*. Comme la circonférence est complètement étudiée dans la géométrie élémentaire, nous allons nous occuper d'abord de l'ellipse, la plus utile des courbes planes pour les arts, et surtout pour la coupe des pierres.

ELLIPSE.

24. L'ellipse est une courbe fermée comme la circonférence. Elle peut toujours être censée produite par la projection cylindrique d'un cercle sur un plan convenablement incliné relativement à celui de ce cercle. En d'autres termes, *l'ellipse est la courbe selon laquelle se projette une circonférence sur un plan non parallèle.*

Si vous projetez un cercle sur un plan parallèle au sien, vous obtenez un autre cercle parfaitement égal au premier; projetez-le sur un plan d'équerre, au moyen de perpendiculaires à ce plan, vous aurez simplement une droite égale au diamètre; mais en projetant perpendiculairement à un plan qui coupe celui du cercle sous un angle autre que l'angle droit, vous trouverez une courbe fermée ACBD (P. I, F. 24) qui différera toujours de la circonférence.

« Dorénavant, et à moins que nous ne prévenions du contraire, les droites projetantes seront supposées perpendiculaires au plan de projection. »

25. *La plus grande corde* AB *de l'ellipse* (P. I, F. 24) *égale le diamètre du cercle dont cette courbe est la projection orthogonale,* c'est-à-dire la projection faite perpendiculairement au plan de projection.

De tous les diamètres du cercle, il n'y en a qu'un qui ne se raccourcisse pas en se projetant: c'est celui qui se trouve parallèle au plan sur lequel on projette. Ce diamètre-là a évidemment pour projection une droite de même longueur, et cette droite est nécessairement la plus grande corde de l'ellipse (5), puisque les diamètres sont les plus grandes cordes du cercle.

DIAMÈTRES DE L'ELLIPSE.

26. *La plus grande corde* AB *d'une ellipse est un axe* (P. I, F. 24).
Nous le démontrerons en faisant voir que AB divise en deux parties égales les cordes que cette droite coupe d'équerre (5). Soit CD une de ces cordes. La ligne projetante qui aboutit en O est perpendiculaire au plan de projection et par suite à AB. Donc, réciproquement, AB la rencontre d'équerre, et conséquemment, AB est perpendiculaire au plan projetant dont CD est la trace.

Mais AB est parallèle à celui des diamètres du cercle dont elle est la projection, puisque ce diamètre, parallèle au plan de projection (25), se trouve avec AB dans le même plan projetant. Le même diamètre est donc aussi perpendiculaire au plan projetant dont CD est la trace, et par conséquent, il coupe d'équerre celle des cordes du cercle dont CD est la projection.

Ainsi, les cordes de l'ellipse auxquelles AB est perpendiculaire, sont les projections de cordes du cercle perpendiculaires au diamètre dont AB est la projection.

Or, chaque corde du cercle, chaque corde correspondante CD de l'ellipse, et leurs lignes projetantes forment un trapèze; dans tout trapèze les milieux des côtés concourants sont sur une parallèle aux bases. Par conséquent, le milieu de CD et celui de la corde correspondante du cercle se trouvent sur une perpendiculaire au plan de projection. Mais le second est un point du diamètre dont AB est la projection. Donc enfin, le premier est un point même de AB.

27. *La corde* CD *perpendiculaire au milieu de la plus grande* AB (P. I, F. 24), *est aussi un axe de l'ellipse.*
Le milieu O de AB est la projection du centre du cercle qui a produit l'ellipse, car c'est en O que se projette le milieu du diamètre qui, dans le cercle, correspond à AB. Par conséquent, le plan projetant dont CD est la trace passe par le centre du cercle, et la corde projetée sur CD est un diamètre de ce cercle.

Or, d'après la démonstration précédente, le même diamètre est au nombre des cordes perpendiculaires à celui qui se projette selon AB. Il est donc d'équerre aussi sur toutes les cordes parallèles à ce dernier, et il les coupe par le milieu. D'ailleurs, ces cordes ont pour projections des parallèles à AB, et l'on ferait voir, comme tout-à-l'heure, que leurs milieux se projettent sur CD. Conséquemment, la droite CD divise en deux parties égales les cordes de l'ellipse qui lui sont perpendiculaires, et par suite, cette droite est un axe (5).

Il s'ensuit (26) *que les deux axes* AB, CD *se coupent réciproquement par le milieu et d'équerre.*

28. *Une ellipse ne saurait avoir plus de deux axes.*

Supposons en effet un troisième axe, et considérons une des cordes qu'il couperait d'équerre en deux parties égales, par exemple celle qui contiendrait le point O (P I, F. 24). D'après les deux démonstrations précédentes, cet axe et cette corde de l'ellipse seraient les projections de deux diamètres du cercle perpendiculaires l'un à l'autre; les plans projetants de ces diamètres formeraient des coins droits, puisque leurs traces seraient d'équerre, et conséquemment, l'un au moins des deux mêmes diamètres devrait être perpendiculaire au plan projetant de l'autre. Il se trouverait donc d'équerre sur une ligne projetante. Or il n'y a évidemment que le seul diamètre projeté selon AB, qui, parallèle au plan de projection, puisse couper perpendiculairement des lignes projetantes. Donc enfin, l'ellipse n'a pas d'autre axe que AB et CD.

29. *Chaque axe d'une ellipse la partage en deux parties égales.*

Faisons tourner la partie ADB sur AB considérée comme charnière (P. I, F. 24). Puisque les angles DOB, COB sont droits, OD s'appliquera sur OC, et parce que OD = OC (27), D tombera sur C. Or on en dirait autant des deux extrémités de toute corde parallèle à CD (5). Par conséquent, ADB couvrira parfaitement ACB.

Un raisonnement analogue ferait voir que CBD = CAD.

30. *Les deux axes d'une ellipse la partagent en quatre parties égales.*

Après avoir mis ADB sur ACB (P. I, F. 24), en pliant l'ellipse selon AB (29), plions-la suivant CO. L'arc BC et DB qui le couvre, s'appliqueront exactement sur AC et AD.

31. *Les extrémités d'une corde* LM *perpendiculaire à l'un des axes, sont à égales distances du milieu* O *de cet axe* (P. I, F. 25).

Puisque PL = PM (26), les triangles rectangles OPL, OPM sont égaux, et par suite OL = OM.

32. *Toute corde d'ellipse qui passe par l'intersection des axes, est un diamètre, et cette intersection est son milieu.*

En effet, cette corde EF (P. I, F. 24) est la projection d'un diamètre du cercle qui a produit l'ellipse, puisque O est celle du centre, et d'après la dernière partie de la démonstration du n° 26, EF divise en deux parties égales les projections des cordes du cercle que le diamètre coupe d'équerre (5).

33. *Une corde d'ellipse qui ne passe point par l'intersection des axes, ne forme pas un diamètre, et conséquemment cette intersection est le centre de la courbe* (5 et 32).

La corde d'ellipse est la projection d'une corde de cercle qui, ne passant point par le centre, n'est pas bissectrice de cordes parallèles. Donc, cette corde d'ellipse ne saurait contenir les milieux d'aucun système de cordes parallèles appartenantes à la même courbe.

34. *Tout diamètre, qui n'est pas un axe, partage l'ellipse en deux parties égales, non symétriques.*

Ainsi, bien que les arcs ECBF, EADF (P. I, F. 24) ne puissent se rabattre l'un sur l'autre, ils n'en sont pas moins de même longueur.

En effet,

$$ECBF = ACB - AE + BF \quad \text{et} \quad EADF = ADB + AE - BF.$$

Mais (29) ACB = ADB. Si donc AE = BF, nous aurons

$$ECBF = ACB, \quad EADF = ADB$$

et par suite

$$ECBF = EADF.$$

Renversons ADB sur ACB. Le demi-diamètre OF prendra la position OF′, l'angle BOF′ égalera BOF, et l'arc BF couvrira BF′ (29). Renversons maintenant BOC sur AOC (30). Le demi-axe OB couvrira OA, et parce que BOF′ = BOF = AOE opposé au sommet, OF′ s'appliquera sur OE. D'ailleurs, F′ tombera sur E (32), et tous les autres points de BF′ seront sur les points correspondants de AE. Donc l'arc AE est bien égal à l'arc BF.

Diamètres conjugués.

35. Deux diamètres d'une ellipse qui divisent chacun en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre, sont appelés *diamètres conjugués,* c'est-à-dire accouplés, unis par une dépendance réciproque. Les cordes parallèles à l'un déterminent effectivement la position de l'autre.

Les axes d'une ellipse sont des diamètres conjugués (26 et 27).

Pour démontrer l'existence des autres diamètres conjugués, il faut faire voir que *le diamètre* EG *parallèle aux cordes qu'un autre diamètre* HI *coupe par le milieu, divise de la même manière les cordes parallèles au second* (P. I, F. 26).

En effet, parmi toutes les cordes parallèles que HI divise en deux parties égales, il s'en trouve une AK qui passe par l'extrémité A du grand axe AB. Tirons la droite BK; cette corde sera parallèle à HI, puisque les concourantes AB, AK sont divisées de la même manière aux points O, L; de plus, le diamètre EG passera par le milieu de BK, puisqu'il est parallèle à AK et que O est le milieu de AB. Ainsi EG partage en deux parties égales une des cordes parallèles à HI.

Or BK appartient nécessairement au système des cordes parallèles par les milieux desquelles passe EG (5). Supposons que le contraire ait lieu et que les cordes parallèles à HM forment ce système. Les concourantes HM, HI seraient divisées en parties égales aux points N, O; la corde MI se trouverait parallèle à EG et à AK, et pourtant HI ne la couperait pas par le milieu.

Donc, *il suffit qu'un diamètre divise une corde d'ellipse en deux parties égales, pour qu'il divise de la même manière toutes les cordes parallèles à celle-là.*

Par conséquent, EG prend les milieux de toutes les cordes parallèles à HI, comme HI prend ceux des cordes parallèles à EG, et ces deux diamètres sont conjugués.

36. *Tout diamètre* HI *d'une ellipse a son conjugué* (P. I, F. 26).

On peut toujours tirer par le milieu O de HI, une parallèle EG aux cordes que ce diamètre divise en deux parties égales; cette parallèle est un diamètre, et ce diamètre est le conjugué de HI (35).

Ainsi, *l'ellipse a une infinité de diamètres conjugués.*

37. *Chaque paire de diamètres conjugués est la projection d'une paire de diamètres perpendiculaires, prise dans le cercle qui a produit l'ellipse.*

Chaque diamètre et chaque corde de l'ellipse sont les projections d'un diamètre et d'une corde du cercle. Les cordes qu'un diamètre de l'ellipse coupe par le milieu, sont les projections des cordes du cercle que le diamètre correspondant de ce cercle divise en deux parties égales, et ces dernières cordes ne peuvent être divisées ainsi, que par un diamètre qui leur soit perpendiculaire. Or le conjugué du diamètre correspondant de l'ellipse est parallèle aux projections des mêmes cordes (35). Donc ces cordes sont parallèles au diamètre du cercle dont le conjugué est la projection, et ce diamètre du cercle est perpendiculaire au premier.

38. *Les diamètres* EG, HI *parallèles aux cordes qui joignent les extrémités des axes* AB, CD (P. I, F. 27), *sont conjugués et de même longueur.*

D'abord, les cordes AC, BD sont parallèles, puisque les triangles AOC, BOD sont égaux (27), et pour une raison analogue, les cordes AD, BC sont aussi parallèles. Ensuite, EG étant parallèle à AD, divise BD en deux parties égales comme AB. Donc (35), EG est le conjugué de HI parallèle à BD et à AC.

Je dis maintenant que EG = HI. Cela est vrai, si leurs moitiés OE, OH sont égales (32). Or l'angle CAO = OAD, puisque le triangle AOC = AOD. Les angles alternes-internes OAD, AOE sont égaux, et il en est de même des angles CAO, AOH. Conséquemment, l'angle AOE = AOH. Si donc nous rabattons ADB sur ACB, OH s'appliquera sur OE, et comme tous les points de l'arc AD seront sur AC (29), l'extrémité H tombera nécessairement sur E.

39. *L'ellipse ne peut avoir plus d'une paire de diamètres conjugués perpendiculaires, ni plus d'une paire de diamètres conjugués égaux.*

Les diamètres conjugués rectangulaires sont des axes (35 et 5), et l'ellipse n'a que deux axes (28).

En second lieu, si HI égalait son conjugué EG (P. I, F. 26), on aurait OH = OE (32). Le triangle EOH serait symétrique; le diamètre perpendiculaire à la base la diviserait en deux parties égales, et ferait un troisième axe (35), ce qui ne peut être.

40. *Deux diamètres quelconques qui font des angles égaux avec le grand axe, sont de même longueur; mais parmi toutes les paires de diamètres égaux, une seule se trouve formée de diamètres conjugués* (39).

L'égalité de deux diamètres qui font le même angle avec un axe, se démontre par le rabattement, comme au n° 38.

41. *L'ellipse n'a qu'une seule paire de diamètres égaux et d'équerre.*

Pour que deux diamètres soient égaux, il faut qu'ils puissent se rabattre l'un sur l'autre, comme EG, RS (P. I, F. 26); car si HI, par exemple, pouvait égaler EG, il égalerait aussi RS, ce qui est impossible, puisque le point R de la courbe est plus éloigné du centre O que le point H. Ainsi, deux diamètres égaux font nécessairement des angles égaux avec le grand axe. Or, pour qu'ils forment entre eux un angle droit, ils doivent évidemment faire sur le grand axe des angles de 45°, et l'on ne peut tirer du centre plus de deux droites qui soient dans ce cas.

PROBL. (*a*) : *Trouver le centre d'une ellipse tracée* (P. I, F. 28).

Tirez deux cordes EG, HI, parallèles et un peu écartées l'une de l'autre. Marquez leurs milieux K, L et joignez-les par une corde MN. Cette troisième corde sera un diamètre (35 et 5) et son milieu O donnera le centre de la courbe (32 et 33).

PROBL. (*b*) : *Trouver le centre d'une ellipse dont on n'a qu'un arc quelconque* KL (P. I, F. 29).

Déterminez les directions de deux diamètres EG, MO, en opérant comme dans la solution précédente. L'intersection O de ces droites sera le centre demandé (5).

PROBL. (*c*) : *Tracer les axes d'une ellipse donnée.*

Décrivez du centre O (P. I, F. 30), avec un rayon quelconque, deux petits arcs qui coupent la courbe en des points E, G, et marquez un troisième point H à égales distances de ces deux-là. La droite HO, prise de B en A, sera l'un des axes, et la perpendiculaire CD à AH, tirée par le centre, sera l'autre.

En effet, la corde EG ayant ses deux extrémités à égales distances du centre, est parallèle à l'un des axes (31), et la perpendiculaire AB au milieu de cette même corde donne l'autre axe (27).

PROBL. (*d*) : *Tracer un des diamètres d'une ellipse donnée.*

Tirez une corde par le centre, ou si ce point n'est pas connu, opérez comme dans le problème (*a*).

PROBL. (*e*) : *Tracer deux diamètres égaux.*

Tirez un diamètre quelconque EG (P. I, F. 26); décrivez du centre O, avec la moitié OE de ce diamètre, un arc qui coupe la courbe une seconde fois, et par l'intersection R tirez un second diamètre RS. Les moitiés OE, OR étant égales, il s'ensuit RS = EG.

PROBL. (*f*) : *Tracer deux diamètres conjugués dans une ellipse donnée.*

Tirez par les extrémités A, B, de l'un des axes (P. I, F. 26), deux cordes quelconques AK, BK qui se coupent sur la courbe; puis menez deux parallèles à ces cordes, par le centre O. Ces parallèles EG, HI seront deux diamètres conjugués (35).

PROBL. (*g*) : *Tracer le conjugué d'un diamètre donné* EG (P. I, F. 26).

Solution 1 : Tirez, par l'un des sommets, une corde AK parallèle à EG; joignez l'extrémité K à l'autre sommet B, et menez par le centre O, une parallèle à BK. Cette parallèle HI sera le conjugué de EG (35).

Solution 2 : Tirez une corde quelconque HI parallèle à EG (P. I, F. 31), puis un diamètre IK, par l'une des extrémités de cette corde, et menez par le centre O, une parallèle à HK. Cette parallèle LM sera le conjugué de EG.

En effet, LM divise HI en deux parties égales, puisqu'elle divise ainsi IK; EG passe par le milieu de HK, puisqu'elle passe par celui de IK. Par conséquent EG et LM jouissent de la propriété des diamètres conjugués (35).

Observation : Ce tracé est plus susceptible d'exactitude que le précédent, qui rend parfois l'une des cordes trop courtes pour qu'on puisse mener avec précision une parallèle par le centre.

PROBL. (*h*) : *Trouver les cordes qu'un diamètre donné* EG *partage en deux parties égales* (P. I, F. 26).

Ces cordes étant parallèles, il suffit d'en trouver une seule BK. Vous l'obtiendrez en opérant comme dans la solution 1 du problème précédent (35).

PROBL. (*i*) : *Tracer les diamètres conjugués égaux d'une ellipse donnée.*

Tirez par le centre O (P. I, F. 27), des parallèles aux cordes qui joindraient l'un A des sommets aux extrémités C, D du petit axe. Ces parallèles EG, HI seront les diamètres conjugués égaux (38).

PROBL. (*k*) : *Tracer les diamètres égaux qui se coupent d'équerre.*

Portez une longueur arbitraire sur le grand axe AB, du centre O en I (P. I, F. 30); menez par ce dernier point une parallèle au petit axe CD; portez la longueur OI sur cette parallèle, de chaque côté de I, et joignez le centre aux points K, L ainsi obtenus. Les droites OK, OL prolongées jusqu'à la courbe dans les deux sens, seront les diamètres demandés, car les triangles rectangles OIK, OIL sont tous deux symétriques, et par conséquent, leurs angles en O ont chacun une indication de 45° (40).

PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSE.

42. *Deux cordes* GH, G'H' *d'une ellipse* (P. I, F. 24) *qui sont parallèles et également éloignées du centre* O, *ont même longueur.*

Par le milieu de GH, tirons le diamètre EF; il divisera aussi G'H' en deux parties égales (35), ainsi que toute l'ellipse (34). Mais OI, OI', perpendiculaires sur les deux cordes parallèles, ne forment qu'une droite, et les angles EOI, FOI' sont égaux. De plus OI = OI', puisque ce sont les distances de GH, G'H' au centre O. Si donc nous superposons la figure EAF sur la figure FBE, OI' s'appliquera sur OI, attendu que leur extrémité commune O est au milieu de EF (32); I' tombera sur I, et K'H' couvrira exactement KH. Ces deux moitiés des cordes sont donc égales, et par suite GH = G'H'.

43. *Les cordes d'une ellipse parallèles à un diamètre quelconque* EG (P. I, F. 32) *ont un rapport constant avec les cordes correspondantes tirées perpendiculairement au diamètre conjugué* HI, *dans un cercle décrit sur ce conjugué;* c'est-à-dire que, par exemple, KL : K'L' :: MN : M'N' :: EG : E'G'.

La démonstration consiste à faire voir que les moitiés des mêmes cordes sont proportionnelles et qu'on a

KR : K'R :: MS : M'S :: EO : E'O.

Tirons dans la circonférence le diamètre E'G' perpendiculaire à HI, puis relevons le plan de cette courbe autour de HI, jusqu'à ce que E' réponde verticalement au point E'' où EE'', parallèle à HI, rencontre E'O. L'ellipse, supposée horizontale, sera la projection oblique du cercle faite parallèlement au plan vertical qui contient HI, car les deux diamètres perpendiculaires HI, E'G' de la dernière courbe auront pour projections obliques les deux conjugués HI, EG de la première (37). Les cordes K'L', M'N' parallèles à E'G' se projetteront donc sur les cordes d'ellipse KL, MN parallèles à EG. Par conséquent, KK'', MM'' menées parallèlement à EE'' déterminent les points K'', M'' qui répondent verticalement aux points K', M' relevés. Or K''R, M''S, E''O sont les côtés horizontaux de triangles rectangles dont les hypothénuses égalent respectivement K'R, M'S, E'O, et dont les verticales en K'', M'', E'' forment les troisièmes côtés. Ces triangles sont semblables, puisque leurs angles en R, S, O ont pour indication celle du coin compris entre le plan de l'ellipse et le plan du cercle relevé. Donc, K'R : K''R :: M'S : M''S :: E'O : E''O. Mais les triangles rectangles KK''R, MM''S, EE''O semblables aussi, donnent KR : K''R :: MS : M''S :: EO : E''O. Conséquemment, KR : K'R :: MS : M'S :: EO : E'O.

44. *Les cordes d'une ellipse parallèles à un axe ont un rapport constant avec les cordes correspondantes et pareillement situées dans un cercle décrit sur l'autre axe.*

Ce principe est une simple conséquence du précédent, puisque les axes d'une ellipse sont diamètres conjugués (35). Si l'on dit ici que les cordes correspondantes doivent être pareillement situées, c'est pour exprimer que celles du cercle sont parallèles au même axe que celles de l'ellipse ; et en effet, les cordes perpendiculaires à l'un des axes se trouvent parallèles à l'autre.

On peut néanmoins démontrer directement et très-facilement que, pour les cordes parallèles au petit axe CD (P. I, F. 25), GH : EF :: LM : IK, ou ce qui est la même chose, GN : EN :: LP : IP.

Faisons tourner le cercle autour de AB jusqu'à ce qu'il ait la position nécessaire pour que l'ellipse en soit la projection orthogonale. Les demi-cordes EN, IP feront avec GN, LP deux angles qui seront égaux, puisque chacun indiquera la grandeur du coin formé par les plans des deux courbes, et les lignes projetantes comprises entre E, G, entre I, L achèveront deux triangles rectangles semblables. Les côtés correspondants de ces triangles sont donc proportionnels, et en effet GN : EN :: LP : IP.

La même démonstration s'applique à la proportion GH : EF :: LM : IK (F. 33) relative au cas où les cordes sont parallèles au grand axe AB, seulement il faut faire tourner l'ellipse autour du petit axe CD, jusqu'à ce qu'elle ait l'inclinaison nécessaire pour que le cercle en soit la projection.

45. *Quand l'hypothénuse d'un triangle rectangle formé par le croisement des axes, égale la différence de leurs moitiés, cette hypothénuse prolongée jusqu'à l'ellipsee vaut le demi-grand axe.*

Supposons que le triangle rectangle EOG (P. I, F. 34) soit tel que l'hypothénuse EG = OA — OC. On aura EH = OA. Cela est vrai, si EH valant OA, il s'ensuit que H est un point de l'ellipse.

Décrivons un demi-cercle avec OB, abaissons de H une perpendiculaire sur AB, menons EI parallèlement au même axe, et tirons le rayon OK. Les triangles rectangles EIH, OLK sont égaux, puisque l'hypothénuse EH = OA = OK, et que EI = OL, comme parallèles comprises entre parallèles. Donc, HI = KL. Or les triangles semblables EIH, GLH donnent HI : HL :: HE : HG, ou KL : HL :: OA : HG, et parce que EG excès de HE sur HG, vaut OA — OC, on a HE — HG = OA — OC ou OA — HG = OA — OC ou HG = OC. Donc, KL : HL :: OA : OC ou KL : HL :: OM : OC, et il s'ensuit (44) que le point H est effectivement sur l'ellipse.

Remarquez que l'hypothénuse EG prolongée jusqu'à la courbe, se trouve coupée par les axes de manière que la partie GH = OC moitié du plus petit.

46. *Les quarrés numériques de deux demi-cordes parallèles d'une*

ellipse ont même rapport que les produits des deux parties formées par chacune sur le conjugué du diamètre qui leur est parallèle.

Soient KR, MS deux demi-cordes parallèles au diamètre EG (P. I, F. 32) dont le diamètre HI est le conjugué. On a

$$\overline{KR}^2 : \overline{MS}^2 :: HR \times RI : HS \times SI.$$

Décrivons un cercle sur HI, et menons dans ce cercle, par les points R, S, deux demi-cordes K'R, M'S perpendiculaires au même diamètre. Nous pourrons écrire la proportion

$$KR : K'R :: MS : M'S \ (43) \quad \text{ou} \quad KR : MS :: K'R : M'S.$$

Par conséquent $\overline{KR}^2 : \overline{MS}^2 :: \overline{K'R}^2 : \overline{M'S}^2$.

Mais toute demi-corde du cercle est moyenne proportionnelle entre les deux parties du diamètre qu'elle rencontre d'équerre, et il s'ensuit $\overline{K'R}^2 = HR \times RI$, $\overline{M'S}^2 = HS \times SI$. Donc

$$\overline{KR}^2 : \overline{MS}^2 :: HR \times RI : HS \times SI.$$

47. *Les quarrés numériques de deux demi-cordes parallèles à l'un des axes d'une ellipse ont même rapport que les produits des deux parties formées par chacune sur l'autre axe.*

Ce principe est une conséquence du précédent, puisque les axes sont diamètres conjugués (35); néanmoins la démonstration du n° 46 peut établir directement que $\overline{GN}^2 : \overline{LP}^2 :: AN \times NB : AP \times PB$ (P. I, F. 25) et que $\overline{GN}^2 : \overline{LP}^2 :: CN \times ND : CP \times PD$ (F. 33).

48. *La somme des quarrés numériques de deux diamètres conjugués d'une ellipse est constante.*

La démonstration consiste à faire voir que pour deux diamètres conjugués quelconques EG, HI (P. I, F. 35), on a

$$\overline{EG}^2 + \overline{HI}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{4}\overline{EG}^2 + \tfrac{1}{4}\overline{HI}^2 = \tfrac{1}{4}\overline{AB}^2 + \tfrac{1}{4}\overline{CD}^2$$
$$\text{ou} \quad \overline{OE}^2 + \overline{OI}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2.$$

Soit rabattu sur le plan vertical, le cercle O' dont l'ellipse est la projection horizontale. Les axes seront les projections des diamètres d'équerre A'B', C'D', dont le premier est parallèle à AB (25), et les diamètres conjugués seront celles de deux diamètres d'équerre E'G', H'I' (37). On aura d'ailleurs

$$\overline{OE}^2 = \overline{OK}^2 + \overline{EK}^2,\ \overline{OK}^2 = \overline{O'K'}^2,\ EK : OC :: E'K' : O'C' \ (44),$$
$$\overline{EK}^2 : \overline{OC}^2 :: \overline{E'K'}^2 : \overline{O'C'}^2, \quad \text{et} \quad \overline{OE}^2 = \overline{O'K'}^2 + \frac{\overline{OC}^2 \times \overline{E'K'}^2}{\overline{O'C'}^2},$$
$$\text{puis} \quad \overline{OI}^2 = \overline{OL}^2 + \overline{LI}^2,\quad \overline{OL}^2 = \overline{O'L'}^2,\quad LI : OC :: L'I' : O'C',$$
$$\overline{LI}^2 : \overline{OC}^2 :: \overline{L'I'}^2 : \overline{O'C'}^2, \quad \text{et} \quad \overline{OI}^2 = \overline{O'L'}^2 + \frac{\overline{OC}^2 \times \overline{L'I'}^2}{\overline{O'C'}^2}.$$

Mais, puisque l'angle O'I'L' a ses côtés perpendiculaires sur ceux de l'angle E'O'K', les deux triangles rectangles O'L'I', E'K'O' sont égaux,

$$\mathrm{LI'} = \mathrm{O'K'},\quad \mathrm{O'L'} = \mathrm{E'K'},\quad \overline{\mathrm{OI}}^2 = \overline{\mathrm{E'K'}}^2 + \frac{\overline{\mathrm{OC}}^2 \times \overline{\mathrm{O'K'}}^2}{\overline{\mathrm{O'C'}}^2},$$

et

$$\overline{\mathrm{OE}}^2 + \overline{\mathrm{OI}}^2 = \overline{\mathrm{O'K'}}^2 + \frac{\overline{\mathrm{OC}}^2 \times \overline{\mathrm{E'K'}}^2}{\overline{\mathrm{O'C'}}^2} + \overline{\mathrm{E'K'}}^2 + \frac{\overline{\mathrm{OC}}^2 \times \overline{\mathrm{O'K'}}^2}{\overline{\mathrm{O'C'}}^2}$$

$$= \overline{\mathrm{O'E'}}^2 + \frac{\overline{\mathrm{OC}}^2 \times \overline{\mathrm{O'E'}}^2}{\overline{\mathrm{O'C'}}^2} = \overline{\mathrm{O'E'}}^2 + \overline{\mathrm{OC}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{OC}}^2.$$

Il suit du principe démontré que *les aires des figures semblables dont deux diamètres conjugués sont côtés correspondants, forment en somme une superficie constante.*

49. Il existe sur le grand axe d'une ellipse, deux points aussi remarquables que le centre ; ils sont situés de chaque côté de ce centre et à la même distance. On les appelle *foyers;* nous dirons plus tard ce qui leur a valu ce nom.

La distance de chaque foyer F *ou* F' *au centre* O (P. I, F. 36) *égale le troisième côté* OF *d'un triangle rectangle formé avec le demi-petit axe* OC *et le demi-grand axe* OA *pour hypothénuse.*

La distance OF *de chaque foyer au centre égale aussi la demi-différence des lignes projetantes qui vont du cercle aux extrémités* C, D *du petit axe.*

En effet, pour avoir la différence des deux lignes projetantes, il faut mener une parallèle au petit axe, par l'extrémité inférieure du diamètre qui se projette selon cet axe ; pour prendre la moitié de la même différence, on doit mener par le centre du cercle une seconde parallèle au petit axe. Or, cette seconde parallèle égale le demi-petit axe, et forme avec la moitié de la différence des lignes projetantes, un triangle rectangle dont l'hypothénuse est le rayon du cercle ou le demi-grand axe (26 et 25).

On voit par cette démonstration que *la distance de chaque foyer au centre égale encore la différence des lignes projetantes qui vont du cercle à ce centre et à l'une des extrémités du petit axe.*

Problème : *Marquer les foyers d'une ellipse donnée.*

Tracez les axes AB, CD (probl. *b*), puis avec le demi-grand axe AO pour rayon, décrivez, de l'une C des extrémités du petit axe, deux arcs qui coupent le grand. Les intersections F, F' seront les foyers.

50. Les extrémités A, B du grand axe d'une ellipse se nomment *sommets* (P. I, F. 36).

La distance FA *d'un foyer* F *au sommet* A *le plus voisin égale celle* F'B *de l'autre foyer* F' *à l'autre sommet* B.

En effet, $AF = AO - OF$, $BF' = BO - OF'$, et comme $AO = BO$ (27), que $OF = OF'$ (49), nécessairement $AF = BF'$.

51. La corde PQ (P. I, F. 36) tirée par l'un des foyers, parallèlement au petit axe, est nommée *paramètre*, pour exprimer qu'elle peut servir à déterminer la courbe.

Le paramètre de l'ellipse est une troisième proportionnelle au grand axe et au petit, c'est-à-dire que $AB : CD :: CD : PQ$.

La vérité de la proportion se fonde sur celle de cette autre $AO : OC :: OC : FP$. Or (44), on a $OI : OC :: FP' : FP$, et $OI = AO$; reste donc à démontrer que $FP' = OC$ ou que $\overline{FP'}^2 = \overline{OC}^2$.

D'abord, $\overline{FP'}^2 = \overline{OP'}^2 - \overline{OF}^2$; ensuite OC, projection de OI, est côté d'un triangle rectangle dont OI est l'hypothénuse et qui a pour troisième côté la différence des lignes projetantes de I et de O centre du cercle. Comme cette différence vaut OF (49), et que $OI = OP'$, il est clair qu'on a aussi $\overline{OC}^2 = \overline{OP'}^2 - \overline{OF}^2$.

Il résulte évidemment de cette démonstration que *le petit axe d'une ellipse égale celle des cordes du cercle dont le paramètre est la projection.*

La proportion $AB : CD :: CD : PQ$ donne d'ailleurs $\overline{CD}^2 = AB \times PQ$, et, par conséquent, *le carré fait sur le petit axe d'une ellipse équivaut au rectangle formé avec le grand axe et le paramètre.*

52. Les droites FE, F'E, menées des foyers à un même point E de l'ellipse (P. I, F. 36), sont des *rayons vecteurs*, c'est-à-dire des rayons qui, tournant autour de F, F', *transporteraient* le point E tout le long de la courbe, sans que leur somme variât.

La somme $FE + F'E$ *des rayons vecteurs, pour un point quelconque* E *de l'ellipse, égale le grand axe* AB.

Décrivons un demi-cercle sur le grand axe AB pris pour diamètre. Nous aurons (44)

$$GE : GH :: OC : OI \quad \text{et} \quad \overline{GE}^2 : \overline{GH}^2 :: \overline{OC}^2 : \overline{OI}^2.$$

Mais

$$\overline{GE}^2 = \overline{EF'}^2 - \overline{F'G}^2 = \overline{EF'}^2 - (OF' + OG)^2, \quad \overline{GH}^2 = \overline{OH}^2 - \overline{OG}^2 = \overline{OI}^2 - \overline{OG}^2.$$

Donc

$$\overline{EF'}^2 - (OF' + OG)^2 : \overline{OI}^2 - \overline{OG}^2 :: \overline{OC}^2 : \overline{OI}^2.$$

Faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, on obtient

$$\overline{OI}^2 \times \overline{EF'}^2 - \overline{OI}^2 (OF' + OG)^2 = \overline{OI}^2 \times \overline{OC}^2 - \overline{OC}^2 \times \overline{OG}^2.$$

Ajoutant aux deux parties de l'égalité $\overline{OI}^2 (OF' + OG)^2$, il vient

$$\overline{OI}^2 \times \overline{EF'}^2 = \overline{OI}^2 \times \overline{OC}^2 - \overline{OC}^2 \times \overline{OG}^2 + \overline{OI}^2 (OF' + OG)^2;$$

puis, si l'on effectue l'élévation de $OF' + OG$ au quarré,

$$\overline{OI}^2 \times \overline{EF'}^2 = \left\{ \begin{array}{l} \overline{OI}^2 \times \overline{OC}^2 - \overline{OC}^2 \times \overline{OG}^2 + \overline{OI}^2 \times \overline{OF'}^2 \\ + 2\overline{OI}^2 \times OF' \times OG + \overline{OI}^2 \times \overline{OG}^2 \end{array} \right\}.$$

Or

$$\overline{OI}^2\times\overline{OC}^2+\overline{OI}^2\times\overline{OF'}^2=\overline{OI}^2(\overline{OC}^2+\overline{OF'}^2)=\overline{OI}^2\times\overline{CF'}^2$$
$$=\overline{OI}^2\times\overline{OI}^2=(\overline{OI}^2)^2,$$

et (49)

$$\overline{OI}^2\times\overline{OG}^2-\overline{OC}^2\times\overline{OG}^2=(\overline{OI}^2-\overline{OC}^2)\times\overline{OG}^2=(\overline{CF'}^2-\overline{OC}^2)\times\overline{OG}^2$$
$$=\overline{OF'}^2\times\overline{OG}^2.$$

Donc

$$\overline{OI}^2\times\overline{EF'}^2=(\overline{OI}^2)^2+2\overline{OI}^2\times OF'\times OG+\overline{OF'}^2\times\overline{OG}^2$$
$$=(\overline{OI}^2+OF'\times OG)^2,$$

et si l'on extrait les racines,

$$OI\times EF'=\overline{OI}^2+OF'\times OG,\quad \text{puis}\quad EF'=\frac{\overline{OI}^2+OF'\times OG}{OI}.$$

La longueur de EF se calcule absolument de la même manière, si ce n'est qu'il faut remplacer $\overline{GE}^2$ dans la seconde proportion, par $\overline{EF}^2-\overline{FG}^2=\overline{EF}^2-(OF-OG)^2$, et mettre partout F au lieu de F'. La valeur de EF doit donc ressembler à celle de EF'; seulement le produit $OF\times OG$ s'y retranche de $\overline{OI}^2$, comme OG se retranche de OF dans l'expression de $\overline{GE}^2$. Ainsi

$$EF=\frac{\overline{OI}^2-OF\times OG}{OI},\quad \text{et}\quad EF'+EF=\frac{2\overline{OI}^2}{OI}=2\,OI=AB,$$

puisque $OF'=OF$.

Applications : I. L'ellipse est la vraie courbe des cintres surbaissés : elle leur donne une forme agréable, quelles que soient la largeur et la hauteur, tandis que les courbes à plusieurs centres, ou anses de panier, déplaisent souvent à l'œil, à raison de la grande différence qui existe ordinairement entre la courbure de l'arc du milieu et celle des deux arcs extrêmes. On exécute donc souvent des ellipses dans la coupe des pierres. Il y a même un grand nombre d'épures où l'on ne peut éviter d'en tracer : telles sont celles des voûtes d'arêtes, des arcs-de-cloître, des trompes faites sur un coin obtus, etc.

Le chaudronnier exécute parfois des surfaces dont la cherche est une ellipse, et son ouvrage serait plus beau, plus exact, s'il savait tracer cette cherche.

L'orfèvre, le bijoutier et par suite le lapidaire contournent ou taillent en ellipses plusieurs riches produits, tels que des vases de vermeil ou d'argent, des clefs de montre, des médaillons de collier ou de bracelet, des agates et des pierres plus précieuses encore.

Le fondeur donne souvent la courbure elliptique à ses moules. Le ferblantier confectionne des cylindres aplatis dans un sens et renflés dans un autre, dont le contour est une ellipse. Un tourneur habile sait faire des anneaux elliptiques. Le tonnelier est obligé de donner cette forme à des cuviers qui, s'ils étaient circulaires, ne pourraient passer par les portes des buanderies. Le jardinier termine par l'ellipse des boulingrins ou des corbeilles de fleurs. Le tabletier fait des cadres elliptiques; le menuisier construit pour certains œils-de-bœuf des châssis de même forme; le miroitier et le vitrier sont donc forcés de tailler en ellipses les verres qu'ils doivent mettre à ces cadres et à ces châssis.

Le peintre ne peut représenter, sans tracer une ellipse, l'ombre portée par une sphère sur un plan horizontal, ni celle qu'un tel corps jette, dans le plus grand nombre des cas, sur un plan vertical. C'est aussi la même courbe qui sépare l'ombre de la lumière, quand un plancher est éclairé par un fallot à verre rond, et que l'objet lumineux se trouve au-dessus du centre de ce verre, mais à une distance verticale supérieure au rayon (23).

II. Le menuisier est encore conduit à faire des applications de l'ellipse dans le tracé des cintres d'alcove : il est assez ordinaire que ces cintres ne puissent être des demi-cercles, attendu que le plafond n'est presque jamais assez élevé par rapport à la largeur de l'ouverture.

III. Les cames dont la surface cylindrique a pour base une ellipse, sont propres à communiquer, en tournant sur leur axe, un mouvement rectiligne alternatif aux bielles qu'elles poussent.

IV. Les tables destinées aux repas de cérémonie doivent être elliptiques : le service se fait sur des tables de cette forme comme sur celles qui sont rectangulaires, et tous les convives peuvent se voir presqu'aussi bien qu'autour d'une table ronde. Dans ce cas et quand les localités le permettent, on donne au petit axe de l'ellipse une longueur de $1^m,50$ à 2^m. Comme des tables si larges et encore plus longues seraient difficiles à loger si elles étaient d'une seule pièce, on les divise en deux parties dans le sens de la longueur ou selon le grand axe. Ces deux parties s'assemblent au moyen d'une rainure et d'une languette, et les barres transversales de l'une empiètent un peu sous l'autre. On termine même ces barres en biseaux ou onglets qui se contrarient, et on les place sur la même droite perpendiculaire au grand axe : il est alors impossible que l'une des deux parties de la table prenne un mouvement selon la longueur, sans entraîner l'autre.

On peut aussi faire des tables elliptiques à coulisses, alonges et charnières; mais il faut que le nombre des alonges soit impair, que celle du milieu soit partagée en deux parties égales par le petit axe et que les autres soient égales deux à deux.

Lois de la nature : On a cru long-temps que le Soleil tournait autour de la Terre, mais il est bien reconnu aujourd'hui qu'il ne fait que tourner sur lui-même, et que c'est la Terre qui tourne autour de cet astre en 365 jours environ, tout en pivotant sur son axe à peu près en 24 heures. La courbe que décrit annuellement le centre de la Terre n'est pas un cercle, comme on se l'imaginait anciennement : cette courbe est une ellipse dont les axes ne sont pas très-différents en longueur et dont l'un des foyers est occupé par le centre du Soleil ; elle est appelée *Ecliptique*, parce que c'est quand le centre de la Lune se trouve dans le plan de cette ellipse, ou à peu près, qu'arrivent les éclipses.

L'écliptique a une longueur d'environ 200 millions de lieues, et comme la Terre le parcourt en un an, elle est obligée de faire à peu près 24 mille lieues par heure. C'est l'attraction du Soleil qui la fait tourner, malgré cette prodigieuse vitesse imprimée en ligne droite, au commencement des siècles, par la volonté de Dieu. Aussi l'astre a-t-il une masse 354936 fois plus grande que celle de notre globe. Il faudrait plus de 32 décillions de bons chevaux pour faire en 1'' autant de travail qu'en a fait Dieu dans un instant pour lancer la Terre. Jugez par là combien sont grandes les forces motrices appliquées à la nature par la main du Créateur ; et comparez, si vous pouvez, la faiblesse de l'homme à la puissance divine.

De ce que le centre de la Terre se meut sur une ellipse, il suit que nous ne sommes pas toujours à la même distance du Soleil ; mais ce qu'il y a de singulier, c'est que nous en sommes un peu plus voisins en hiver qu'en été. Le froid que nous éprouvons ne provient donc pas de l'éloignement de l'astre.

Il existe des corps célestes analogues à la Terre et qu'on voit briller comme des étoiles, bien qu'ils ne fassent que réfléchir la lumière du Soleil : de ce nombre est l'*étoile du berger* ou *Vénus* qui est encore appelée *étoile du matin*, *étoile du soir*. Ces corps qu'on nomme *planètes*, décrivent aussi des ellipses autour du Soleil : les unes sont moins grandes que celle de la Terre, les autres le sont davantage, et le plan de chacune fait un angle particulier avec celui de notre écliptique.

La planète la plus voisine du Soleil a reçu le nom de *Mercure*. Le grand axe de son ellipse n'est pas les quatre dixièmes de celui de l'ellipse terrestre. La planète la plus éloignée du Soleil a été nommée *Uranus* ; elle n'est connue que depuis 1781. L'ellipse d'Uranus embrasse toutes les autres ; son grand axe vaut plus de dix-neuf fois celui de la nôtre.

Entre Mercure et la Terre, il n'y a que Vénus. Entre notre globe et Uranus, se trouvent *Mars*, *Vesta*, *Junon*, *Cérès*, *Pallas*, *Jupiter* et *Saturne*, ce qui fait en tout onze planètes connues, la Terre comptée. Les quatre corps qui suivent Mars ne sont découverts que depuis une quarantaine d'années.

Autour de plusieurs de ces planètes, tournent d'autres sphères que nous voyons briller aussi et qui pourtant ne sont pas non plus des étoiles. Elles sont dites *satellites* de la planète qu'elles accompagnent, et ce sont encore des ellipses qu'elles décrivent, tout en tournant sur elles-mêmes. La Terre n'a qu'un satellite : c'est la Lune. Mercure, Vénus, Mars, Vesta, Junon, Cérès, Pallas, n'ont point de satellites ; mais Jupiter en a quatre, Uranus six, Saturne sept ; de plus cette dernière planète est entourée d'un anneau mince, circulaire, qui en est détaché, qui lui est concentrique, et dont une ellipse forme la section droite. Comme le plan de l'anneau se trouve très-souvent incliné par rapport à la droite qui va de son centre à celui de la Terre, on ne l'aperçoit guère, dans les télescopes, que sous une forme elliptique.

La Lune ne décrit pas tout-à-fait une véritable ellipse autour de la Terre, parce que sa marche est troublée par l'attraction du Soleil qui balance tantôt plus, tantôt moins celle de notre sphère, à raison des variations de l'éloignement où nous sommes de cet astre. La courbe lunaire n'est donc ni un cercle, ni une ellipse: sa nature est toute particulière. Son plan fait un angle d'environ deux degrés avec celui de l'écliptique, et de là vient qu'il n'y a pas toujours éclipse de soleil lors de la nouvelle lune ou éclipse de lune quand elle est dans son plein.

Enfin, ce sont des ellipses extrêmement alongées que décrivent autour du Soleil, dans des sens très-variés, les astres singuliers nommés *Comètes*, à cause de l'espèce de chevelure et des longues queues formées par les vapeurs qu'ils entraînent.

TRACÉS DE L'ELLIPSE.

53. Des propriétés de l'ellipse résultent différentes manières de la tracer, qu'il est bon de connaître toutes, afin de pouvoir choisir la plus convenable, relativement à la circonstance où l'on se trouve.

PROBL. (*a*): *Tracer d'un mouvement continu une ellipse dont les axes sont donnés* (2).

Solution 1 : TRACÉ DU JARDINIER. Marquez les foyers F, F′ (49), et plantez-y deux pointes perpendiculairement au tableau (P. I, F. 36). Appliquez au sommet A l'extrémité d'un fil, faites-le passer derrière F′ en le tendant, ramenez-le en A, et faites là un nœud de manière que le fil ainsi doublé ait juste la longueur de F′A. Si maintenant vous tendez le fil sans fin, à l'aide d'une pointe à tracer placée en A, et que vous fassiez cheminer cette pointe, sans augmenter ni diminuer la tension, elle tracera l'ellipse AECBDA qui aura pour axes les droites données AB, CD.

En effet, la longueur du fil sans fin est

$$2F'F + 2FA = F'F + F'F + FA + F'B = F'F + AB \quad (50),$$

et elle reste telle pendant tout le tracé. Lors donc que la pointe mobile est en E, par exemple, les deux parties FE, F′E du fil valent en somme AB, et conséquemment, le point E appartient à l'ellipse dont les foyers sont F, F′ et qui a pour axes AB, CD (52).

Observations: Si l'on trace sur une matière dans laquelle on ne puisse planter des pointes, sur du marbre, par exemple, il faut poser aux foyers les pointes fines d'un compas à curseur, et tenir d'une main cet instrument, pendant que l'autre fait cheminer la pointe traçante.

Le tracé du jardinier est très-simple, mais on en obtient difficilement beaucoup d'exactitude, quand il s'agit d'une grande ellipse. Un cordeau quelque peu long est susceptible d'un allongement notable, surtout s'il est très-tors ; il faudrait donc que la traction opérée par la pointe traçante fût constante, et il est à-peu-près impossible de la rendre telle. L'emploi d'une chaînette ne remédierait pas à l'inconvénient, car son poids l'empêcherait d'être tendue rigoureusement en ligne droite, et les variations de la traction en produiraient d'autres dans la somme des rayons vecteurs. Que pour éviter la courbure verticale, on fasse mouvoir la chaînette sur un plan horizontal, la pression occasionnera un frottement qui retardera la marche du milieu de chaque branche, et la somme des rayons vecteurs variera encore avec la traction. Le tracé du jardinier doit donc n'être employé que pour les ellipses de petites dimensions ou pour celles qu'il n'est pas nécessaire de rendre très-exactes.

Toutefois, ne remplacez dans aucun cas le procédé qui précède, ni les suivants, par le tracé de plusieurs arcs de cercle raccordés : de tels arcs forment bien une courbe fermée qui parfois diffère peu de l'ellipse ; mais jamais cette courbe n'est une ellipse véritable, jamais elle n'a la même grâce (Appl. I, page 28).

Solution 2 : COMPAS D'ELLIPSE. L'instrument qui porte ce nom est formé de deux coulisses A'B', C'D' (P. II, F. 1) croisées à angles droits, et d'une règle GH garnie de deux curseurs E, G. Le premier E a une patte à pivot qui s'engage dans les coulisses et peut y glisser à frottement doux. Il en est de même d'un support H placé à l'une des extrémités de la règle. Le curseur G, situé vers l'autre extrémité, porte une pointe à tracer.

Placez la règle dans le sens de l'une des coulisses ; mettez le point milieu du curseur G à une distance de celui du support H égale au demi-grand axe, et le point milieu du curseur E à une distance de celui de G égale au demi-petit axe ; serrez les vis de pression, pour fixer les deux curseurs à la règle ; donnez à cette règle une position telle que H soit en O et G vers B', par exemple ; puis faites-la tourner de manière à engager H dans la coulisse OC'.

D'abord, E cheminera vers O, H vers C', la pointe tracera l'arc BD, et la règle arrivera dans la position C'D'. Ensuite, E glissera vers A, H rétrogradera vers O, la pointe tracera l'arc DA, et la règle parviendra à la position OA'. Pendant la description de l'arc AC, E rétrogradera vers O et H ira vers D', ce qui portera la règle dans la position D'C'. Enfin, pour tracer CB, il faudra faire marcher E vers B, en ramenant H vers O, jusqu'à ce que la règle ait repris sa première position OB'.

La courbe ACBD sera bien une ellipse, car l'hypothénuse HE des triangles rectangles HOE se trouvera constamment égale à HG — EG différence des deux demi-axes, et cette hypothénuse prolongée jusqu'à la ligne tracée vaudra toujours la moitié HG du grand axe (45).

Observations : Si les axes sont tracés, il faut, avant de faire tourner la règle, placer les coulisses de manière que leurs lignes-milieux, marquées sur les bouts, se confondent l'une avec la direction du grand axe, l'autre avec celle du petit, et que le croisement de ces lignes réponde au centre. La dernière condition est remplie quand $AA' = BB'$, car le croisement est au milieu même de chaque coulisse.

Observation : Le compas d'ellipse a l'inconvénient de ne pouvoir servir pour les courbes dont les axes sont moindres que les longueurs des coulisses, ni pour celles dont les axes ont une différence qui surpasse A'C', ni pour celles dont le grand axe égale la règle. D'ailleurs, cette règle se courbe plus ou moins, sous les efforts combinés de la main et des frottements qui ont lieu dans les coulisses.

Solution 3 : TRAPÈZE SYMÉTRIQUE. L'instrument que nous nommons ainsi, présente trois règles qui se croisent deux à deux et peuvent glisser l'une sur l'autre. A deux des croisements E, G sont des articulations (P. II, F. 2), et au troisième H est la pointe traçante qui peut cheminer à la fois le long des deux règles sur lesquelles elle se trouve. Ces règles ont chacune, à l'une de leurs extrémités, un trou dans lequel s'engage une pointe plantée à l'un des foyers F, F'.

Desserrez les articulations E, G, pour rendre les règles FG, F'E égales chacune au grand axe AB, et la règle EG, égale à la distance FF' des foyers. Serrez ensuite les articulations de manière que les longueurs ne puissent plus varier, et faites tourner l'instrument autour des foyers. La pointe H parcourra les deux règles qui se croisent à ce point, et décrira une ellipse dont les axes seront les droites données AB, CD.

En effet, menons les droites EF, F'G; le quadrilatère EFF'G sera un trapèze symétrique, puisque les diagonales FG, EF' sont égales et que les côtés concourants EG, FF' ont même longueur. Ce trapèze changera de forme et de superficie, pendant son mouvement autour des foyers : lorsque, par exemple, les bases parallèles EF, F'G auront les positions E'F, F'G' perpendiculaires à AB, la figure E'FF'G' sera un rectangle; quand les deux règles FG, F'E se confondront avec la direction du grand axe AB, il en sera de même pour EG, EF, F'G, et le quadrilatère se trouvera réduit à une ligne droite. Mais dans tous les cas, la pointe H divisera les diagonales FG, EF' de façon qu'on aura $EH = FH$, $GH = F'H$. Donc, la somme des droites F'H, FH vaudra chaque diagonale ou le grand axe AB, ce qui montre que H sera constamment un point de l'ellipse (52).

Observation : Le seul inconvénient du trapèze symétrique est d'être un peu grand; car les longueurs des règles limitent seules le nombre des ellipses différentes qu'il peut tracer, et il n'y a pas d'instrument qui n'ait un tel défaut.

Solution 4 : TRIANGLE VARIABLE. L'instrument ainsi nommé se compose de trois règles : l'une EG (P. II, F. 3) doit avoir pour longueur au moins la somme des deux axes donnés, et présenter à son milieu une saillie percée, qui affleure le dessus, mais non le dessous; les deux autres, plus petites, sont unies par une articulation H qui, desserrée, permet de leur donner la longueur nécessaire. Cette longueur vaut, pour chacune, la moitié de la somme des demi-axes. L'une HO des deux petites règles est liée à la grande par un boulon O qui entre dans le trou de la saillie, et c'est à partir de l'axe du boulon, jusqu'à l'axe de l'articulation H, que l'on compte la longueur. L'autre HK, arrondie à son extrémité K, se trouve en H au-dessous de OH, de sorte qu'elle peut passer sous cette dernière règle et même sous la saillie de la grande. Enfin, une pointe à tracer L, dont la tête affleure le dessus de HK, peut glisser dans une mortaise qu'a cette petite règle, et se fixe en un point tel que HL égale la moitié de la différence des deux demi-axes.

Placez l'arête EG de la grande règle sur le grand axe AB, le boulon au centre O de l'ellipse, la pointe L au sommet B; puis tirez la règle HK obliquement à EG, au moyen d'un fil qui passe sous HO. L'extrémité K glissera sur EG, sans pouvoir quitter cette règle; HK passera sous HO dans la position OC; puis HK et HO s'appliqueront sur OE, comme au commencement de l'opération elles s'appliquaient sur OG, et la pointe L aura tracé la demi-ellipse BCA, Retournant alors l'instrument, bout pour bout, et le plaçant ainsi qu'il a été dit, vous obtiendrez, de la même manière, la demi-ellipse BDA.

La démonstration du procédé est fondée sur ce principe qu'en ajoutant la demi-différence de deux nombres à leur demi-somme, on trouve le plus grand, et qu'en retranchant la demi-différence de la demi-somme, on obtient le plus petit. Par exemple, 18 et 4 ont pour demi-somme 11, pour demi-différence 7, et $11+7=18$, $11-7=4$. Comme des lignes mesurées peuvent être représentées par des nombres, la ligne brisée $OHL = OB$, puisque

$$OH = \frac{OB+OC}{2}, \quad \text{et que} \quad HL = \frac{OB-OC}{2}.$$

Pour les mêmes raisons, $LK = OC$, car

$$LK = HK - HL = OH - HL.$$

Cela posé, décrivons une demi-circonférence sur AB, abaissons de L une perpendiculaire LM à EG, en la prolongeant jusqu'à la circonférence, et menons LN parallèlement à OH. Les triangles semblables OMP, NML donneront $LM : PM :: LN : OP$. Or, $LN = LK = OC$, parce que le triangle NLK est symétrique, comme son semblable OHK; de la symétrie de NLK résulte la similitude de NML, KML, puis celle de OMP, KML, puis l'égalité des angles P, MLK; cette égalité et celle des angles MLK, HLP, font que l'angle $P = HLP$. Par conséquent, le triangle LHP est symétrique aussi, $HP = HL$, $OHL = OP$ et $OP = OB = OQ$. La proportion devient donc

$$LM : PM :: OC : OQ,$$

ce qui montre (44) que L est en effet un point de l'ellipse dont les axes sont AB, CD.

Probl. (*b*) : *Tracer par points une ellipse dont les axes sont donnés* (2).

Solution 1 : Marquez (49) les foyers F, F' (P. I, F. 36) ; puis de F, avec un rayon arbitraire, mais moindre que FB et plus grand que FA, décrivez un arc. Portez le rayon employé de A en un certain point K de AB, et avec le reste KB du grand axe, décrivez de F' un second arc qui coupe le premier. L'intersection E sera un point de la courbe. Enfin, répétez ces opérations, en augmentant ou en diminuant le premier rayon, vous trouverez autant de points de l'ellipse qu'il vous en faudra pour la tracer.

Il est visible d'ailleurs que les mêmes centres et les mêmes rayons donnent un second point L, et qu'en se servant à chaque foyer du rayon employé à l'autre, on obtient deux nouveaux points M, N. Les deux mêmes ouvertures de compas procurent donc quatre points E, L, M, N de la courbe.

Il suffit, pour démontrer la justesse du tracé, de faire remarquer que $FE + EF' = AK + KB = AB$ (52).

Solution 2 : Portez la moitié AO du grand axe (P. I, F. 34) sur une règle à biseau, pour les grandes ellipses, ou sur le bord d'une bande de papier pliée en deux, pour les petites ; portez-y aussi la moitié OC du petit axe, de O' en C' ; puis placez la bande A'O' dans la position de la droite EH, c'est-à-dire de manière que la différence A'C' des demi-axes ait son extrémité A' sur le petit et son extrémité C' sur le grand. Le point O' indiquera un point de l'ellipse (45) ; vous le marquerez avec un crayon, et vous en trouverez ainsi autant d'autres que vous voudrez, si vous variez les positions de A'O', en faisant mouvoir cette règle ou cette bande, comme se meut la règle du compas d'ellipse (probl. *a*, solut. 2).

Solution 3 : Décrivez un demi-cercle sur le grand axe AB (P. II, F. 4) ; joignez l'extrémité C du petit axe à l'extrémité B du grand ; élevez sur ce dernier des perpendiculaires, telles que EG, jusqu'à la rencontre de la demi-circonférence ; portez ces demi-cordes du cercle sur AB, à partir de B ; par les points H qui en résultent, menez des parallèles à EG, jusqu'à CB, et par les intersections I, des parallèles à AB, jusqu'aux perpendiculaires EG. Les rencontres K seront des points de l'ellipse, et vous en obtiendrez d'autres, en portant EK sur le prolongement de GE, de E en K', puis LK de L en K'', sur le prolongement de KI, et de M en K''', sur une parallèle à AB tirée par K' (35).

On aura en effet BH : HI :: BO : OC, et par conséquent, EG : EK :: ON : OC, ce qui prouve que K se trouve sur l'ellipse dont les axes sont AB, CD (44).

Solution 4 : Décrivez deux quarts de cercle du centre O, avec les demi-axes pour rayons (P. II, F. 5) ; tirez des rayons OE ; abaissez sur le grand axe, des perpendiculaires EG ; puis menez, par les intersections H de chaque rayon OE et du petit quart de circonférence, des parallèles HI à AB. Les points I, où ces parallèles rencontreront celles EG du petit axe, seront des points de l'ellipse, et chacun en fournira trois autres I', I'', I''', si vous agissez comme le prescrit la fin de la solution précédente.

Il suffit de tirer HK parallèlement à OC, pour se convaincre de la justesse du tracé, car HK = IG, et les triangles semblables OKH, OGE donnent

$$HK : EG :: OH : OE \quad \text{ou} \quad IG : EG :: OC : OL \ (44).$$

Solution 5 : Décrivez un cercle qui ait le grand axe AB pour diamètre (P. II, F. 6) ; tirez, par l'une C des extrémités du petit et par le point E où son prolongement rencontre la circonférence, deux droites CG, EG qui aillent concourir sur le prolongement de AB ; abaissez sur AB une perpendiculaire HI qui parte du point H où EG coupe la circonférence. L'intersection K de HI et de CG sera un point de l'ellipse, car les parallèles EO, HI, coupées par les concourantes OG, CG, EG, donneront

$$IK : IH :: OC : OE \quad \text{ou} \quad IK : OC :: IH : OE \ (44).$$

Si donc vous tirez d'autres paires de concourantes par C et par E, puis par D et par L, et que vous placiez les points de concours à droite de B, après les avoir pris à gauche de A, vous obtiendrez autant de points de l'ellipse qu'il en faudra pour pouvoir la tracer. Vous pouvez aussi prolonger les perpendiculaires HI et prendre IL = IK. Chaque paire de concourantes donnera ainsi deux points de la courbe (35).

Solution 6 : Décrivez un demi-cercle sur le grand axe AB (P. II, F. 7) et un autre demi-cercle sur le petit axe CD. Divisez ces deux arcs en un même nombre de parties égales, en huit par exemple, puis numérotez les points de division des deux moitiés du premier en sens inverses, et ceux des deux moitiés du second non-seulement en sens inverses aussi, mais encore dans un ordre contraire à celui des précédents. Enfin, menez par les points de divison du grand arc, des parallèles au petit axe, et par ceux du petit arc, des parallèles au grand axe. Les rencontres des parallèles de même numéro seront des points de l'ellipse.

Je dis, par exemple, que l'intersection E des parallèles II, 2 appartient à la courbe demandée. Soient menés les rayons O.II, O.2, et la droite 2.H perpendiculaire au grand axe. L'arc B.II et l'arc K.2 valent chacun $\frac{2}{8}$ de leur demi-circonférence ou le quart de 180°. Ils sont donc égaux en degrés ; par suite, les triangles rectangles OG.II, OH.2 se trouvent semblables, ce qui donne la proportion G.II : H.2 :: O.II : O.2. Or, H.2 = GE, comme parallèles comprises entre parallèles ; O.II = OL, et O.2 = OC. Donc,

$$G.II : GE :: OL : OC \quad \text{ou} \quad G.II : OL :: GE : OC,$$

et conséquemment (44), E est un point de l'ellipse qui a pour axes les droites données AB, CD.

Probl. (c) : *Tracer une ellipse dont on connaît le grand axe et un point.*

Solution 1 : Il suffit de déterminer le petit axe, pour retomber dans les deux problèmes précédents. Soient AB le grand axe et H le point donné (P. I, F. 34).

Vous éleverez, au milieu O de AB, une perpendiculaire; vous la couperez en E, par un arc décrit de H, avec AO pour rayon; vous tirerez EH; puis, portant de O en C et en D la partie GH de cette droite, vous obtiendrez le petit axe CD (45).

Solution 2: Soient AB le grand axe et K le point donné (P. II, F. 6).

Décrivez une demi-circonférence sur AB; élevez la perpendiculaire OE au milieu de AB; abaissez la perpendiculaire KI; joignez les points E, H où ces droites rencontrent la circonférence, puis K au point G où EH coupe le prolongement de AB. L'intersection C de GK et de OE sera l'extrémité du demi-petit axe OC, car les parallèles EO, HI, coupées par les trois droites qui concourent en G, donnent IK : OC :: IH : OE (27 et 44).

Mais, si K était donné très-près de C, il arriverait que le concours G se trouverait très-loin de O. Pour éviter cet inconvénient, vous pourrez rapporter IK en OK′ (F. 8), OE en IE′, au moyen de parallèles à AB, puis tirer HK′ et E′G. L'intersection C de cette dernière droite et de OE sera aussi l'extrémité du petit axe, car vous aurez OK′ : OC :: IH : IE′ ou IK : OC :: IH : OE.

Solution 3: Décrivez sur AB une demi-circonférence (F. 6); abaissez la perpendiculaire IK, en la prolongeant jusqu'à cette courbe; tirez, par le point H, une sécante quelconque G′M; menez MN parallèle à HI, et joignez les points G′, K. L'intersection P de G′K et de MN sera un point de l'ellipse, puisqu'on aura

IK : NP :: IH : NM (44).

D'autres sécantes tirées par H vous donneront de nouveaux points du quart d'ellipse AKC, en tel nombre que vous voudrez. Pour trouver les points correspondants des trois autres quarts, ceux de P par exemple, vous pourrez prolonger MN et prendre NQ = NP, puis mener par P, Q des parallèles à AB et prendre RS = RP, TU = TQ (35).

Probl. (*d*): *Tracer une ellipse dont on connaît le petit axe et un point.*

Solution 1: Soient CD le petit axe et H le point donné (P. I, F. 34). Il suffira de déterminer le grand axe, pour pouvoir appliquer les solutions du problème (*a*) ou celles du problème (*b*).

Elevez, au milieu O de CD, une perpendiculaire; coupez-la en G, par un arc décrit de H, avec OC pour rayon; tirez HG et prolongez cette droite jusqu'à ce qu'elle rencontre le petit axe; enfin, portez EH de O en A et en B. La droite AB sera le grand axe (45).

Solution 2: Employez la solution 2 du problème (*c*), en y remplaçant le grand axe par le petit.

Solution 3: Employez la solution 3 du problème (*c*), en y remplaçant le grand axe par le petit.

PROBL. (*e*) : *Tracer une ellipse dont on connaît la longueur* a *du grand axe et la distance* d *des foyers* (P. II, F. 9).

Portez d sur a, à partir de l'une des extrémités ; partagez en deux parties égales la différence bc des deux longueurs ; tirez une droite AB égale à a ; portez-y, de A en F et de B en F', la moitié be de bc. Les points F, F' seront les foyers (50), et vous pourrez appliquer la solution 1 du problème (*a*) ou celle du problème (*b*). Mais, si vous voulez tracer l'ellipse au moyen des deux axes, il faudra élever une perpendiculaire au milieu O de AB, puis décrire de F, avec AO pour rayon, un arc qui coupe deux fois cette perpendiculaire. Les intersections C, D seront les extrémités du petit axe (49).

PROBL. (*f*) : *Tracer une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués.*

Solution 1 : On fait retomber ce cas dans celui du problème (*a*) ou du problème (*b*), en déterminant les axes au moyen des diamètres donnés. Soient EG, HI ces diamètres (P. II, F. 10).

Abaissez, de l'extrémité E du plus grand, une perpendiculaire sur le plus petit ; portez OH, moitié de ce dernier, sur la perpendiculaire, de E en K ; joignez le milieu L de OK au point E ; puis rapportez LK de L en M ; MO sera la direction du grand axe, et OC, perpendiculaire à MO, celle du petit.

Reste à trouver les extrémités. Prenez $OB = OL + LE$, et $OA = OB$; les points A, B seront les sommets. Prenez $OC = EM$ et $OD = OC$; les points C, D seront les extrémités du petit axe.

Pour démontrer cette construction, nous décrirons un arc du centre O, avec OB ; du point E nous abaisserons EN perpendiculaire à OB, en la prolongeant jusqu'à l'arc, et nous ferons voir que

$$NE : OC :: NP : OQ \quad (44).$$

D'abord, l'intersection P de EN et de OK est sur l'arc, si $OP = OB = OL + LE$ ou si $LP = LE$. Or, puisque $LM = LK = OL$, l'angle $LMO = LOM$, et les deux triangles rectangles ENM, PNO sont semblables, d'où il suit que l'angle $MEN = OPN$. Donc, à cause de l'égalité des angles MEN, LEP, opposés par le sommet, $OPN = LEP$; le triangle ELP est en effet symétrique, et $LP = LE$.

Maintenant, les triangles semblables ENM, PNO donnent

$$NE : EM :: NP : OP.$$

Mais $EM = OC$, $OP = OB = OQ$. Donc enfin,

$$NE : OC :: NP : OQ.$$

Observation : Le tracé qui précède a l'inconvénient de rendre la direction de LE peu sûre, quand l'angle des deux diamètres conjugués est presque droit, parce qu'alors les points L, E se trouvent très-voisins. Or, si la position de EM n'est pas très-exacte, il en est de même de celles des axes.

Solution 2 : Après avoir abaissé une perpendiculaire de E sur HI, et porté OH de E en K (F. 11), comme dans la première solution, menez par E une parallèle MN à HI ; élevez, au milieu de KO, une perpendiculaire ; de l'intersection L de ces deux droites, décrivez, avec le rayon LK, une circonférence ou seulement deux petits arcs qui coupent MN. En joignant leurs intersections M, N au centre O de l'ellipse, vous aurez les directions MO, NO des axes ; puis, pour en déterminer les extrémités, il faudra unir M, N à K ; décrire de ce dernier point, avec le rayon KE, un arc qui coupe KM, KN, et mener, par les intersections P, Q, des parallèles à KO, jusqu'à la rencontre de MO, NO. Les points C, B, ainsi trouvés, seront respectivement les extrémités du petit et du grand axe, et il ne restera plus qu'à porter OC de O en D, OB de O en A.

En effet, l'ellipse demandée peut être considérée comme la projection oblique d'un cercle dont les diamètres égalent HI (43) ; parmi ces diamètres, il en est un auquel HI est parallèle, et c'est celui dont cette droite est la projection oblique. Conséquemment, le plan du cercle se trouve parallèle à HI ; ce plan coupe le plan de projection selon une parallèle à la même droite, et nous pouvons prendre MN pour cette parallèle d'intersection, puisque l'élévation du centre du cercle au-dessus du plan de l'ellipse n'est point fixée.

Rabattons le plan du cercle sur celui de la projection. Comme le diamètre qui se projette selon EG est perpendiculaire à celui qui se projette selon le conjugué HI (37), il se rabattra selon EK, droite d'équerre sur MN, et le centre du cercle rabattu sera le point K, puisque EK = OH.

Mais les axes de l'ellipse prolongés rencontreraient sur MN les diamètres du cercle dont ils sont les projections, et ces diamètres sont d'équerre comme les axes (35 et 37). Les centres K, O sont donc les sommets de deux triangles rectangles qui ont MN pour base commune ; par conséquent, la circonférence décrite de L, avec le rayon LK, doit être circonscrite à ces deux triangles, et déterminer les points M, N communs aux axes et aux diamètres dont ils sont les projections. Donc MK, NK sont les directions de ces diamètres, MO, NO, celles des axes, et les points P, Q, extrémités des mêmes diamètres, ont pour projections obliques les extrémités des axes.

Or, KO est le rabattement d'une des lignes projetantes, puisque K centre rabattu a pour projection oblique le centre O de l'ellipse. Conséquemment, PC, QB, parallèles à KO, sont bien les rabattements des lignes projetantes qui aboutissent aux extrémités des axes, et ces extrémités doivent en effet se trouver aux points C, B.

Solution 3 : Abaissez de E, extrémité de l'un EG des diamètres conjugués donnés (F. 12), une perpendiculaire sur l'autre HI ; portez OH sur cette perpendiculaire, de E en K ; appliquez une règle à biseau, ou une bande de papier pliée en deux, le long de EK ;

marquez-y les trois points E, L, K; joignez K à O par une droite prolongée MN; enfin, placez la règle E′K′ dans diverses positions, mais toujours de manière que L′ soit sur HI et K sur MN. Le point E′ marquera constamment un point de l'ellipse.

Il serait possible que K tombât entre E, L : cela aura lieu toutes les fois que OH se trouvera moindre que EL; mais, si l'on suit exactement le procédé qui vient d'être décrit, l'extrémité E′ de la règle n'en marquera pas moins des points de la courbe.

Le tracé sera démontré, si nous faisons voir que E′K′ peut toujours se placer entre MN et un point quelconque E″ de l'ellipse, de manière que L′ se trouve sur HI; en d'autres termes, il faut que E″L″ = EL, lorsque E″K″ = EK.

Décrivons une demi-circonférence sur HI comme diamètre, menons E″P parallèle à EO, et PQ, OR, E″S parallèles à EK. L'ellipse qui a EG, HI pour diamètres conjugués, est la projection oblique du cercle dont la demi-circonférence IRH forme la moitié du rabattement (43); par conséquent OE est la projection du rayon OR perpendiculaire à HI (37), et RE est une ligne projetante. Or, puisque RO est égal et parallèle à EK, RE se trouve parallèle à MN. Donc, les lignes projetantes sont toutes parallèles à la dernière droite, et comme E″P, parallèle à EO, forme la projection de PQ, parallèle à OR, QE″ est une ligne projetante parallèle à MN. Il s'ensuit que EK ne peut pas se placer entre MN et E″, de manière à être coupée par HI, sans se trouver parallèle au rayon QO qu'elle égale. Ainsi, en décrivant de E″, avec EK pour rayon, un arc qui coupe MN en K″, nous aurons la droite E″K″ parallèle à OQ.

Reste à démontrer que le point L″, où HI coupe E″K″, est tel que E″L″ = EL. En effet, les deux triangles semblables E″SP, ELO donnent E″P : EO :: E″S : EL; les deux triangles semblables QPO, E″SL″ donnent PQ : OQ :: E″S : E″L″, et d'après la propriété des diamètres conjugués (43), E″P : EO :: PQ : OR ou OQ. Donc, E″S : EL :: E″S : E″L″, et par conséquent E″L″ = EL.

Solution 4 : Elevez une perpendiculaire au milieu de HI l'un des diamètres conjugués donnés (F. 13); menez, par une des extrémités de l'autre EG, une parallèle EK au premier; décrivez de O, avec OK, un quart de circonférence, dans l'angle droit IOK, et avec OH, un autre quart, dans l'angle droit HOL; partagez ces arcs en un même nombre de parties égales, et numérotez les points de division à partir de KL pour chacun; menez, par ceux du grand arc, des parallèles à KL jusqu'à HI, et numérotez les secondes extrémités de ces parallèles comme le sont les premières; enfin tirez, par les points 1′, 2′, 3′, etc. qui en résultent, des parallèles à EG, puis par les points 1, 2, 3, etc. du petit arc, des parallèles à HI. Les intersections M, N, P, etc. des parallèles de même numéro seront des points de l'ellipse demandée.

Pour avoir d'autres points, vous pourrez porter QM de Q en M′, RN de R en N′, SP de S en P′, etc., 1′M de 1′ en M″, 2′N de 2' en N'', 3'P de 3' en P'', etc., puis mener par M', N', P', etc., des parallèles à EG, et porter TM' de T en m, UN' de U en n, VP' de V en p, etc. (35).

Démonstration : Il suffit de faire voir que le point N, par exemple, appartient à l'ellipse qui a EG, HI pour diamètres conjugués.

Décrivons dans l'angle HOL un arc d'un diamètre égal au plus petit; tirons le diamètre 2.II, et abaissons sur KL les perpendiculaires cd, II.e. Les triangles semblables Odc, Oe.II donnent

$$Od : Oe :: Oc : O.II :: Ob : OL.$$

De l'égalité des triangles Odc, OX.2, résulte Od = OX; de plus Ob = OK. Conséquemment

$$OX : Oe :: OK : OL, \quad \text{ou} \quad OX : OK :: Oe : OL,$$
$$\text{ou} \quad OX : OK :: 2'.II : OL.$$

Mais, parce que les triangles OXR, OKE sont semblables,

$$OX : OK :: OR : OE \quad \text{ou} \quad OX : OK :: 2'.N : OE.$$

Donc

$$2'.N : OE :: 2'.II : OL,$$

et par suite (43), N est sur l'ellipse.

Appl. (*a*) : La construction d'une descente biaise de cave est un des cas où l'on est obligé de tracer une ellipse dont deux diamètres conjugués sont connus. Il faut en effet développer en ligne droite la section droite du cylindre circulaire oblique qui forme le berceau, afin de pouvoir former le développement courbe du cintre circulaire de l'entrée, et limiter ainsi les plans de joints. Or la section droite n'est autre chose que l'ellipse projection orthogonale du cintre d'entrée ABC (F. 14) sur un plan DE, D'E' perpendiculaire à l'axe FG du cylindre. Comme AC, BF ne sont ni l'un, ni l'autre parallèles au plan DE, D'E', leurs projections sur ce plan se couperont obliquement et seront deux diamètres conjugués de l'ellipse (37). La projection de AC est DE. Pour avoir celle de BF, on rabat la section droite D'E' sur le plan de naissance CH. La parallèle à DE qui passe par E' devient IK; le point où la génératrice B perce le plan D'E' se rabat sur BL parallèle à FG, et B'F' est le rabattement de BF. Il s'agit donc de tracer une moitié de l'ellipse dont DE et B'B'', double de B'F', sont deux diamètres conjugués.

Appl. (*b*) : *L'arc rampant,* cintre d'une arcade destinée à soutenir une rampe (F. 15), est aussi une portion de l'ellipse qui a pour diamètres conjugués la droite inclinée EG, contenue dans le plan de naissance, et la verticale HI menée par le milieu O de EG. Ordinairement, OH = OE, c'est-à-dire que les deux diamètres sont égaux; mais, puisque les quatre solutions du problème (*f*) ne supposent aucune relation de grandeur entre les diamètres conjugués, elles n'en sont pas moins applicables.

« Ce n'est pas sans motif qu'on fait elliptiques les arcs rampants : s'ils étaient circulaires, les faces parallèles des deux piédroits, n'étant point perpendiculaires au plan EG de naissance, ne pourraient se trouver à la fois tangentes à la surface cylindrique du berceau, et l'une des *retombées* exercerait sur son piédroit une poussée plus grande que celle de l'autre. La forme elliptique fait éviter ce grave inconvénient, comme nous le verrons bientôt en étudiant les tangentes de l'ellipse. »

Probl. (*g*) : *Tracer une ellipse dont on connaît un diamètre* EG *et une demi-corde* KL *parallèle au conjugé de ce diamètre* (P. II, F. 16).

Il suffit de trouver le conjugué de EG, pour faire retomber ce cas dans celui du problème (*f*). Décrivez sur EG une demi-circonférence ; élevez les perpendiculaires OM, KN ; menez, par l'intersection M de la première et de la courbe, une parallèle à EG, jusqu'à la seconde ; joignez l'intersection P de celle-ci avec L ; tirez, par N, une parallèle à PL, jusqu'à la rencontre du prolongement de KL en Q, et portez KQ de O en H et en I, sur une parallèle à KL menée par le centre. La droite HI sera le conjugué cherché.

Démonstration : D'abord, HI a la direction du conjugué de EG, puisqu'elle est parallèle à KL et passe par le centre (32). Ensuite, OH forme bien la moitié de ce conjugué, si KL : OH :: KP : OM (43). Or, les parallèles LP, NQ donnent KL : KQ :: KP : KN, et KQ = OH, KN = OM.

Probl. (*h*) : *Achever une ellipse dont on n'a qu'un arc quelconque* KL (P. I, F. 29).

Cherchez le centre O, comme dans le problème (*b*) de la page 21 ; puis, au moyen de la demi-corde LN, déterminez le conjugé du diamètre EG, en suivant le tracé précédent ; enfin, appliquez une des quatre solutions du problème (*f*), n° 53.

Probl. (*i*) : *Tracer une ellipse déterminée autour d'un obstacle qui empêche d'employer les axes et tout autre système de diamètres conjugués.*

Tracez, autour de l'obstacle, un rectangle ABCD (P. II, F. 17) dont les côtés AB, CD aient même longueur que le grand axe, et les côtés AD, BC, même longueur que le petit axe ; divisez chacun de ces quatre côtés en douze parties égales ; numérotez les points de division de AB et de CD, en partant de celui du milieu, et ceux de AD, BC, en partant des longs côtés ; joignez tout point de chaque moitié de grand côté avec celui qui porte le même numéro dans la plus voisine des moitiés des petits côtés : tirez, par exemple, une droite du point 1 de AB au point 1 situé près de A ou de B, une seconde droite du point 2 de 1.B au point 2 de B.6, une troisième droite du point 3 de 1.B au point 3 de B.6, et ainsi de suite. Enfin, marquez le point où chacune de ces droites coupe celle qui la précède. Il en résultera un polygone de 24 côtés, et il ne s'agira plus que de tracer à la main une courbe qui passe par tous les sommets de ce polygone. Elle différera très-peu de l'ellipse qui aurait des axes égaux en longueur à AB et à CD : quelques intersections se trouveront tant soit peu en dedans ou en dehors de la véritable ellipse; mais d'autres seront précisément sur cette courbe, et il sera impossible d'apprécier à vue les différences, tant que l'ellipse ne sera pas tracée. Il y a du reste d'autant plus d'exactitude que cette ellipse doit être plus allongée.

TANGENTES DE L'ELLIPSE.

54. *Toute tangente* PQ *d'une ellipse* (P. I, F. 26) *est parallèle au conjugué* HI *du diamètre* EG *qui aboutit au point de contact* G.

Parmi les cordes parallèles à HI, que EG coupe par le milieu (35), il y en a une qui se confond avec un élément de la courbe, et G est le milieu de cet élément. Or la tangente PQ n'est pas autre chose que le même élément prolongé.

On peut dire aussi, en considérant le cercle projeté sur l'ellipse, que PQ est la projection de la tangente d'un tel cercle à l'extrémité du diamètre qui se projette sur EG, et que cette tangente du cercle, étant parallèle aux cordes divisées en deux parties égales par le diamètre qui aboutit à son contact, doit se projeter parallèlement aux projections de ces cordes, c'est-à-dire parallèlement à la corde BK de l'ellipse ou au conjugué HI (35).

Application : Il est aisé de voir maintenant pourquoi les berceaux rampants (page 41, appl. *b*) doivent être elliptiques. Les arêtes des piédroits qui passent par les extrémités du diamètre EG (P. II, F. 15), étant verticales, sont parallèles au conjugué HI de ce diamètre, et conséquemment tangentes à la courbe elliptique du cintre; d'où il suit que les faces internes des mêmes piédroits se trouvent toutes deux tangentes à la surface cylindrique du berceau.

55. *La corde* EG *des contacts de deux parallèles* PQ, P'Q' *tangentes à une ellipse est un diamètre* (P. I, F. 26).

Le conjugué du diamètre dirigé selon GO est parallèle à PQ; le conjugué du diamètre dirigé selon EO est parallèle à P'Q'. Ces deux conjugués sont donc parallèles entre eux, et comme ils passent tous deux par le centre O, ils ne font réellement qu'un seul diamètre. Or aucun diamètre n'a deux conjugués (37). Par conséquent, GO, EO constituent une ligne droite, et la corde EG est un diamètre.

56. *Les perpendiculaires élevées sur le grand axe, aux sommets, sont tangentes à l'ellipse, et il en est de même des perpendiculaires élevées sur le petit axe, à ses deux extrémités.*

Cela provient de ce que les axes sont des diamètres conjugués qui se coupent d'équerre (35).

57. *Toute tangente de l'ellipse forme des angles égaux avec les deux rayons vecteurs du point de contact.*

Ce principe sera démontré, si l'on fait voir que toute droite EG qui, passant par un point H de la courbe (P. II, F. 18), forme des angles égaux FHG, F'HE avec les rayons vecteurs de ce point, est tangente.

Prolongeons FH d'une longueur HI égale à F'H, puis tirons F'I. Le triangle F'HI sera symétrique, et parce que l'angle IHE = FHG = F'HE, EG sera perpendiculaire au milieu de F'I. Or, il s'ensuivra qu'aucun second point K de EG, pris aussi près de H qu'on voudra, ne pourra se trouver sur l'ellipse, ou que FKF' surpassera le grand axe AB (52).

En effet, FKF' = FKI, puisque KI = KF', et FKI surpasse FI qui égale FHF' ou AB.

58. *La droite qui joint le centre* O *de l'ellipse à l'intersection* K *de deux tangentes quelconques* (P. II, F. 19), *partage en deux parties égales la corde* RS *des contacts.*

Rabattons sur le plan vertical le cercle O' dont l'ellipse O est la projection horizontale. Les tangentes KR, KS seront les projections des tangentes K'R', K'S' du cercle O', et KO, RS seront celles de K'O', R'S'. Or, le point T' est le milieu de R'S'. Par conséquent, la rencontre T de KO et de RS est le milieu de la corde RS qui joint les deux contacts.

59. *Les tangentes dont les contacts* E, G (P. II, F. 20) *sont symétriquement placés par rapport à un axe* AB, *se coupent en un point* H *de cet axe, et sont de même longueur,* considérées de leur concours aux contacts.

La droite HO divise en deux parties égales la corde EG des contacts (58). Mais (5 et 26), puisque E, G sont des points symétriques, AO coupe aussi EG par le milieu I. Donc les droites HO, AO ont deux points O, I communs, et se confondent.

Il est aussi démontré par là que les triangles HIE, HIG sont rectangles. Il y a donc égalité entre eux, et conséquemment HE = HG.

60. *Les tangentes de l'ellipse qui concourent ailleurs que sur un axe, sont inégales, considérées depuis leur intersection jusqu'aux contacts.*

Comme la corde des contacts RS (P. II, F. 19) n'est plus perpendiculaire à KO qui joint le concours au centre (28), les triangles KTR, KTS sont inégaux, et par suite leurs côtés KR, KS ne sauraient être égaux comme les autres.

61. *L'ellipse a une infinité de paires de tangentes perpendiculaires entre elles.*

En effet, l'ellipse a une infinité de paires de diamètres qui se coupent à angles droits; les diamètres de chaque paire sont les conjugués de deux autres diamètres, et les tangentes menées par les extrémités de ces derniers, étant parallèles aux premiers (54), se trouvent d'équerre comme eux.

62. *Les intersections des paires de tangentes d'équerre sont toutes sur la circonférence décrite du centre O de l'ellipse, avec un rayon égal à la distance* BD *d'une extrémité du grand axe à une extrémité du petit* (P. II, F. 19).

Traçons les quatre tangentes parallèles aux axes; il en résultera le rectangle EGHI (56), et la circonférence décrite de O, avec BD, sera circonscrite à ce rectangle, parce que BD = OI, seconde diagonale du rectangle BODI.

Concevons un cylindre droit qui ait pour base la circonférence EGHI, et rabattons sur le plan vertical, la section faite dans ce cylindre, par le plan du cercle A'C'B'D' dont l'ellipse donnée ACBD est la projection horizontale. Cette section sera l'ellipse E'G'H'I' (24) circonscrite au carré qui se projette selon le rectangle EGHI.

Soient maintenant tracés deux diamètres d'équerre K'N', L'M dans l'ellipse O'; ils se projetteront selon les deux diamètres KN, LM de la circonférence O; la figure K'L'N'M' sera un losange; la figure KLNM, un rectangle, et si nous démontrons que la première est circonscrite au cercle O', il sera clair que la seconde se trouvera circonscrite à l'ellipse O, ou que les deux tangentes menées à cette ellipse, d'un point quelconque de la circonférence O, sont d'équerre.

Or, les droites O'K', O'P', leurs projections OK, OP, et les verticales projetantes, formant deux triangles semblables, donnent

$$O'K' : OK :: O'P' : OP.$$

On a de même

$$O'L' : OL :: O'Q' : OQ,$$

et parce que OK = OL, O'P' = O'Q', il en résulte

$$O'K' \times OP = O'L' \times OQ,$$

$$\text{ou}\quad O'K' : O'L' :: OQ : OP,\quad \text{ou}\quad \overline{O'K'}^2 : \overline{O'L'}^2 :: \overline{OQ}^2 : \overline{OP}^2,$$

$$\text{ou}\quad \overline{O'K'}^2 + \overline{O'L'}^2 : \overline{O'L'}^2 :: \overline{OQ}^2 + \overline{OP}^2 : \overline{OP}^2.$$

Mais $\overline{O'K'}^2 + \overline{O'L'}^2 = \overline{K'L'}^2$; $\overline{OQ}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OK}^2$, puisque OQ, OP sont diamètres conjugués (37 et 48). Conséquemment,

$$\overline{K'L'}^2 : \overline{O'L'}^2 :: \overline{OK}^2 : \overline{OP}^2,\quad \text{ou}\quad K'L' : O'L' :: OK : OP;$$

et d'après la première proportion,

$$K'L' : O'L' :: O'K' : O'P'.$$

D'ailleurs, la perpendiculaire O'R' abaissée sur K'L' rend semblables les triangles K'R'O', K'O'L' et donne

$$K'L' : O'L' :: O'K' : O'R'.$$

Donc, O'R' = O'P' rayon du cercle O', et ce cercle est tangent aux quatre côtés du losange K'L'N'M'.

Il est au reste évident que deux tangentes d'équerre ne sauraient avoir une intersection située hors de la circonférence O; car si une droite perpendiculaire à KL et différente de KM pouvait se trouver tangente à l'ellipse O, il y aurait deux perpendiculaires abaissées sur KL du point de rencontre des deux tangentes, ce qui est impossible.

Donc enfin, la circonférence O est le lieu de tous les points d'où peuvent partir les paires de tangentes d'équerre menées à l'ellipse O.

63. *Les concours des paires de tangentes menées à l'ellipse sont tous en ligne droite, quand les cordes de contact se croisent au même point.*

En effet, le croisement est la projection d'un pôle du cercle qui projeté a produit l'ellipse; les paires de tangentes de ce cercle deviennent des paires de tangentes à l'ellipse, et la polaire, qui contient les concours des premières paires, se projette selon une droite sur laquelle sont nécessairement les concours des autres paires.

64. *Toute tangente* EG *de l'ellipse* (P. II, F. 21) *est parallèle à* HI *un des côtés du pentagone inscrit* HIKLMH, *qui a le contact* L *pour sommet opposé à* HI *et dont les quatre autres côtés sont parallèles deux à deux.*

Il suffit de démontrer que le principe a lieu dans le cercle O′ dont l'ellipse O est la projection horizontale; car les projections KL, HM de K′L′, H′M′ seront parallèles comme ces cordes du cercle; il en sera de même des projections LM, KI de L′M′, K′I′, et des projections HI, EG de H′I′, E′G′.

Faisons voir d'abord qu'en traçant deux cordes parallèles quelconques H′I′, *bc* dans un cercle O′, puis deux autres cordes parallèles *cd*, I′*a*, et joignant *a* à *b*, *d* à H′, on obtient un hexagone inscrit H′I′*abcd*H′ dont les côtés opposés sont parallèles. Nous aurons seulement à montrer que la construction rend parallèles *ab* et H′*d*, ou qu'elle rend égaux les arcs H′*a* et *bcd*.

Ajoutons de part et d'autre l'arc *ab*. Nous devrons avoir H′*ab* $=$ *abcd*. Or, à cause du parallélisme de H′I′, *bc*, H′*ab* $=$ I′*dc*; à cause du parallélisme de I′*a*, *cd*, l'arc I′*d* $=$ *abc*. Donc,

$$H'ab = abc + dc = abcd.$$

Comme il n'a été fait aucune supposition sur la longueur de la corde *bc*, la même construction donnera toujours, quelque petite que soit *bc*, un hexagone analogue à H′I′*abcd*H′, dont H′I′ fera partie, si *bc* reste parallèle à cette corde. Donc l'hexagone à côtés opposés parallèles aura encore lieu, quand *bc* sera réduite à l'élément L′ de la circonférence, et cet élément se trouvera parallèle à H′I′. Or, la tangente E′G′ n'est pas autre chose que l'élément L′ prolongé; l'hexagone devient alors un pentagone analogue à H′I′K′L′M′H′; par conséquent, toute tangente d'un cercle O′ est parallèle à l'un H′I′ des côtés d'un pentagone inscrit qui a le contact

L' pour sommet opposé à $H'I'$, et dont les quatre autres côtés sont parallèles deux à deux.

65. *Deux cordes* AB, AC (P. II, F. 22) *menées dans l'ellipse aux contacts d'une paire de tangentes, par un point* A *pris sur l'arc qui tourne sa convexité au concours* D, *coupent toute sécante* DE, *issue de ce concours, de manière que les distances de leurs intersections* F, G *à l'une* E *de celles de la courbe, sont proportionnelles aux distances des mêmes points à l'autre* H; c'est-à-dire que FE : GE :: FH : GH.

La proportion est vraie, si le cercle O' qui se projette horizontalement sur l'ellipse O, donne $F'E' : G'E' :: F'H' : G'H'$, car les verticales projetantes des points F', H', G', E' divisent $F'E'$ comme elles divisent sa projection FE.

Faisons passer un cercle par les trois points A', C', F' et désignons par I son intersection avec $D'E'$. Les deux cordes $F'I$, $A'C'$, se coupant en parties réciproquement proportionnelles, donnent

$$F'G' \times G'I = A'G' \times G'C'.$$

Les deux cordes $A'C'$, $E'H'$ du cercle O donnent aussi

$$A'G' \times G'C' = G'E' \times G'H',$$

et l'on a

$$F'G' \times G'I = G'E' \times G'H', \quad \text{ou} \quad F'G' : G'E' :: G'H' : G'I,$$

$$\text{ou} \quad F'G' + G'E' : G'E' :: G'H' + G'I : G'I, \quad \text{ou} \quad F'E' : G'E' :: H'I : G'I.$$

Mais la première de ces proportions peut devenir

$$F'G' - G'H' : G'E' - G'I :: G'H' : G'I,$$

$$\text{ou} \quad F'H' : E'I :: G'H' : G'I, \quad \text{ou} \quad F'H' : G'H' :: E'I : G'I.$$

Si donc $H'I = E'I$, on a effectivement

$$F'E' : G'E' :: F'H' : G'H'.$$

Or $H'I = E'I$, si $O'I$ est perpendiculaire à $E'H'$, et $O'I$ remplit cette condition, si le cercle $A'C'F'$ et le cercle dont $D'O'$ est diamètre se coupent en I, car alors l'angle inscrit $D'IO'$ est droit.

Il reste donc à démontrer que le plus grand cercle et le plus petit ont le point I commun. L'angle fait par la tangente $B'D'$ avec la corde des contacts $B'C'$ a pour indication la moitié de $B'A'C'$. Il égale donc l'angle $C'A'F'$ qui a pour indication la moitié des arcs $A'B'$, $A'C'$. Comme ce dernier vaut $C'KF'$, inscrit aussi dans le petit cercle, $F'K$ se trouve parallèle à $B'D'$, et

$$L'F' : L'K :: L'D' : L'B'.$$

Mais les cordes IF', $C'K$ du petit cercle donnent

$$L'F' : L'K :: L'C' : L'I;$$

les cordes $I'D'$, $B'C'$ du grand donnent

$$L'D' : L'B' :: L'C' : L'I'.$$

Par conséquent,

$$L'C' : L'I :: L'C' : L'I',$$

ce qui montre que L'I = L'I' ou que D'E' est coupé au même point par les deux cercles.

66. *La corde* BC *des contacts d'une paire de tangentes à l'ellipse* (P. II, F. 22) *coupe toute sécante* DE, *issue du concours, de manière que les distances de ce concours* D *et de l'intersection* L *à l'une* E *des intersections de la courbe, sont proportionnelles aux distances des mêmes points à l'autre* H; c'est-à-dire que DE : LE :: DH : LH.

Le principe 65, qui donne FE : GE :: FH : GH, subsiste quelle que soit la position du point A. Il a donc lieu aussi quand ce point se confond avec le contact B. Or alors, AC devient la corde BC des contacts et G passe en L; AB devient l'élément B de la courbe, et BF se confond avec la tangente BD, de sorte que F passe en D. La proportion devient donc effectivement DE : LE :: DH : LH.

67. *La droite* EG (P. II, F. 23), *par laquelle le croisement* H *des diagonales d'un quadrilatère quelconque* IKLM *inscrit dans l'ellipse est joint au concours* G *de deux côtés opposés, passe par les contacts* E, N *des tangentes menées du concours* P *des deux autres côtés.*

La démonstration revient à faire voir que la corde EN des contacts des tangentes issues de P doit passer par le croisement H et le concours G. Or, la corde EN, d'après le principe précédent, divise la sécante PM de manière que PM : PI :: QM : QI; elle divise la sécante PL de manière que PL : PK :: RL : RK, et la théorie des transversales apprend que la droite tirée du croisement H à l'un G des concours formés par un quadrilatère, partage précisément comme EN les côtés qu'elle coupe. Conséquemment, les droites EN, HG passent toutes deux par les points Q, R, et se confondent.

Tracé des tangentes de l'ellipse.

68. Probl. (*a*): *Mener une tangente à l'ellipse, par un point donné sur cette courbe.*

Solution 1 : Décrivez un demi-cercle sur le grand axe AB (P. II, F. 20); tirez, du point donné E, une parallèle au petit axe CD; par le point K où la parallèle rencontre la demi-circonférence, menez une tangente à cette courbe; puis joignez E au point H, intersection de la tangente KH et du grand axe.

Démonstration : La droite HE se trouve effectivement tangente en E à l'ellipse; car cette courbe est la projection horizontale du cercle AKB..., le point E est celle du contact K, l'intersection H de KH et du diamètre AB se projette sur elle-même; par conséquent EH forme la projection de KH, et la première droite touche l'ellipse en E, puisque la seconde touche le cercle en K.

Solution 2 : Tracez, par le point donné E, un diamètre EG (P. I, F. 31); tirez une corde quelconque HI, parallèlement à EG, puis le diamètre IK; joignez les deux autres extrémités de ces droites, et menez par E une parallèle à HK.

Démonstration : La droite EN est tangente, si HK est parallèle au conjugué de EG (54). Or le parallélisme résulte de la solution 2 du problème (*g*), page 22.

Solution 3 : Tirez, par le point donné L, deux cordes quelconques LK, LM (P. II, F. 21) ; menez parallèlement à ces cordes et de leurs autres extrémités K, M, deux nouvelles cordes KI, MH. La droite ELG tracée parallèlement à HI sera la tangente demandée (64).

Solution 4 : Après avoir tiré les rayons vecteurs FH, F'H du point donné H (P. II, F. 18), prolongez l'une de ces droites, FH par exemple, d'une longueur HI égale à l'autre F'H ; puis abaissez de H une perpendiculaire GE sur F'I.

Démonstration : Puisque le triangle F'HI est symétrique et que HE coupe la base d'équerre, l'angle F'HE = EHI = FHG, et par conséquent EG est tangente en H (57).

Probl. (*b*) : ***Mener une tangente à l'ellipse, par un point donné hors de cette courbe.***

Solution 1 : Du point donné G (P. II, F. 18), avec un rayon égal à la distance de ce point au foyer F' le plus voisin du contact cherché, décrivez un arc de cercle F'I ; de l'autre foyer F, avec le grand axe AB pour rayon, décrivez un second arc qui coupe le premier ; marquez l'intersection I de ces deux arcs, puis abaissez de G une perpendiculaire GE sur F'I. Cette perpendiculaire sera tangente à l'ellipse, et si vous voulez déterminer exactement le contact H, il ne vous restera plus qu'à tirer la droite FHI.

Démonstration : Le point H de GE se trouve à égales distances de F' et de I, puisque cette droite est perpendiculaire au milieu de F'I. Conséquemment, F'H = HI, FH + F'H = FI = AB, et le point H appartient aussi à l'ellipse. D'ailleurs, le triangle F'HI étant symétrique, il s'ensuit que l'angle F'HE = EHI = FHG et que la droite GE satisfait au principe 57.

Observation : Comme le point donné G est hors de l'ellipse, la somme de la distance FG des centres des deux arcs et du plus petit rayon GF', surpasse le plus grand rayon AB. Les arcs se coupent donc en deux points I, I', et le tracé donne les deux tangentes GE, GE' qu'on peut mener à l'ellipse d'un point extérieur.

Solution 2 : Tirez du point donné P (P. II, F. 23) deux sécantes quelconques PL, PM ; joignez leurs points d'entrée et leurs points de sortie, par quatre droites IK, ML, KM, IL ; unissez le concours G des deux premières au croisement H des deux dernières, et marquez le point E où la droite GH coupe une seconde fois la courbe. Les droites PE, PN seront les deux tangentes qui peuvent être menées à l'ellipse par le point P (67).

Probl. (*c*) : ***Tracer, parallèlement à une droite donnée, une tangente de l'ellipse.***

Solution 1 : Tracez deux cordes quelconques EG, HI parallèles à la droite donnée PQ (P. I, F. 28) ; déterminez les milieux K, L de ces cordes, et par les points M, N où KL rencontre la courbe, menez des parallèles à PQ.

Démonstration : Les cordes EG, HI sont parallèles au conjugué du diamètre MN (35). Donc, MR, qui l'est aussi, touche l'ellipse en M (54).

Solution 2 : Tirez une corde HK parallèle à la droite donnée PQ (P. I, F. 31), puis un diamètre KI, et menez un second diamètre EG parallèle à la corde HI. Les parallèles à PQ, tracées par les extrémités de EG, seront tangentes à la courbe.

Démonstration : En effet, HK est parallèle au conjugué LM de EG, d'après la solution 2 du problème (*g*), page 22. Conséquemment, EN est aussi parallèle à LM, et (54) cette droite touche l'ellipse en E.

Solution 3 : Abaissez, de l'un des foyers, une perpendiculaire F'I sur la droite donnée LM (P. II, F. 18); décrivez de l'autre foyer F, avec le grand axe AB pour rayon, un arc qui coupe F'I; joignez le centre F à l'intersection I, et par le point H où FI rencontre la courbe, tracez une parallèle à LM.

Démonstration : La parallèle GHE est effectivement tangente à l'ellipse, car elle se trouve d'équerre, comme LM, sur F'I; le triangle F'HI est symétrique, puisque HI = FI — FH = AB — FH et que F'H = FH + F'H — FH = AB — FH; conséquemment, l'angle F'HE = EHI = FHG (57).

Probl. (*d*) : *Tracer, perpendiculairement à une droite donnée, une tangente de l'ellipse.*

Solution 1 : Tirez deux cordes quelconques GE, IH perpendiculaires à la droite donnée RS (P. I, F. 28), puis achevez comme dans la solution 1 du problème précédent.

Solution 2 : Tirez une corde HK perpendiculaire à la droite donnée RS (P. I, F. 31), puis achevez comme dans la solution 2 du problème précédent.

Solution 3 : Menez, par l'un des foyers, une parallèle F'I à la droite donnée NP (P. II, F. 18), puis achevez comme dans la solution 3 du problème précédent, en observant de tracer GHE perpendiculairement à NP ou à F'I.

Solution 4 : Tracez d'abord une tangente KL parallèle à la droite donnée UV (P. II, F. 19), en employant une des trois solutions du problème précédent; décrivez ensuite du centre O, avec un rayon BD, une circonférence; tirez le diamètre LOM et joignez M à K. La droite MK sera tangente à l'ellipse, perpendiculaire à KL, et par suite, à UV (62).

Probl. (*e*) : *Marquer le contact d'une droite donnée* KM *tangente à l'ellipse* (P. II, F. 19).

Tracez un diamètre parallèle à KM, et cherchez le conjugué de ce diamètre (probl. *g*, page 22); son intersection avec la tangente sera le contact demandé (54).

Tracé des ellipses tangentes à des droites.

69. Probl. (*a*) : *Tracer une ellipse qui touche une droite donnée* EN, *en un point désigné* E (P. I, F. 31).

Tirez de E une droite quelconque EG, et après avoir pris sur cette droite deux parties arbitraires, mais égales, EO, OG, menez par O une parallèle à EN. Si vous portez alors une longueur quelconque de O en L et en M, EG et LM seront diamètres conjugués d'une ellipse qui touchera EN en E (54), et vous tracerez la courbe en appliquant une des solutions du problème (*f*), page 38.

Observations : Si l'on donnait l'angle des diamètres conjugués, il faudrait que GEN égalât cet angle; mais le problème aurait encore une infinité de solutions.

Si le centre O était connu, vous devriez joindre E à O et prendre OG = OE.

Si les longueurs des diamètres conjugués étaient données, EG devrait égaler une de ces longueurs; OL et OM seraient chacun la moitié de l'autre, et LM passerait par le milieu de EG.

Le problème n'a plus qu'une solution, lorsque les longueurs des diamètres conjugués et leur angle sont assignés.

Probl. (*b*) : *Tracer une ellipse qui soit touchée par une droite* GE, *en un sommet* A *marqué sur la droite* (P. II, F. 19).

Élevez en A une perpendiculaire sur GE et achevez comme dans le problème précédent, en recourant au problème (*a*) ou au problème (*b*) du n° 53, pour le tracé de la courbe.

Observation : Le procédé est encore le même, quand le contact doit se faire à l'une des extrémités du petit axe. Dans les deux cas, le problème a une infinité de solutions.

Probl. (*c*) : *Tracer une ellipse qui touche deux droites d'équerre* EG, GH, *en des points* A, C, *extrémités des axes* (P. II, F. 19).

Menez par A et par C des parallèles à GH, EG. Le point O où elles se couperont sera le centre; AB double de AO sera l'un des axes; CD double de CO donnera l'autre, et vous pourrez employer, pour tracer la courbe, les solutions du problème (*a*) ou du problème (*b*), n° 53.

Probl. (*d*) : *Tracer une ellipse qui touche deux droites quelconques* PE, PN, *en des points marqués* E, N (P. II, F. 23).

Joignez E à N par une droite indéfinie; tirez dans l'angle EPN, deux droites quelconques PL, PM; d'un point M de l'une, tracez une droite MG qui aille couper le prolongement de EN; unissez par les droites LQ, MR, les intersections de PL, PM avec MG, EG; menez PS au croisement S de LQ, MR, et par la rencontre H de PS, EG, tracez les droites LH, MH; elles couperont PL, PM en des points I, K, et ces points, ainsi que L, M, appartiendront à l'une des ellipses qui peuvent toucher PE, PN en E et en N. Vous aurez donc, pour tracer cette courbe, six points et deux limites droites PE, PN (3). Au reste, nous verrons plus loin, au chapitre des ellipses circonscrites à des polygones, les moyens de trouver tous les points d'une ellipse qui doit passer par les cinq sommets d'un pentagone EIKLME.

Démonstration : Puisque la figure devient celle du n° 67, si l'on supprime les droites LQ, MR, PS, il suffit de faire voir que PH et PS doivent se confondre. Or la théorie des transversales apprend que le point T, conjugué de G, est déterminé soit par PH qui résulte du croisement de LI, MK, soit par PS qui résulte du croisement de LQ, MR, lorsque les droites IK, QR concourent au point G de MG. Donc, PH, PS passent toutes deux par T et ne forment qu'une seule droite PT.

NORMALES DE L'ELLIPSE.

70. *Toute normale de l'ellipse* (4) *fait des angles égaux avec les deux rayons vecteurs du point d'*INCIDENCE *où elle coupe la courbe.*

En effet, la normale HQ (P. II, F. 18) fait deux angles droits avec la tangente EG; les angles FHG, F'HE, formés par cette tangente et les rayons vecteurs FH, F'H, sont égaux (57); par conséquent, GHQ — FHG = EHQ — F'HE, ou bien FHQ = F'HQ.

71. *Toutes les normales d'une ellipse coupent le grand axe entre les foyers.*

Puisque la normale HQ d'un point quelconque de l'ellipse (P. II, F. 18) est bissectrice de l'angle FHF' des rayons vecteurs de ce point (70), elle ne peut sortir de cet angle, ni par conséquent en couper les transversales ailleurs qu'entre les côtés. Or, les côtés passent par les foyers. Donc, la transversale que forme le grand axe AB est nécessairement rencontrée par la normale HQ entre F et F'.

72. *Les quatre normales des extrémités des axes passent seules par le centre de l'ellipse.*

D'abord, ces quatre normales passent par le centre, puisqu'elles se confondent avec les axes, qui sont aussi perpendiculaires aux tangentes menées par leurs extrémités (56). Mais, si toute autre normale HQ (P. II, F. 18) passait par le milieu O de FF', le triangle FHF' serait symétrique, puisque la bissectrice d'un angle de triangle partage le côté opposé en deux parties proportionnelles aux deux autres côtés. Or, ce sont évidemment les seules extrémités du petit axe CD qui ont des rayons vecteurs égaux.

73. *Les normales de deux points* E, G *symétriquement placés par rapport à un axe, coupent cet axe en un même point* L *et sont égales* (P. II, F. 20).

Il suit du principe 59 que les triangles rectangles EIH, GIH, formés par les tangentes EH, GH, sont égaux; de leur égalité résulte celle des angles EHL, GHL. Conséquemment, les normales des points E, G forment des triangles rectangles égaux avec les tangentes et le grand axe; les hypothénuses de ces deux triangles sont égales, et le sommet L de l'un se confond avec le sommet correspondant de l'autre; de plus, EL = GL.

74. *Les normales qui concourent ailleurs que sur un axe sont inégales* (P. II, F. 24).

En effet, les tangentes HE, HG étant inégales (60), il s'ensuit que les normales LE, LG le sont aussi, car la même oblique LH ne s'écarte pas autant de la première que de la seconde.

75. *Les normales* EL, GL *de deux points symétriques par rapport au grand axe ont leur intersection* L *entre la corde* EG *de ces points et le centre* O *de l'ellipse* (P. II, F. 20).

La normale EL étant bissectrice de l'angle FEF′ des rayons vecteurs du point E (70), coupe FF′ en deux parties proportionnelles à ces rayons, de sorte que FL : F′L :: FE : F′E. Or FE est moindre que F′E; par conséquent, FL est aussi moindre que F′L, et le point L se trouve entre I et O, puisque FO = F′O (49).

76. *Les normales* EM, NM *de deux points symétriques par rapport au petit axe ont leur intersection* M *au-delà du centre* O *de l'ellipse, relativement à la corde* EN *de ces points* (P. II, F. 20).

Puisque EL coupe AB entre A et O (75), elle rencontre nécessairement CD au-delà de O relativement à EN (73).

Tracé des normales de l'ellipse.

77. PROBL. (*a*) : *Tracer une normale de l'ellipse, par un point donné sur la courbe.*

Solution 1 : Menez une tangente EH par le point donné E (P. II, F. 20); puis élevez une perpendiculaire EL sur cette tangente, au point de contact (4).

Solution 2 : Tirez les rayons vecteurs FH, F′H du point donné H (F. 18); puis tracez la bissectrice HQ de l'angle FHF′ (70).

PROBL. (*b*) : *Tracer une normale de l'ellipse, par un point* E *donné hors de la courbe* (P. II, F. 25).

Décrivez une circonférence dont le centre soit le point donné E, et le rayon, la distance de ce point au foyer F′ le plus voisin; décrivez ensuite un arc GH, de l'autre foyer F, avec le grand axe AB; tirez par F plusieurs rayons de cet arc; marquez les milieux I, I′, I″, I‴ des parties de rayon comprises entre GH et l'arc de la circonférence E dont la concavité regarde celle de GH; joignez ces milieux par une courbe II′I″I‴; le point K où elle coupera l'ellipse sera précisément le point d'incidence de la normale, de sorte qu'en joignant E à K, vous aurez la droite demandée.

Démonstration : La courbe auxiliaire $II'I''I'''$ est le lieu du milieu de chaque partie de rayon. Si donc l'incidence K de la normale EK forme le milieu de la partie LM du rayon FL, cette incidence se trouvera effectivement sur la courbe auxiliaire.

D'abord $KL = KF'$, car $FK + KL = AB$ et $FK + KF' = AB$. Ensuite, l'angle $EKM = EKF'$ (70) ; $EM = EF'$; par conséquent, les triangles EKM, EKF' sont égaux, et $KM = KF' = KL$.

Probl. (c) : *Tracer une normale de l'ellipse, par un point E' donné dans l'espace que renferme la courbe* (P. II, F. 25).

Appliquez la solution du problème précédent.

Démonstration : L'égalité de KM et de KF', qui vient d'être établie, rend égaux les triangles KNM, KNF', formés par la corde F'M du cercle E. La normale EE' coupe donc cette corde d'équerre et au milieu. Il s'ensuit que la circonférence décrite de E', avec E'F', passe par M ; que LM est la partie du rayon FL comprise entre GH et l'arc de E' dont la concavité regarde celle de GH, et que la courbe auxiliaire, déduite des rayons de la circonférence F, coupe LM en deux parties égales. On ferait voir d'ailleurs, comme tout-à-l'heure, que l'incidence K est le milieu de LM.

Applications : I. Le tracé des normales de l'ellipse est indispensable, lorsqu'on fait des voûtes surbaissées ou surhaussées, en berceaux dont cette courbe est la directrice. Les joints doivent être en effet des plans normaux de la surface cylindrique : s'ils ne formaient pas des coins droits avec les deux douelles courbes voisines, il serait à craindre que la pression exercée par les pierres, les unes sur les autres, n'écrasât la partie mince de celles qui présenteraient des coins aigus. Conséquemment, les droites égales qui représentent les joints sur l'épure, sont des normales à l'ellipse cintre du berceau.

La figure 26 (P. II) offre une voûte elliptique surbaissée. AB est le grand axe de l'ellipse ; CD, EF, etc., sont des normales qui montrent les directions des joints ; ACDGH, CDIFE, etc., forment les têtes des voussoirs. Pour avoir les points C, E, etc., par lesquels il faut mener des normales à l'ellipse, on divise le cintre en autant de parties égales qu'on veut de voussoirs.

La figure 27 est l'épure d'une voûte elliptique surhaussée. CD forme le petit axe ; les normales qui représentent les joints concourent deux à deux sur le grand axe AO (73) ; les divisions de l'ellipse se font comme précédemment.

Enfin, dans certains cas, la construction de ces sortes d'épures exige qu'une normale à l'ellipse soit menée par un point extérieur.

II. La réflexion des corps parfaitement élastiques, qui choquent une surface ou une ligne, se fait de manière que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, et ces angles sont ceux que fait la normale de la surface ou de la ligne au point frappé, avec les deux directions du corps choquant. Si donc un corps élastique part de l'un des foyers d'une ellipse et va heurter contre un point quelconque de la courbe, il doit revenir selon l'autre rayon vecteur de ce point, et par conséquent passer par l'autre foyer. Ainsi, sur un billard qui serait elliptique et dont les *mouches* seraient placées aux foyers, la bille qu'on enverrait de l'une de ces mouches contre la bande, serait renvoyée directement vers l'autre.

III. Ce qui vient d'être dit d'une bille doit se dire aussi de l'air en mouvement, car l'air est très-élastique, comme le prouvent les bonds du ballon dont s'amusent les enfants. Il s'ensuit que la meilleure place pour entendre un orateur qui se trouverait à l'un des foyers d'une salle elliptique, serait l'autre foyer: les vibrations que la voix imprimerait à l'air selon tous les rayons vecteurs du premier foyer, seraient reproduites, par le choc, selon les rayons vecteurs qui passeraient par le second.

Si, dans une semblable salle, quelqu'un placé à l'un des foyers parle tellement bas, qu'il ne puisse être entendu d'une personne placée vers le centre, il l'est néanmoins de celle qui se trouve à l'autre foyer, quand les parois sont propres à bien réfléchir le son.

Il existe des salles de spectacle dont la forme oblongue est presque elliptique. L'avant-scène où parlent les acteurs contient l'un des foyers. L'autre se trouve dans le parterre, sur le gand axe de la salle, à quelque distance du cintre. C'est donc vers ce point qu'il faut se placer pour bien entendre.

Si la salle, au lieu d'être oblongue, forme un demi-cercle, les acteurs sont à peu près au centre; les vibrations de l'air se font selon les rayons du cercle, qui sont aussi les normales de la courbe; le choc les reproduit exactement selon ces mêmes rayons, et tous les spectateurs placés à la même distance du centre, entendent aussi bien les uns que les autres. On voit par là que la forme circulaire est celle qui convient le mieux à une salle de spectacle, et en général à toute salle où l'on se réunit pour entendre un orateur.

COMBINAISONS DE L'ELLIPSE ET DES POLYGONES.

« Les combinaisons de l'ellipse et des polygones présentent quatre cas principaux. Il s'agit soit d'inscrire ou de circonscrire un polygone à une ellipse, soit de circonscrire ou d'inscrire une ellipse à un polygone donné. Chacun de ces cas se subdivise en plusieurs autres parmi lesquels nous choisirons les plus intéressants. »

« L'inscription et la circonscription des polygones irréguliers à l'ellipse ont peu d'utilité; mais celles de la courbe à ces polygones offrent de l'intérêt: la seconde opération revient à tracer une ellipse dont on connaît un certain nombre de points quelconques, et dans la première, il faut tracer une ellipse qui soit tangente à un certain nombre de droites données de position. Ces deux circonstances peuvent, on le sent bien, se présenter dans la pratique. Nous ne les considérerons toutefois qu'après nous être occupés des combinaisons de l'ellipse et des polygones réguliers ou des polygones irréguliers qui présentent quelque chose de remarquable : celles-là sont les plus importantes ; déjà plusieurs arts les emploient, et quand elles seront plus connues, on fera certainement un usage plus fréquent encore de quelques-unes. »

Polygones inscrits à l'ellipse.

78. *Deux cordes* CE, CG (P. II, F. 28) *qui, partant de l'extrémité de l'un des axes, font avec cette droite des angles de* 30°, *ont leurs autres extrémités* E, G *écartées d'une quantité égale à chacune d'elles, et forment un triangle équilatéral* CEG *inscrit à l'ellipse.*

Cela provient de la symétrie de la courbe par rapport à ses axes. En effet, les cordes CE, CG faisant le même angle avec le petit axe CD, sont symétriquement placées relativement à cet axe, et il en est de même de leurs points correspondants situés sur des parallèles au grand axe. Menons donc par E une de ces parallèles. Le point où elle rencontrera CG sera le symétrique de E et se trouvera aussi sur l'ellipse ; par conséquent, il se confondra avec l'extrémité G de CG, puisqu'une droite ne peut couper la courbe en plus de deux points (4 et 24). Ainsi, la corde EG est perpendiculaire sur CD ; les triangles CLE, CLG sont rectangles ; les angles E, G valent chacun 60°, comme l'angle ECG, et le triangle inscrit CEG est équilatéral.

79. *De tous les triangles équilatéraux qu'on peut inscrire à l'ellipse, le plus grand est celui dont un côté se trouve parallèle au grand axe.*

On l'appelle *triangle équilatéral maximum.*

En effet, le côté d'un autre triangle plus grand que CEG (P. II, F. 28) surpasserait CE, puisque les figures semblables se contiennent comme les quarrés numériques de leurs droites correspondantes. Or, transportez le système des deux cordes CE, CG partout ailleurs, en plaçant sur la courbe l'extrémité commune C et les deux autres extrémités E, G, leur angle sera toujours plus petit que ECG ou 60°, en raison de ce que la courbure de l'ellipse croît à mesure qu'on s'éloigne des extrémités du petit axe pour se rapprocher des sommets A, B. Comme deux cordes égales, plus grandes que CE, CG, et issues de la nouvelle position de C, formeraient un angle moindre encore, on doit conclure qu'aucun point de l'ellipse ne peut devenir le sommet d'un triangle équilatéral plus grand que celui dont le petit axe est un des axes de symétrie.

80. *De tous les triangles équilatéraux qu'on peut inscrire à l'ellipse, le plus petit est celui* BEG *dont un côté se trouve parallèle au petit axe* (P. II, F. 29).

On l'appelle *triangle équilatéral minimum.*

Un triangle équilatéral inférieur en superficie à BEG aurait un côté moindre que BE, puisque les figures semblables se contiennent comme les quarrés numériques de leurs droites correspondantes, et si l'on transporte le système des deux cordes BE, BG partout ailleurs, en plaçant sur la courbe l'extrémité commune B, ainsi que les deux autres E, G, elles formeront toujours un angle d'une indication supérieure à EBG ou à 60°, attendu que la courbure de l'ellipse décroît des sommets aux extrémités du petit axe. Comme deux cordes égales, plus courtes que BE, BG, et issues de la nouvelle position de B, formeraient un angle plus ouvert encore, il est clair qu'aucun point de l'ellipse ne peut devenir le sommet d'un triangle équilatéral plus petit que celui dont le grand axe est un des axes de symétrie.

PROBL. (*a*) : *Tracer le plus grand des triangles équilatéraux inscrits à l'ellipse.*

Portez une longueur arbitraire sur le grand axe, du centre O en H et en I (P. II, F. 28); puis, avec HI pour rayon, décrivez, de l'un des points H ou I, un arc qui coupe le petit axe ou son prolongement, et menez, par l'extrémité C de ce même axe, des cordes CE, CG, parallèles aux droites KH, KI. Il ne restera plus qu'à joindre les extrémités E, G de ces cordes (79), car le triangle CEG sera semblable à HIK, et par suite, équilatéral comme ce dernier.

PROBL. (*b*) : *Tracer le plus petit des triangles équilatéraux inscrits à l'ellipse.*

Portez une longueur arbitraire sur le petit axe, du centre O en H et en I (P. II, F. 29); puis, avec HI pour rayon, décrivez, de l'un des points H ou I, un arc qui coupe le grand axe ou son prolongement, et menez par l'extrémité B de ce même axe, des cordes BE, BG parallèles aux droites KH, KI. Si ensuite vous joignez les extrémités E, G de ces cordes, vous formerez le triangle BEG qui, semblable à HIK, sera le triangle demandé (80).

81. *Les droites qui joignent deux à deux les extrémités consécutives de deux diamètres quelconques* EG, HI (P. II, F. 30), *forment un parallélogramme inscrit à l'ellipse.*

En effet, les diamètres EG, HI sont les diagonales du quadrilatère EHGI, et parce qu'ils se coupent réciproquement en leur milieu O (32), cette figure est un parallélogramme.

82. *Tout parallélogramme* EHGI *inscrit à l'ellipse* (P. II, F. 30) *a ses lignes-milieux* KL, MN *sur deux diamètres conjugués.*

Les lignes-milieux, passant par l'intersection O des diagonales, sont les directions de deux diamètres (32), et comme chacune est parallèle à deux côtés du parallélogramme, c'est-à-dire à deux cordes parallèles que l'autre coupe par le milieu, les diamètres de mêmes directions sont conjugués (35).

83. *Il y a égalité de superficie entre tous les parallélogrammes inscrits dont les diagonales sont des diamètres conjugués.*

Tous les parallélogrammes inscrits à l'ellipse forment les projections de rectangles inscrits au cercle qui a produit la courbe, car ces rectangles sont les seuls quadrilatères inscrits qui puissent avoir leurs lignes-milieux sur des diamètres perpendiculaires (82 et 37); mais les parallélogrammes inscrits qui ont des diamètres conjugués pour diagonales, forment les projections de carrés inscrits au cercle, car ces carrés sont les seuls quadrilatères inscrits qui puissent avoir pour diagonales des diamètres d'équerre.

Ainsi, chaque parallélogramme est la troncature d'un prisme oblique, à base carrée, dont les arêtes parallèles sont formées par les lignes projetantes. Le volume de ce prisme égale le produit du carré multiplié par la moyenne des distances des quatre sommets de la troncature au plan de la base, et cette moyenne vaut la distance du centre de l'ellipse au même plan. Donc, le volume du prisme est constant, quel que soit le parallélogramme de sa troncature.

Considérons maintenant le même prisme comme ayant pour base le parallélogramme inscrit à l'ellipse et pour troncature le carré inscrit au cercle; il sera droit et son volume égalera l'aire du parallélogramme multipliée par la moyenne des quatre arêtes parallèles ou par l'axe, distance du centre de l'ellipse au centre du cercle. D'ailleurs, ce volume n'ayant pas changé dans le renversement, restera constant. Or l'axe, qui en est le second facteur, ne varie point avec les angles de la base. Donc, la supérficie de cette base ne peut varier non plus.

84. *De tous les parallélogrammes qu'on peut inscrire à une ellipse, ceux dont les diagonales sont des diamètres conjugués ont la plus grande superficie.*

Ils sont appelés *parallélogrammes maximums.*

Puisque ceux-là sont équivalents, il suffit d'en comparer un quelconque au parallélogramme EIGH (P. II, F. 30) dont les diagonales sont des diamètres non conjugués. Prenons, par exemple, le parallélogramme EPGQ qui a une diagonale commune avec EIGH, et dont l'autre diagonale PQ est le conjugué de EG. Les deux figures se contiennent comme les triangles EPG, EHG qui en sont les moitiés. Or, ces triangles ayant même base EG se contiennent comme leurs hauteurs, c'est-à-dire comme les distances de P et de H à la base commune EG. La distance de P à EG est celle de la tangente en P (54), et cette tangente passe au-dessus de H. Donc le triangle EPG se trouve plus grand que EHG.

Probl. (*a*): *Inscrire un parallélogramme quelconque dans une ellipse.*

Tirez deux diamètres EG, HI (P. II, F. 30) et quatre cordes qui joignent les extrémités de l'un à celles de l'autre. Il en résultera un quadrilatère EHGI, et cette figure sera un parallélogramme (81).

Probl. (*b*) : *Inscrire à l'ellipse un parallélogramme dont on connaît un côté.*

Portez ce côté comme corde sur la courbe, de E en H, par exemple (P. II, F. 30) ; tirez ensuite les diamètres EG, HI, et achevez comme dans le problème précédent.

Probl. (*c*) : *Tracer dans une ellipse un des plus grands parallélogrammes inscrits* (P. II, F. 30).

Tirez deux diamètres conjugués EG, PQ (41, probl. *f*), et achevez comme dans le problème (*a*).

85. *Le plus grand de tous les losanges inscrits à l'ellipse est celui qui a les axes pour diagonales.*

On le nomme *losange maximum.*

Puisque les axes se coupent d'équerre et par le milieu, le quadrilatère dont leurs extrémités forment les sommets est bien un losange. Il est d'ailleurs au nombre des plus grands parallélogrammes inscrits, attendu que les axes sont des diamètres conjugués (35). Enfin, on ne peut inscrire un autre losange de même superficie (83), par la raison qu'il n'y a qu'une paire de diamètres conjugués d'équerre (39).

Probl. (*a*) : *Inscrire à l'ellipse un losange quelconque.*

Tirez deux diamètres d'équerre EG, HI (P. II, F. 31), et joignez leurs extrémités. La figure EHGI est un losange inscrit, puisque ses diagonales se coupent d'équerre et par le milieu en O, centre de l'ellipse.

Probl. (*b*) : *Tracer dans une ellipse le plus grand des losanges inscrits.*

Tirez les axes AB, CD, et joignez leurs extrémités (P. II, F. 31).

Application : L'ellipse et son losange inscrit maximum sont employés pour décorer une foule de produits industriels.

86. *Le plus grand de tous les rectangles inscrits à l'ellipse est celui qui a pour diagonales les diamètres conjugués égaux.*

On le nomme *rectangle maximum.*

Le quadrilatère dont les sommets sont aux extrémités des diamètres conjugués égaux est en effet un rectangle, puisque ses diagonales sont égales et se coupent par le milieu. Il est d'ailleurs au nombre des plus grands parallélogrammes inscrits (84), et l'on ne peut inscrire un autre rectangle de même superficie, attendu que l'ellipse a une seule paire de diamètres conjugués égaux (39).

Probl. (*a*) : *Inscrire un rectangle quelconque à une ellipse.*

Tracez deux diamètres égaux quelconques EG, HI (41, probl. *e*) et joignez leurs extrémités (P. II, F. 32). Le quadrilatère inscrit EHGI sera un rectangle.

PROBL. (*b*) : *Inscrire à l'ellipse un rectangle dont on connaît un côté* (P. II, F. 32).

Portez la moitié du côté sur le grand axe, par exemple, du centre O en P et en Q; menez, par ces deux points, des parallèles au petit axe; tirez, de leurs intersections E, H avec la courbe, les diamètres EG, HI, et achevez comme dans le problème précédent.

PROBL. (*c*) : *Tracer dans une ellipse le plus grand de tous les rectangles inscrits.*

Tracez les deux diamètres conjugués égaux KL, MN (41, probl. *i*) et joignez leurs extrémités (P. II, F. 32). Le quadrilatère KMLN sera le rectangle demandé.

87. *On ne peut inscrire à l'ellipse qu'un seul carré.*

Le carré a ses lignes-milieux d'équerre, ainsi que ses diagonales; les premières sont égales, comme les secondes, et le croisement des unes se confond avec le croisement des autres. Mais, le carré inscrit doit avoir ses lignes-milieux sur des diamètres conjugués (82); elles sont donc sur les axes (39); par suite, ses diagonales sont des diamètres égaux qui se coupent d'équerre. Or, il n'y a qu'une seule paire de tels diamètres (41).

PROBLÈME : *Tracer le carré inscrit d'une ellipse.*

Solution 1 : Tracez les diamètres égaux et d'équerre (41, probl. *k*), puis joignez leurs extrémités.

Solution 2 : Portez sur le petit axe, du centre O en E, la corde AC du quart de l'ellipse (P. II, F. 33), et menez, par l'extrémité C du même axe, une parallèle CG à EA. La distance OG du centre à l'intersection G de cette parallèle et du grand axe sera la demi-ligne-milieu du carré inscrit. Si donc vous menez par G une parallèle à CD et que, par les points H, I où elle rencontrera la courbe, vous tiriez les diamètres HK, IL, le quadrilatère HIKL formera le carré demandé.

Démonstration : La construction donne OE : OC :: OA : OG et OE = AC. Il faut donc démontrer qu'en effet AC : OC :: OA : OG, si OG = GH moitié du côté du carré inscrit. Décrivons un demi-cercle sur le grand axe AB et prolongeons GH jusqu'à cet arc. Nous aurons d'abord OC′ : OC :: GH′ : GH (44) ou OA : OC :: GH′ : GO, ce qui montre qu'il y a similitude entre les triangles rectangles AOC, H′GO. Il en résulte AC : OC :: OH′ : OG. Or, OH′ = OA.

88. *Les concours des côtés opposés d'un quadrilatère inscrit à l'ellipse sont en ligne droite avec ceux des paires de tangentes menées par les sommets opposés.*

Soient le quadrilatère inscrit ABCD (P. III, Fig. 1) qui a E, F pour concours de ses côtés opposés, et les tangentes BG, DG menées par les sommets opposés B, D. Le concours G de ces tangentes se fera nécessairement sur la droite EF.

En effet, E est le concours des tangentes dont la corde des contacts est HI, partie de FK (67); F est le concours des tangentes dont la corde des contacts est LM, partie de EK, et la diagonale BD est la corde des contacts des tangentes qui concourent en G. Comme les trois cordes se croisent en K, ce pôle a une polaire qui passe par E, F, G (63), et par suite, ces trois points sont en ligne droite.

89. *Les côtés opposés de tout hexagone inscrit à l'ellipse donnent trois points de concours situés en ligne droite.*

Si les concours A, B, C (P. III, F. 2) des côtés opposés de l'hexagone inscrit DEFGHI sont effectivement en ligne droite, ils y seront encore quelle que soit la petitesse des côtés DE, GH, par exemple. Or, quand ces deux côtés se réduisent chacun à un seul point, AD, AH deviennent les tangentes AD′, AG′; l'hexagone se change en un quadrilatère D′FG′ID′, et ses côtés opposés donnent deux concours situés en ligne droite avec A (88). Donc, les trois concours fournis par l'hexagone sont aussi en ligne droite.

90. *On peut toujours obtenir* quatre *concours triples, en tirant convenablement* six *droites, par les intersections d'un côté quelconque de tout hexagone inscrit à l'ellipse avec les* cinq *autres et la diagonale qui donne deux quadrilatères, sans aboutir au premier côté.*

Cette proposition est vraie, si elle l'est pour le cercle, car en le projetant obliquement sur un autre plan, on obtiendra une ellipse et un hexagone inscrit; de plus, les projections des quatre concours triples seront aussi les concours des projections des droites qui les forment.

Soit donc l'hexagone ABCDEFA inscrit au cercle O (P. III, F. 3); prolongeons les trois côtés BC, AB, AF et la diagonale CF jusqu'au prolongement du côté DE; tirons, par les intersections G, H, D, trois concourantes quelconques GI, HI, DI; joignons les intersections E, K, à un point quelconque L de GI, et menons MP; cette dernière droite passera nécessairement par le croisement N de DI, LK, et nous aurons les quatre concours triples I, L, P, N.

Considérons d'abord le cas où la diagonale a la position CF′ parallèle à DE; la droite LK devient LK′, l'intersection M passe à l'infini, PM se change en PM′ parallèle à DE, et il faut démontrer que N′, intersection de PM′, DI, se confond avec celle de PM′, LK′. Nous indiquerons cette dernière par n et nous aurons à faire voir que $Pn = PN'$.

Les concourantes DI, HI, GI donnent

$$PQ : PN' :: GH : HD.$$

Les triangles GBH, GK′A sont semblables, parce que l'angle $GBH = CF'A = GK'A$, et

$$GH : GA :: GB : GK'.$$

D'ailleurs, les sécantes GA, GE fournissent l'égalité

$$GA \times GB = GE \times GD;$$

par suite,

$$GH : GD :: GE : GK', \quad \text{ou} \quad GH : GD - GH :: GE : GK' - GE,$$

$$\text{ou} \quad GH : HD :: GE : EK'.$$

Donc,

$$PQ : PN' :: GE : EK'.$$

Mais les concourantes K'L, EL, GL donnent

$$PQ : Pn :: GE : EK'.$$

Conséquemment,

$$PQ : PN' :: PQ : Pn,$$

$Pn = PN'$, et il y a en effet concours triple en N' comme en I, L, P.

Maintenant, faisons pivoter CF sur C et AF sur A, jusqu'à ce que F tombe sur E. La droite LK deviendra LE, la droite PM deviendra PE, et ces deux droites seront encore coupées au même point N'' par DI. Lorsque le mouvement aura porté F sur D, la droite LK sera confondue avec LD, PM avec PD, et DI les coupera encore au même point D. Ainsi, dans trois positions de CF, les droites DI, KL, MP donnent un concours triple, et par conséquent, cette circonstance a lieu pour toutes les autres positions.

91. *On ne peut inscrire dans l'ellipse aucun des polygones réguliers qui ont plus de quatre côtés.*

En effet, le cercle, pouvant toujours être circonscrit à un polygone régulier, couperait en plus de quatre points l'ellipse dans laquelle le même polygone serait inscrit, si ce polygone avait plus de quatre côtés. Or évidemment ces deux courbes ne peuvent avoir plus de quatre intersections.

Ellipses circonscrites aux polygones.

92. *Les trois sommets d'un triangle ne suffisent pas pour déterminer une ellipse.*

Un triangle peut être la projection d'une infinité de triangles différents situés dans des plans diversement inclinés sur le plan de projection. Ces triangles déterminent des cercles circonscrits fort différents aussi, dont les projections sont des ellipses très-variées, mais toutes circonscrites au triangle donné.

PROBL. (*a*) : *Circonscrire une ellipse à un triangle symétrique* ABC (P. III, F. 4).

Abaissez du sommet B, intersection des côtés égaux, une perpendiculaire BD sur le côté opposé; marquez le point E où elle est rencontrée par une perpendiculaire élevée au milieu d'un des autres côtés; prenez pour centre de l'ellipse un point quelconque de BD ou de son prolongement, mais autre que E qui donnerait un cercle;

puis tracez une ellipse qui ait, par exemple, BF pour axe et passe par A (53, probl. *c* ou *d*).

PROBL. (*b*) : *Circonscrire à un triangle équilatéral* ABC, *une ellipse dont il soit le triangle équilatéral maximum* (P. III, F. 4).

Abaissez d'un sommet quelconque B une perpendiculaire BD sur le côté opposé ; marquez-y le centre E du triangle ; prenez pour centre de l'ellipse un point G situé entre E et le milieu de BD ; puis tracez une ellipse qui ait 2BG pour petit axe et passe par A (53, probl. *d*). Le triangle aura son côté AC parallèle au grand axe et sera conséquemment le plus grand de tous les triangles équilatéraux inscriptibles (79).

PROBL. (*c*) : *Circonscrire à un triangle équilatéral* ABC, *une ellipse dont il soit le triangle équilatéral minimum* (P. III, F. 4).

Abaissez d'un sommet quelconque B une perpendiculaire BD sur le côté opposé ; marquez-y le centre E du triangle ; prenez pour centre de l'ellipse un point quelconque du prolongement de BE ; puis tracez une ellipse qui ait, par exemple, BF pour grand axe et passe par A (53, probl. *c*). Le triangle aura son côté AC parallèle au petit axe, et sera conséquemment le moindre de tous les triangles équilatéraux inscriptibles (80).

PROBL. (*d*) : *Circonscrire une ellipse à un triangle quelconque.*

Solution 1 : Décrivez une ellipse qui ait un des côtés pour l'un de ses axes et passe par le sommet opposé (53, probl. *c* ou *d*) ; mais cette construction donne un cercle, quand la distance du troisième sommet au milieu du côté pris pour axe égale la moitié de ce côté.

Solution 2 : Tirez, par deux sommets B, D du triangle ABD (P. III, F. 1), les concourantes quelconques BG, DG, et par leur intersection G, une transversale EF des côtés AB, AD ; joignez à D le point E où elle coupe AB, et à B le point F où elle coupe AD. La rencontre C de ED, FB sera un quatrième point de l'ellipse qui passera par A, B, D et touchera en B, D les concourantes BG, DG.

Vous obtiendrez d'autres points de l'arc elliptique BCD, en variant la direction de la transversale EGF ; puis vous achèverez la courbe au moyen de la solution du problème *h* (53).

Démonstration : Cette construction donne évidemment un quadrilatère ABCD dont les côtés opposés concourent sur la droite EF. Par conséquent (88), ce quadrilatère est inscriptible à une ellipse qui aura BG, DG pour tangentes.

Solution 3 : Donnez-vous à volonté un quatrième point C, placé de telle manière, par rapport aux sommets du triangle ABD (P. III, F. 1), qu'il forme un quadrilatère dont les côtés opposés soient concourants ; joignez leurs concours E, F ; menez d'un point quelconque G de EF des droites à deux sommets opposés B, D du quadrilatère ; tirez par G une autre transversale des côtés AB, AD, et achevez comme dans la solution précédente. Vous obtiendrez un cinquième point, puis autant d'autres que vous voudrez, qui seront tous situés sur un arc elliptique BCD tangent à BG, DG (88), et cet arc, prolongé à l'aide de la solution du problème *h* (53), passera aussi par A.

93. *Les quatre sommets d'un quadrilatère ne suffisent pas pour déterminer une ellipse.*

Le quadrilatère donné ABCD (P. III, F. 5) peut être considéré comme la base d'un prisme droit, et il est toujours possible de couper ce prisme, de plusieurs manières, selon un quadrilatère plan inscriptible dans un cercle, c'est-à-dire un quadrilatère dont les angles opposés fassent en somme 180°, comme dans celui que la figure représente rabattu sur le plan vertical, en A′B′C′D′.

Supposons, pour exemple, $A + C > 180$, $B + D < 180$; faisons passer le plan coupant par A, de façon qu'il soit au-dessus de la section droite, et nommons *a*, *b*, *c*, *d* les sommets qui dans le nouveau quadrilatère répondent aux sommets A, B, C, D. Evidemment, *ab*, *ad* seront plus près de AA′ que AB, AD, et *cb*, *cd* plus près de *c*C que CB, CD. Or, si le plan devenait vertical, comme AA′, les côtés *ab*, *ad* se confondraient avec cette droite; *cb*, *cd* se confondraient avec C′C, et les angles *a*, *c* seraient nuls. Ainsi, les angles A, C ont diminué en devenant *a*, *c* de la position inclinée du plan coupant, et ils diminueront de plus en plus, à mesure qu'augmentera l'angle de ce plan et du plan horizontal. On trouvera donc une position pour laquelle $a + c$ égalera 180°; alors $b + d$ sera aussi de 180°, puisque les quatre angles d'un quadrilatère donnent 360°, et la figure *abcd* pourra être inscrite dans un cercle.

Il en serait de même, si le plan coupant, contenant toujours A, passait au-dessous de la section droite, et si, contenant C, il passait soit au-dessus, soit au-dessous de cette section.

Menons maintenant un plan par la diagonale BD, de manière qu'il passe au-dessus de A et au-dessous de C. Les côtés *ba*, *da* seront plus près de BB′, DD′ que BA, DA; les côtés *bc*, *dc* seront plus près que BC, DC des prolongements de BB′, DD′. Or, si le plan coupant devenait vertical, comme ces deux dernières droites, *ba*, *da* se confondraient avec BB′, DD′; *bc*, *dc* se confondraient avec les prolongements des mêmes arêtes, et les angles *b*, *d* vaudraient chacun 180°. Ainsi, les angles B, D ont augmenté en devenant *b*, *d* de la position inclinée du plan coupant, et ils croîtront de plus en plus, à mesure qu'augmentera l'angle de ce plan et du plan horizontal. Il y aura donc une position où $b + d$ vaudra 180°; alors $a + c$ sera aussi de 180°, et le quadrilatère *abcd* se trouvera inscriptible au cercle.

Il en serait de même, si le plan coupant, contenant toujours BD, passait au-dessus de C et au-dessous de A.

Enfin, faisons passer le plan coupant par AB. Le côté AD se rapprochera de AA′, et l'angle A tendra vers 90°, sa valeur minimum; BC se rapprochera de BB′ et tendra aussi vers 90°, sa valeur maximum ; comme C est plus éloigné de AB que D, CC′ sera coupé plus haut que DD′, et par conséquent, tandis que CB, CD se rapprocheront à la fois de cC, DC se rapprochera de DD′, et DA, du prolongement de la même arête ; C tendra donc vers o, sa valeur minimum, et D, vers 180°, sa valeur maximum. Ainsi, A et C diminueront graduellement à la fois, B et D augmenteront graduellement aussi à la fois, à mesure que croîtra l'angle du plan coupant et du plan horizontal. Conséquemment, il y aura une position qui donnera

$$A + C = 180°, \quad B + D = 180°.$$

Or, il est sensible que la même chose arriverait, si le plan coupant passait par un quelconque des autres côtés de ABCD, et que les quadrilatères inscriptibles qui ont un côté commun avec cette figure, diffèrent non-seulement les uns des autres, mais encore de ceux qui n'ont qu'un sommet ou ~~une~~ diagonale de ABCD.

Ainsi, plusieurs sections obliques du prisme donnent des quadrilatères inscriptibles au cercle et différents ; les cercles circonscrits diffèrent par conséquent aussi, et il en est de même des projections de ces cercles qui ne peuvent avoir le même centre. Or, ces projections sont des ellipses circonscrites à la projection ABCD de tous les quadrilatères. Donc enfin, plusieurs ellipses différentes peuvent être circonscrites au même quadrilatère ; en d'autres termes, quatre points ou quatre conditions qui en tiennent lieu ne suffisent pas pour déterminer une ellipse.

PROBL. (a) : *Circonscrire une ellipse à un quadrilatère quelconque* ABCF (P. III, F. 3).

Solution 1 : Tirez arbitrairement une droite MG qui coupe en M, K, H, G les prolongements des côtés du quadrilatère ; marquez-y à volonté un point E situé entre les intersections de deux côtés opposés ; tracez deux concourantes quelconques GI, HI ; joignez un point L de la première à E et à K ; joignez M à l'intersection P de HI, LE ; et enfin joignez I au croisement N de MP, LK. Le point D où IN rencontrera MG appartiendra à une ellipse sur laquelle se trouveront aussi les cinq points A, B, C, F, E, car l'hexagone ABCDEF est inscriptible, puisque les quatre concours triples I, L, P, N se trouvent formés comme le veut le principe 90.

Tirant une autre transversale par E ou par D, vous déterminerez de la même manière un nouveau point de l'arc elliptique CDEF, et par suite, autant de points du même arc que vous en voudrez ; puis, avec cinq des points déjà connus, vous trouverez des points de la courbe situés entre A et F, entre A et B, etc., et finalement vous pourrez tracer à vue l'ellipse demandée.

Solution 2 : Pour obtenir les points de l'arc elliptique sous-tendu par un côté FI du quadrilatère DEFI (P. III, F. 2), vous pouvez marquer arbitrairement un point H ; mener par le concours B de EF, HI, une transversale quelconque AB des deux autres côtés, et joindre à F, H les rencontres A, C de AB avec DE, DI, de plan coupant passe par D, ou bien elle est parallèle à *bcde*, si le plan coupant passe par tout autre point de DD'. Mais les sections parallèles d'un prisme sont égales. Donc, tous les pentagones inscriptibles qui ont ABCDE pour projection, sont égaux et parallèles; il en est de même des cercles circonscrits, et par suite ils se projettent tous sur une ellipse unique circonscrite au pentagone donné.

Ainsi, une seule ellipse peut être circonscrite à un pentagone; en d'autres termes, cinq points ou cinq conditions qui en tiennent lieu suffisent pour déterminer une ellipse.

PROBL. (*a*): *Circonscrire une ellipse à un pentagone* DEFHI (P. III, F. 2).

Solution 1: Il suffit de déterminer les points des arcs elliptiques dont les côtés du pentagone doivent être les cordes. Proposons-nous, pour exemple, de marquer un de ceux de l'arc sous-tendu par FH. Il faudra prolonger les côtés EF, HI qui avoisinent FH; tirer par leurs concours B une transversale quelconque AB des deux autres côtés DE, DI, et joindre à F, H, les rencontres A, C, de AB avec DE, DI, de manière à former un croisement G; ce croisement sera un point de la courbe, car il achèvera un hexagone DEFGHI dont les côtés opposés auront leurs concours A, B, C sur une ligne droite (89),

Si la transversale AB se trouvait parallèle à DE par exemple, le point de concours A serait à l'infini, et AH devrait être une droite tirée de H parallèlement à AB.

On voit d'ailleurs qu'en menant par B d'autres transversales arbitraires, on déterminera autant de points de l'arc FGH qu'il en faudra pour qu'on puisse le tracer aisément à vue, et qu'en répétant, pour chacun des quatre autres côtés du pentagone, les opérations faites pour FH, on obtiendra successivement les cinq arcs de l'ellipse demandée.

Solution 2: Appliquez le problème *a* (93), en tirant par un sommet E (P. III, F. 3) une transversale quelconque MG des cinq côtés du pentagone ABCEF; vous trouverez un point D qui sera sur l'arc elliptique sous-tendu par CE, et en variant la position de MG autour de E, vous aurez d'autres points du même arc. Enfin, l'opération, répétée sur chacun des quatre autres sommets, déterminera les points des arcs elliptiques sous-tendus par les quatre autres côtés.

PROBL. (*b*): *Déterminer des points d'une ellipse arbitraire à tracer autour d'un obstacle.*

Solution 1: Marquez à volonté cinq points D, E, F, H, I (P. III, F. 2) autour de l'obstacle, et appliquez le problème précédent.

Solution 2: Marquez à volonté, autour de l'obstacle, quatre points A, B, C, F (F. 3); cherchez, au moyen d'alignements pris sur ces points, les rencontres des côtés du quadrilatère avec une transversale arbitraire MG, et achevez comme dans la première solution du problème *a* (93).

96. *On ne peut circonscrire une ellipse à aucun des polygones réguliers qui ont plus de quatre côtés.*

En effet, ces polygones seraient inscrits à la courbe, ce qui ne saurait avoir lieu (91). Ainsi, les tracés du numéro précédent et celui du n° 98, feraient trouver un cercle, s'ils étaient appliqués aux polygones réguliers.

97. *On ne peut pas toujours circonscrire une ellipse à un hexagone irrégulier donné.*

Puisque cinq points suffisent pour déterminer une ellipse, il y a une ellipse unique qui passe par cinq sommets consécutifs de l'hexagone. Or, le sixième peut se trouver donné hors de cette courbe ou en dedans.

98. *Une ellipse peut être circonscrite à tout hexagone irrégulier dont les côtés opposés ont leurs concours en ligne droite.*

Considérons l'hexagone DEFGHI qui se trouve dans ce cas (P. III, F. 2). Une ellipse peut être circonscrite au pentagone DEFGH; si elle ne passe pas par I, elle coupera CD en un autre point I', et sera circonscrite à l'hexagone DEFGHI'. Le point B' concours de EF et de I'H serait donc sur AC (89). Or cela est impossible, car EF ne peut avoir que le point B de commun avec AC.

PROBLÈME: *Circonscrire une ellipse à un hexagone irrégulier* DEFG'HI *dont les côtés opposés ont leurs concours en ligne droite* (P. III, F. 2).

Tirez une diagonale FH qui retranche de l'hexagone un triangle FG'H; puis, appliquant le ploblème *a* (95), cherchez des points G de l'ellipse circonscrite au pentagone DEFHI; cette courbe passera nécessairement par le sixième sommet G' de l'hexagone donné.

Polygones circonscrits à l'ellipse.

99. *Les droites qui, dans tout triangle circonscrit à l'ellipse, joignent chaque sommet au contact opposé, se croisent au même point.*

Le triangle est la projection d'un triangle circonscrit au cercle qui a produit l'ellipse; les trois droites sont les projections de celles qui, dans le triangle circonscrit au cercle, joignent aussi les sommets aux contacts opposés. Si donc les premières se croisent au même point, il en doit être de même des dernières, car le croisement des unes ne peut être que la projection de celui des autres. Ainsi, nous avons à faire voir que les droites qui, dans un triangle ABC circonscrit au cercle (P. III, F. 7), joignent chaque sommet au contact opposé, se croisent en un seul point D, ou bien que si du croisement D de deux quelconques AE, BF, on tire une droite au troisième sommet C, elle passera nécessairement par le contact opposé G.

Supposons que CD aboutisse à un point G' de AB. Comme trois concourantes, menées par les intersections de trois droites qui se coupent deux à deux, forment sur ces droites six parties telles que le produit de trois parties séparées égale celui des trois autres, nous aurons

$$AG' \times BE \times CF = BG' \times CE \times AF,$$

et puisque $CF = CE$,

$$AG' \times BE = BG' \times AF, \quad \text{ou} \quad AG' : BG' :: AF : BE.$$

Mais, parce que $AG = AF$ et $BG = BE$,

$$AG : BG :: AF : BE.$$

Il faut donc qu'on ait

$$AG' : BG' :: AG : BG.$$

Or, cette proportion exige que G' se confonde avec G, car pour peu qu'il en soit écarté vers B ou vers A, AG' se trouvera plus grand ou plus petit que AG, et au contraire BG' se trouvera plus petit ou plus grand que BG.

100. *De tous les triangles équilatéraux circonscrits à l'ellipse, le plus grand a un de ses côtés parallèles au petit axe, et le plus petit a un de ses côtés parallèle au grand axe.*

Le principe est vrai, s'il est démontré que la position du triangle équilatéral circonscrit EGH (P. III, F. 8), dont le côté EG se trouve parallèle au petit axe CD, le rend plus grand que le triangle équilatéral circonscrit IKL qui a son côté IK parallèle au grand axe AB; car tout autre triangle équilatéral circonscrit, approchant plus de cette position que IKL, surpassera évidemment celui-là, et plus voisin de la position de IKL que EGH, il sera inférieur en superficie à ce dernier.

Pour faire voir qu'on a toujours $EGH > IKL$, nous supposerons que le premier triangle égale le second et que ses côtés EH, GH seulement sont tangents à l'ellipse, puis nous rabattrons sur le plan vertical le cercle O' dont l'ellipse O est la projection. Le triangle IKL sera la projection du triangle $I'K'L'$ circonscrit au cercle, dont le côté $I'K'$ est parallèle à AB, et $I'K'L'$ se trouvera symétrique, parce que les angles $I'L'D'$, $D'L'K'$ seront égaux. Le triangle EGH sera aussi la projection d'un triangle symétrique $E'G'H'$, dont les côtés $E'H'$, $G'H'$ touchent le cercle, car $E'G'$ doit être d'équerre sur $A'H'$ comme EG l'est sur AH, et les angles $A'H'E'$, $A'H'G'$ sont égaux.

Je dis maintenant que chaque triangle symétrique égale sa projection multipliée par le rapport $\frac{AB}{CD}$ du grand axe au petit ou du diamètre $C'D'$ à CD. En effet, les triangles IKL, $I'K'L'$, par exemple, forment avec les droites projetantes II', KK', LL' un prisme triangulaire tronqué. Prenons IKL pour base; le tronc de prisme sera droit, et son volume vaudra

$$IKL\,\frac{II' + KK' + LL'}{3}.$$

Prenons I'K'L' pour base; le tronc sera oblique, et si d, d', d'' désignent les distances respectives des sommets I, K, L, au plan de I'K'L', le volume vaudra

$$\mathrm{I'K'L'}\,\frac{d+d'+d''}{3}.$$

Conséquemment,

$$\mathrm{I'K'L'}\,\frac{d+d'+d''}{3} = \mathrm{IKL}\,\frac{\mathrm{II'}+\mathrm{KK'}+\mathrm{LL'}}{3}.$$

Mais II' et d ou IM sont perpendiculaires, la première au plan de l'ellipse, la seconde au plan du cercle, et forment par conséquent le même angle que ces deux plans ou que C'D' et CD; de plus I'M, située sur le deuxième plan, est perpendiculaire à IM, comme l'est CD à la droite projetante de C'. Si donc on place D' sur D, le triangle rectangle C'CD est semblable au triangle rectangle I'MI, et

$$\mathrm{II'} : \mathrm{C'D'} :: \mathrm{IM} : \mathrm{CD} \quad \text{ou} \quad \mathrm{II'} : \mathrm{AB} :: d : \mathrm{CD} \quad \text{ou} \quad \mathrm{II'} = d\,\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}.$$

Des considérations analogues au précédentes établiraient que de même

$$\mathrm{KK'} = d'\,\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}, \qquad \mathrm{LL'} = d''\,\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}.$$

Ainsi

$$\mathrm{I'K'L'}\,\frac{d+d'+d''}{3} = \mathrm{IKL}\,\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}\,\frac{d+d'+d''}{3},$$

ou bien

$$\mathrm{I'K'L'} = \mathrm{IKL}\,\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}},$$

et pour les mêmes raisons,

$$\mathrm{E'G'H'} = \mathrm{EGH}\,\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}},$$

puisque aucune de ces raisons ne suppose la circonscription de triangles au cercle ou à l'ellipse. En conséquence, les triangle symétriques I'K'L', E'G'H' sont équivalents.

Or, tout polygone circonscrit au cercle vaut la moitié du produi de son contour et du rayon; de sorte que

$$\mathrm{I'K'L'} = (\mathrm{I'K'}+2\mathrm{K'L'})\,\frac{\mathrm{A'O'}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{E'G'H'} = (\mathrm{E'G'}+2\mathrm{H'E'})\,\frac{r}{2},$$

si r désigne le rayon inconnu du cercle inscrit dans ce triangle. Par conséquent,

$$(\mathrm{I'K'}+2\mathrm{K'L'})\,\frac{\mathrm{A'O'}}{2} = (\mathrm{E'G'}+2\mathrm{H'E'})\,\frac{r}{2}$$

ou

$$(\mathrm{I'K'}+2\mathrm{K'L'})\,\mathrm{A'O'} = (\mathrm{E'G'}+2\mathrm{H'E'})\,r.$$

Mais

$$I'K' = IK,\quad 2K'L' = 2\sqrt{(\overline{D'K'}^2 + \overline{D'L'}^2)} = 2\sqrt{\left(\frac{\overline{IK}^2}{4} + \overline{DL}^2\,\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}\right)},$$

et comme

$$\overline{DL}^2 = \overline{IL}^2 - \overline{ID}^2 = \overline{IK}^2 - \frac{\overline{IK}^2}{4} = \frac{3}{4}\overline{IK}^2,$$

on a

$$2K'L' = 2\sqrt{\left(\frac{\overline{IK}^2}{4} + \frac{3}{4}\overline{IK}^2\,\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}\right)} = IK\sqrt{\left(1 + 3\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}\right)},$$

puis

$$(I'K' + 2K'L')A'O' = A'O'\left[IK + IK\sqrt{\left(1 + 3\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}\right)}\right]$$
$$= A'O' \times IK\left[1 + \sqrt{\left(1 + 3\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}\right)}\right].$$

En outre,

$$E'G' = EG\,\frac{AB}{CD} = IK\,\frac{AB}{CD},$$

$$2H'E' = 2\sqrt{(\overline{A'H'}^2 + \overline{A'E'}^2)} = 2\sqrt{\left(\overline{AH}^2 + \frac{\overline{IK}^2}{4} \times \frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}\right)},$$

le point A′ n'étant pas supposé sur le cercle, ni le point A sur l'ellipse, et comme

$$\overline{AH}^2 = \overline{EH}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{IK}^2 - \frac{\overline{IK}^2}{4} = \frac{3}{4}\overline{IK}^2,$$

on a

$$2H'E' = 2\sqrt{\left(\frac{3}{4}\overline{IK}^2 + \frac{\overline{IK}^2}{4} \times \frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}\right)} = IK\sqrt{\left(3 + \frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}\right)},$$

puis

$$(E'G' + 2H'E')r = r\left[IK\frac{AB}{CD} + IK\sqrt{\left(3 + \frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}\right)}\right]$$
$$= r \times IK\left[\frac{AB}{CD} + \sqrt{\left(3 + \frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}\right)}\right].$$

Donc,

$$A'O'.IK\left[1 + \sqrt{\left(1 + 3\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}\right)}\right] = r.IK\left[\frac{AB}{CD} + \sqrt{\left(3 + \frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}\right)}\right]$$

ou bien

$$A'O'\left[1+\sqrt{\left(1+3\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}\right)}\right]=r\left[\frac{AB}{CD}+\sqrt{\left(3+\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}\right)}\right].$$

Or, si près de l'unité que soit le rapport $\frac{AB}{CD}$, le multiplicateur de r excède toujours celui de A′O′, ce dont il est facile de s'assurer en supposant, par exemple, $\frac{AB}{CD}=1,001$. Conséquemment, on a toujours aussi $r < A'O'$, et le contact de E′G′ avec le cercle inscrit au triangle E′G′H′ se trouve entre A′ et O′. Il s'ensuit que l'ellipse, projection de ce cercle, coupe AB entre A et O; que le triangle équilatéral EGH, supposé égal à IKL, ne peut toucher en A l'ellipse O, et que, pour la toucher en ce point, comme dans la figure, EGH doit avoir une superficie supérieure à celle de IKL.

Probl. (*a*) : *Circonscrire à l'ellipse un triangle équilatéral dont un point du contour est donné.*

Menez par le point une tangente à la courbe; construisez sur cette droite un triangle équilatéral quelconque; puis tracez des tangentes parallèles aux deux autres côtés.

Probl. (*b*) : *Circonscrire à l'ellipse le triangle équilatéral minimum.*

Tirez, par l'extrémité D du petit axe (P. III, F. 8), une perpendiculaire à cette droite; vous aurez une tangente (56). Prenez arbitrairement deux parties égales Di, Dk; décrivez de i, avec le rayon ik, un arc qui coupe le prolongement de CD; puis joignez à i et à k, le point l obtenu; vous aurez un triangle équilatéral ikl. Enfin, menez les tangentes IL, KL respectivement parallèles à il, kl (68, probl. c); le triangle équilatéral IKL sera la solution demandée.

Probl. (*c*) : *Circonscrire à l'ellipse le triangle équilatéral maximum.*

Tirez, par l'extrémité A du grand axe, une perpendiculaire à cette droite; vous aurez une tangente (56). Faites sur EG un triangle équilatéral quelconque, dont pourtant le troisième sommet soit un point de AB, et achevez comme dans le problème précédent.

101. *Les cordes qui joignent les contacts opposés d'un parallélogramme circonscrit à l'ellipse, sont des diamètres.*

Soit EGHI un parallélogramme circonscrit à l'ellipse O (P. III, F. 9), qui la touche aux points L, M, N, P. Il faut démontrer que LN, PM passent par le centre O, ou que OL, ON forment une seule droite. Or, comme tangentes, EG, HI sont parallèles aux conjugués des diamètres OL, ON (54). Réciproquement, ces conjugués leur sont parallèles, et par conséquent ils sont parallèles entre eux, puisque EG, HI sont supposées parallèles. Passant en outre tous deux par le centre O, ils se confondent. Ainsi, les diamètres OL, ON ont le même conjugué, et conséquemment ils ne forment qu'un seul diamètre LN (35). On verrait de même que PM passe par le centre.

102. *Le quadrilatère formé par les quatre contacts d'un parallélogramme circonscrit à l'ellipse, est un parallélogramme inscrit.*

Puisque les cordes des contacts opposés, LN, PM, sont des diamètres (P. III, F. 9), les cordes des contacts consécutifs, LM, MN, NP, PL, doivent être effectivement les côtés d'un parallélogramme (81).

103. *Les diagonales d'un parallélogramme circonscrit à l'ellipse sont dirigées selon des diamètres conjugués et selon les lignes-milieux du parallélogramme des contacts.*

Faisons voir d'abord qu'elles sont dirigées selon des diamètres, ou en d'autres termes, que les sommets opposés et le centre O de l'ellipse se trouvent en ligne droite (P. III, F. 9). On sait que OG divise la corde des contacts LM en deux parties égales (58); il en est de même de OI à l'égard de PN. Comme LM = PN, on a QM = PR, et le triangle OQM = ORP. Les angles MOG, POI sont donc égaux. Par suite, GOI est une ligne droite, comme POM. On démontrerait de même que E, O, H forment aussi une seule droite.

Ce qui vient d'être dit établit du reste que GI, EH passent par les milieux des côtés opposés du parallélogramme LMNP. Ainsi, la première est parallèle à MN, LP; la seconde, à LM, PN, et toutes deux satisfont à la définition des diamètres conjugués (35).

104. *Les diagonales du parallélogramme des contacts sont les lignes-milieux du parallélogramme circonscrit à l'ellipse, quand elles sont diamètres conjugués.*

Supposons que LN, PM soient conjugués (P. III, F. 9); les tangentes EG, HI seront parallèles à PM (54), et les tangentes GH, EI le seront à LN. Comme des parties de parallèles comprises entre parallèles sont de même longueur, EL = OP = IN, GL = OM = HN, et parce que OP = OM, on a EL = GL, IN = HN. Il serait aussi facile de voir que PM passe par les milieux de GH, EI.

105. *Il y a égalité de superficie entre tous les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse qui ont des diamètres conjugués pour lignes-milieux.*

Supposons que les droites LN, MP soient à la fois diamètres conjugués et lignes-milieux du parallélogramme circonscrit EGHI (P. III, F. 9). Comme lignes-milieux, elles ont leurs extrémités sur les côtés; ces extrémités sont donc les contacts, et les côtés opposés se trouvent parallèles les uns à LN, les autres à PM (104). Ainsi, les quadrilatères EPOL, LGMO, OMHN, NIPO sont des parallélogrammes égaux. Mais les côtés du parallélogramme des contacts en sont diagonales et partagent chacun en deux parties égales; il n'y en a évidemment qu'une moitié dans ce parallélogramme. Conséquemment, le parallélogramme circonscrit EGHI est double du parallélogramme inscrit LMNP.

Ainsi, *tout parallélogramme circonscrit à l'ellipse est double du parallélogramme des contacts, quand ce dernier a des diamètres conjugués pour diagonales.*

Or la superficie du dernier est constante (83); donc celle du premier l'est aussi.

106. *De tous les parallélogrammes qu'on peut circonscrire à l'ellipse, ceux dont les lignes-milieux sont des diamètres conjugués ont la moindre superficie.*

La démonstration revient à faire voir qu'un parallélogramme circonscrit EGHI (P. III, F. 10) qui a pour cordes des contacts opposés deux diamètres non conjugués KL, MN, est plus grand qu'un quelconque de ceux qui ont deux diamètres conjugués pour lignes-milieux.

Menons deux tangentes parallèles à KL; elles auront leurs contacts aux extrémités du conjugué PQ de ce diamètre (54), et le parallélogramme RSTU aura KL, PQ pour lignes-milieux (104). Or, sa partie RVITXGR est commune au parallélogramme donné EGHI. Reste donc à voir si la somme des triangles ERV, HTX, qui complètent le dernier, l'emporte en effet sur la somme des triangles IVS, GUX, qui complètent le premier. Ces quatre triangles étant semblables se contiennent comme les quarrés numériques de leurs côtés correspondants; on a RV > SV, TX > UX, parce que EI, GH, tangents en M, N, ne peuvent croiser RS, TU en leurs milieux P, Q; donc aussi ERV > IVS, HTX > GUX, ERV + HTX > IVS + GUX, et EGHI > RSTU.

PROBL. (*a*) : *Circonscrire à l'ellipse un parallélogramme dont un sommet E est donné* (P. III, F. 10).

Tirez par E deux droites EI, EU tangentes à la courbe, puis menez deux autres tangentes qui soient parallèles, l'une à EI, l'autre à EU; le quadrilatère EGHI formé par ces quatre tangentes sera le parallélogramme demandé.

PROBL. (*b*) : *Circonscrire à l'ellipse un parallélogramme dont un angle est donné.*

Solution 1 : Tracez une droite quelconque EI tangente à la courbe (P. III, F. 10); faites, en un point quelconque I' de EI, un angle EI'H' égal à l'angle donné; puis menez les tangentes HI, EG parallèles à H'I', et une tangente GH parallèle à EI.

Solution 2 : Tracez un diamètre quelconque MN, et deux tangentes EI, GH, par ses extrémités; tirez du centre O une droite PQ qui fasse avec EI l'angle donné; cherchez le conjugué KL du diamètre dirigé selon PQ, et menez par ses extrémités deux parallèles EG, HI à cette dernière ligne. Ces parallèles seront tangentes (54); elles formeront avec EI, GH, les mêmes angles que PQ, puisque EI, GH sont nécessairement parallèles, et conséquemment le quadrilatère EGHI sera le parallélogramme demandé.

PROBL. (*c*): *Circonscrire à l'ellipse un parallélogramme minimum.*
Tirez deux diamètres conjugués KL, PQ (P. III, F. 10), et menez par les extrémités de chacun deux parallèles à l'autre. Ces dernières droites seront tangentes à la courbe (54); le parallélogramme RSTU se trouvera circonscrit, et il sera un de ceux qui renferment la moindre superficie (106).

107. *Tout losange circonscrit à l'ellipse a ses diagonales sur les axes.*
Les diagonales d'un losange sont d'équerre; celles d'un losange circonscrit à l'ellipse sont sur des diamètres conjugués (103); ces diamètres doivent donc se couper à angles droits, et par conséquent ils sont axes de la courbe (39).

108. *Le losange circonscrit minimum d'une ellipse a ses côtés parallèles à ceux du losange inscrit maximum.*
Comme étant un des parallélogrammes circonscrits de moindre superficie, le losange circonscrit EFGH (P. III, F. 11) a pour lignes-milieux IK, LM, des diamètres conjugués (106). Ces diamètres sont égaux, puisque IK = FG, LM = GH, et que les côtés contigus FG, GH d'un losange ont même longueur. Or, les diamètres conjugués égaux sont parallèles aux cordes qui joignent les extrémités des axes (38), et ces cordes sont les côtés du losange inscrit maximum ACBD (84). Donc, les côtés de EFGH, qui, deux à deux, sont parallèles à ses lignes-milieux, se trouvent aussi parallèles aux côtés du losange inscrit maximum.

PROBL. (*a*): *Circonscrire à l'ellipse un losange quelconque.*
Solution 1: D'un point E, pris sur le prolongement du grand axe, menez deux tangentes EF, EH, et des points F, H où elles rencontrent le petit axe, tirez des droites FG, HG qui leur soient parallèles. Ces dernières lignes seront nécessairement tangentes aussi; elles se couperont en un point G du grand axe prolongé, et le quadrilatère EFGH qu'elles formeront sera un losange circonscrit.
Solution 2: Tirez deux diamètres IK, LM quelconques, mais égaux (41, probl. *e*), et par leurs extrémités, menez des tangentes à la courbe. Le quadrilatère EFGH que formeront ces tangentes, sera un losange.
D'abord, EFGH est un parallélogramme (54). Ensuite, les angles AOI, AOL sont égaux (40); OI = OL; le triangle rectangle OIN = OLN, et les contacts I, L sont symétriques. Par conséquent, FE, HF se coupent sur le grand axe (59). Des considérations

analogues montreraient que F, G, H appartiennent aussi au prolongement des axes. Ainsi, le parallélogramme EFGH a ses diagonales sur les axes (107).

PROBL. (*b*) : *Circonscrire à l'ellipse le losange minimum.*

Solution 1 : Tracez les diamètres conjugués égaux IK, LM (P. III, F. 11), et par les extrémités de chacun, tirez des parallèles à l'autre.

Solution 2 : Menez des tangentes parallèles aux cordes qui joignent les extrémités des axes.

APPLICATION : On a souvent besoin de ce tracé pour former les ornements de divers produits industriels.

109. *Tout rectangle circonscrit à l'ellipse a ses sommets sur la circonférence décrite du centre de la courbe, avec un rayon égal à l'une des cordes qui joignent les extrémités des axes.*

Les côtés d'un rectangle circonscrit forment quatre paires de tangentes dont les intersections sont les sommets, et ces intersections sont en effet sur la circonférence indiquée (62).

110. *Le rectangle circonscrit minimum d'une ellipse a pour contacts les extrémités des axes.*

D'abord, les tangentes menées par les extrémités des axes donnent un rectangle EFGH (P. III, F. 12), puisque deux sont perpendiculaires au grand axe, deux au petit (56), et que ces deux diamètres se coupent d'équerre (27). Ensuite, le même rectangle est au nombre des parallélogrammes de moindre superficie, puisque AB, CD, diamètres conjugués (35), sont évidemment ses lignes-milieux (106). D'ailleurs, aucun autre rectangle circonscrit ne peut avoir des diamètres conjugués pour lignes-milieux, car ces lignes doivent être d'équerre, et les axes sont les seuls diamètres conjugués qui forment des angles droits (39).

PROBL. (*a*) : *Circonscrire à l'ellipse un rectangle dont l'un des contacts* R *est donné* (P. II, F. 19).

Tracez par R une tangente ; décrivez une circonférence, du centre O de l'ellipse, avec un rayon égal à la corde AC comprise entre les axes ; menez deux diamètres du cercle par les intersections K, L de la tangente et de la circonférence ; joignez enfin les autres extrémités M, N de ces diamètres aux premières et l'une à l'autre. Le quadrilatère KLNM sera un rectangle circonscrit.

PROBL. (*b*) : *Circonscrire à l'ellipse le rectangle minimum.*

Menez par les extrémités de chaque axe, des parallèles à l'autre.

APPLICATIONS : Le tracé du rectangle minimum circonscrit à l'ellipse est assez souvent nécessaire au jardinier pour former des plates-bandes qui entourent une corbeille, au tailleur de pierres pour dégauchir le bloc sur lequel il a décrit un œil de bœuf, au marbrier pour sculpter des baguettes autour d'un écusson, et au tabletier pour encadrer le vide elliptique destiné à une glace ou à un portrait.

111. *On ne peut circonscrire à l'ellipse qu'un seul carré.*

Comme losange, le carré circonscrit doit avoir ses sommets sur les prolongements des axes (107); comme rectangle, il doit les avoir sur la circonférence lieu des intersections des paires de tangentes d'équerre (109); ces sommets sont donc les points où les axes prolongés rencontrent la circonférence, et puisqu'il ne peut y avoir plus de quatre rencontres entre cette courbe et deux droites, un seul carré est circonscriptible à l'ellipse.

PROBLÈME : *Tracer le carré circonscrit de l'ellipse.*

Décrivez une circonférence, du centre O, avec AC pour rayon (P. III, F. 12); prolongez les axes jusqu'à cette courbe; puis joignez deux à deux les intersections I, K, L, M.

112. *Les diagonales d'un quadrilatère circonscrit à l'ellipse passent chacune par le croisement des diagonales du quadrilatère des contacts et par le concours de deux côtés opposés.*

Le principe est vrai pour l'ellipse, s'il l'est pour le cercle, car la projection de toute droite qui passe par certains points contient nécessairement les projections de ces points. Soient donc le quadrilatère ABCD circonscrit au cercle (P. III, F. 13) et le quadrilatère EFGH des contacts. Il faut faire voir que les diagonales AC, BD du premier passent par les concours I, K des côtés opposés du second, et qu'elles se croisent au même point L que les diagonales EG, FH.

Le côté EH est une transversale du triangle ABD, et si l'on désigne par K′ sa rencontre avec BD,

$$AE \times BK' \times DH = EB \times DK' \times HA,$$

puisque toute transversale d'un triangle divise chaque côté en deux parties telles que le produit de trois parties séparées égale celui des trois autres. Mais AE = HA, comme tangentes issues du même point. Donc

$$BK' \times DH = EB \times DK'.$$

Le côté FG est une transversale du triangle BCD, et si l'on désigne par K″ sa rencontre avec BD,

$$BF \times CG \times DK'' = FC \times GD \times BK''.$$

Mais CG = FC. Donc

$$BF \times DK'' = GD \times BK'',$$

$$BF \times DK'' \times BK' \times DH = GD \times BK'' \times EB \times DK'.$$

Comme BF = EB et que DH = GD, il vient

$$DK'' \times BK' = BK'' \times DK', \quad \text{ou} \quad DK'' : BK'' :: DK' : BK',$$

$$\text{ou} \quad DK'' : BK'' - DK'' :: DK' : BK' - DK' \quad \text{ou} \quad DK'' : BD :: DK' : BD,$$

proportion qui montre que DK″ = DK′. Ainsi, EH, FG coupent BD au même point, ou bien BD passe par le concours K de EH, FG.

Considérant EF, GH comme transversales respectives des triangles ABC, ACD, on verrait de même que AC passe par le concours I des deux autres côtés du quadrilatère EFGH.

La seconde partie de la démonstration repose sur ce que les concours M, N des côtés opposés du quadrilatère circonscrit (F. 13 ou 14) sont sur la droite IK (88). Il s'ensuit effectivement que le point K est déterminé par BD, droite dont la position dépend du croisement de BM, DN, qui a lieu en A; que ce point K est conjugué d'un point quelconque de CI, et que OG : OF :: KG : KF. Mais, en vertu du croisement L des diagonales EG, FH, le point K est aussi le conjugué de tout point pris sur IL. Si donc O′ désigne la rencontre de IL, FG, O′G : O′F :: KG : KF. Par conséquent, OG : OF :: O′G : O′F, et cette proportion exige que O′ se confonde avec O, car autrement OG serait plus grand ou plus petit que O′G, tandis que O′F serait au contraire plus petit ou plus grand que OF. Ainsi, IC, IL coupent FG au même point O; ces droites n'en font qu'une, et AC passe par le croisement L.

Mais le point I peut être considéré comme déterminé par CA, droite dont la position dépend du croisement de CM, NA, qui a lieu en D. Ce point I est donc conjugué d'un point quelconque de BK, et parce que E, F sont sur les côtés de l'angle ABC, IE : IF :: EQ : QF. D'un autre côté, si l'on joint K au croisement L de EG, FH, et qu'on désigne par Q′ la rencontre de KL, IF, IE : IF :: EQ′ : Q′F. Conséquemment, EQ : QF :: EQ′ : Q′F, Q′ se confond avec Q, KL avec KB, BD passe par le croisement L, et enfin les diagonales du quadrilatère circonscrit se croisent au même point que celles du quadrilatère des contacts.

PROBLÈME : *Circonscrire à l'ellipse un quadrilatère dont les quatre contacts* E, F, G, H *sont donnés* (P. III, F. 14).

Solution 1 : Menez par chacun des contacts une tangente à la courbe.

Solution 2 : Tracez le quadrilatère des contacts EFGH; marquez les points de concours I, K des côtés opposés et le croisement L des diagonales; menez par E une tangente; joignez à F, H les points B, A où elle rencontre KL, IL; puis joignez à G, le point D où AH coupe KL. Les droites AD, DC, CB, seront tangentes comme AB, et ABCD formera le quadrilatère demandé.

113. *Il est impossible de circonscrire à l'ellipse un polygone régulier qui ait plus de quatre côtés.*

En effet, le cercle pouvant toujours être inscrit à un polygone régulier, aurait plus de quatre tangentes communes avec l'ellipse. Il arriverait donc que les deux courbes se confondraient, si elles avaient les mêmes contacts, ou qu'elles se couperaient en plus de quatre points, si leurs contacts étaient différents, ou qu'elles auraient plus de quatre points communs, si elles touchaient quelques côtés aux mêmes points et les autres en des points distincts. Or, ces trois circonstances sont également impossibles.

114. *Les trois diagonales qui divisent chacune en deux quadrilatères l'hexagone circonscrit à l'ellipse, se croisent en un seul point.*

Le principe est vrai pour l'ellipse, s'il l'est pour le cercle, car tout croisement dans cette dernière courbe a pour projection un croisement dans la première.

Soient donc l'hexagone irrégulier ABCDEF circonscrit à un cercle (P. III, F. 15), et les trois diagonales *principales* AD, BE, CF qui chacune divisent l'hexagone en deux quadrilatères. Il faut faire voir que la rencontre de BE, CF se fait sur AD.

Désignons par G l'intersection de AD, CF, par G' celle de BE, CF, et par G'' celle de AD, BE. Ces trois points se confondent, si la somme des angles AGF, FG'E, EG''D donne 180°. Pour déterminer cette somme, il suffit d'ôter de trois fois 180°, total des angles des trois triangles AFG, FEG', EDG'', les angles GAF, F, E, G''DE. Or, l'indication de

$$\text{l'angle GAF} = \frac{\text{IKM} - \text{HI}}{2} = \frac{\text{IK} + \text{KL} + \text{LM} - \text{HI}}{2},$$

$$\text{l'angle F} = \frac{\text{INK} - \text{IK}}{2} = \frac{\text{HI} + \text{HNM} + \text{LM} + \text{KL} - \text{IK}}{2},$$

$$\text{l'angle E} = \frac{\text{KNL} - \text{KL}}{2} = \frac{\text{IK} + \text{HI} + \text{HNM} + \text{LM} - \text{KL}}{2},$$

$$\text{l'angle G''DE} = \frac{\text{HKL} - \text{LM}}{2} = \frac{\text{HI} + \text{IK} + \text{KL} - \text{LM}}{2};$$

par conséquent,

$$\text{GAF} + \text{F} + \text{E} + \text{G''DE} = \frac{2\text{IK} + 2\text{KL} + 2\text{LM} + 2\text{HI} + 2\text{HNM}}{2}$$

$$= \text{HKM} + \text{HNM} = 360° = 2 \times 180°,$$

$$\text{et} \quad \text{AGF} + \text{FG'E} + \text{EG''D} = 3 \times 180° - 2 \times 180° = 180°.$$

115. *Dans tout pentagone circonscrit à l'ellipse, la droite qui joint un sommet au contact opposé passe par le croisement des diagonales que donnent les quatre autres sommets.*

Il suffit de démontrer le principe pour le cercle, car tout croisement qui s'y fait doit avoir un autre croisement pour projection sur le plan de l'ellipse.

Soient le pentagone ABCDE circonscrit à un cercle (P. III, F. 16), la droite AF qui joint le sommet A au contact du côté opposé CD, et les deux diagonales croisées BD, CE qui joignent chacune deux des quatre autres sommets. Il faut établir que AF passe par le croisement G.

D'un point H pris sur le prolongement de AF, menons deux tangentes HI, HK jusqu'à la rencontre des côtés voisins BC, DE. Le pentagone sera changé en un hexagone circonscrit ABIHKE dont les trois diagonales principales se croiseront au même point L (114). Si maintenant nous augmentons l'angle H en écartant ses côtés, sans qu'ils cessent de toucher le cercle, le sommet H se rapprochera de F; les contacts M, N se rapprocheront de ce sommet et s'en rapprocheront également, puisque HM = HN constamment; I, K glisseront vers C, D, et le croisement L descendra le long de AH, sans pouvoir quitter cette droite, puisque l'hexagone circonscrit existera toujours et que AH ne cessera pas d'en être une diagonale principale. Le croisement se fera donc encore sur AH, quand l'angle H différera extrêmement peu de 180°, et par conséquent, il n'y a pas de raison pour qu'il s'écarte de cette droite au moment même où l'angle H vaudra précisément 180°. Or alors H, M, N se confondront avec F, attendu que HI, HK formeront la droite CD; l'hexagone sera devenu pentagone circonscrit, et le point L parvenu en G sera le croisement de AF avec les diagonales BD, CE.

On donne encore plus de force à cette démonstration, en ajoutant que les angles HOP, HPO deviennent nuls ensemble. Cela est vrai effectivement, s'ils sont égaux, car leur relation ne saurait s'altérer. Or toutes les tangentes au cercle font le même angle avec l'élément dont une extrémité est le contact (17); et HOP, HPO, angles extérieurs des deux triangles OMF, PNF, valent chacun deux angles faits par des tangentes sur l'élément du cercle.

116. *Les cinq quadrilatères que donnent les prolongements des côtés d'un pentagone circonscrit à l'ellipse, forment, par le croisement des diagonales de chacun, un autre pentagone dont chaque côté prolongé contient deux contacts.*

Soit le pentagone circonscrit ABCDE (P. III, F. 17). Il donne les quadrilatères ABCF, BCDF′, CDEF″, DEAF‴, EABF$^{\text{iv}}$; leurs diagonales respectives se croisent aux points G, G′, G″, G‴, G$^{\text{iv}}$, et les côtés du pentagone GG′G″G‴G$^{\text{iv}}$ passent chacun par deux des contacts H, I, K, L, M.

En effet, si H est un contact déterminé par le croisement N et la droite DN (115), OH donne le contact M, et le croisement G fournit les contacts I, K (88 et 112). Mais O$^{\text{iv}}$H doit aussi donner I, et le croisement G$^{\text{iv}}$, les contacts L, M. Ainsi, MG passe par I, IG$^{\text{iv}}$ passe par M, et par conséquent, G, G$^{\text{iv}}$ se trouvent sur la droite IM.

On ferait voir d'une manière analogue que GG′ passe par H, K; G′G″ par I, L; G″G‴ par K, M, et G‴G$^{\text{iv}}$ par H, L.

Ellipses inscrites aux polygones.

117. *Trois tangentes, qui forment un triangle, ne suffisent pas pour déterminer l'ellipse.*

La démonstration est analogue à celle du principe 92, car un cercle est déterminé quand il doit toucher trois droites qui se coupent deux à deux.

PROBL. (*a*) : *Inscrire une ellipse quelconque à un triangle* ABC (P. III, F. 18).

D'un point D pris à volonté, menez une droite au sommet C de l'angle dans lequel se trouve ce point, et une autre droite DE qui coupe deux côtés du triangle; faites un croisement F et joignez B à F pour déterminer le point G conjugué de D. Si maintenant vous tirez une droite DH qui coupe les deux côtés du troisième angle A, que vous traciez IG jusqu'en K, AG jusqu'en L, puis KD et LM, vous formerez un quadrilatère ACLM dont les points I, H, K, N pourront être les contacts d'une ellipse inscrite, et par conséquent cette ellipse touchera en I, H, K les côtés de ABC.

En effet, D et G sont deux points conjugés, par suite de la manière dont le dernier a été déterminé à l'aide du premier; D est le concours de deux côtés opposés du quadrilatère IHKN et d'une diagonale de ACLM ; G est le croisement des diagonales du quadrilatère ACLM, et une de IHKN y passe. Donc le premier de ces deux polygones peut être circonscrit à une ellipse dont le second sera le quadrilatère des contacts (112) ; en outre, la seconde diagonale HN de ce quadrilatère doit passer par G.

Si l'on veut d'autres points de la courbe, par exemple un de ceux qui se trouvent entre I, H, il faut tirer par le sommet A une droite quelconque, prolonger jusqu'à cette droite KI, KH, puis joindre l'intersection O avec H et l'intersection P avec I. Le croisement Q de HO, IP sera un point de la courbe, car on forme ainsi un quadrilatère IKHQ dont les côtés opposés ont leurs concours O, P sur une droite où se trouve le concours A de deux tangentes menées par des sommets opposés H, I, et par conséquent ce quadrilatère doit être inscrit (88).

Ainsi, le premier tracé donne quatre contacts d'une ellipse inscrite au triangle ABC; le second fournit autant d'autres points qu'on peut en désirer, puisque pour en trouver d'autres analogues à Q, il suffit de varier la position de OP et d'opérer en C et en B comme en A; conséquemment, il sera toujours facile de tracer à vue, assez exactement, l'ellipse demandée.

PROBL. (*b*) : *Inscrire dans un triangle* ABC *une ellipse dont deux contacts* H, I *sont donnés* (P. III, F. 18).

La courbe est tout-à-fait déterminée, puisqu'elle doit satisfaire à cinq conditions (95) : toucher trois droites et passer par deux points assignés.

Agissez comme dans le problème précédent ; mais au lieu de tirer arbitrairement DH, prenez D sur le prolongement de la droite HI qui joint les contacts donnés.

PROBL. (*c*) : *Inscrire dans un triangle équilatéral donné* IKL

(P. III, F. 8), *une ellipse dont il soit le triangle équilatéral minimum* (100).

Construisez un triangle symétrique I'K'L' dont la base I'K' égale le côté de IKL, mais arbitraire du reste, et inscrivez-y un cercle O'. Abaissez LD perpendiculairement sur IK; cherchez une quatrième proportionnelle à D'L', DL, C'D', et portez-là de D en C, pour avoir le petit axe; élevez une perpendiculaire au milieu O de CD, et prenez OA = OB = O'A', pour avoir le grand axe AB; enfin tracez la courbe au moyen d'une des solutions du problème *b* (53).

Probl. (*d*) : *Inscrire dans un triangle équilatéral donné* EGH (P. III, F. 8), *une ellipse dont il soit le triangle équilatéral maximum* (100).

Construisez un triangle symétrique E'G'H' dont la hauteur A'H' égale celle de EGH, mais arbitraire du reste, et inscrivez-y un cercle O'; portez le rayon A'O' sur AH, de A en O, et de O en B. Vous déterminerez ainsi la position et la longueur du grand axe. Une droite CD menée par O parallèlement à EG donne la direction du petit axe; puis, pour en trouver la demi-longueur, il faut chercher une quatrième proportionnelle à A'E', AE, O'C'. Cela est fondé sur ce que des droites parallèles, telles que A'E', O'C', se contiennent comme leurs projections AE, OC.

Ayant les axes AB, CD de la courbe demandée, vous n'aurez plus qu'à employer une des solutions du problème *b* (53).

118. *Quatre tangentes ne suffisent pas pour déterminer une ellipse.* Les quatre tangentes forment le quadrilatère ABCD (P. III, F. 19), qui se trouvera circonscrit quand l'ellipse sera tracée. Ses côtés opposés donnent les concours M, N, et ses diagonales AC, BD vont couper MN en I, K. Si l'on tire de I une transversale quelconque IF du triangle ABC, et qu'on joigne ses intersections E, F au croisement L des diagonales du quadrilatère, il en résulte, sur les côtés AD, CD, deux points H, G tels que GH aboutit en I et que EH, FG concourent en K; les quadrilatères EFGH, ABCD satisfont donc aux conditions nécessaires pour qu'une ellipse touche les côtés du second aux sommets du premier (112). Mais, puisque IF a été tirée arbitrairement, on peut tracer une autre transversale I*f*, et faire un quadrilatère *efgh*, comme a été fait EFGH. Une ellipse qui passerait par les sommets *e*, *f*, *g*, *h* pourrait donc toucher en ces points les côtés de ABCD, et il en serait de même des ellipses circonscrites aux quadrilatères que donneraient toutes les transversales de ABC qui peuvent être tirées de I. Comme toutes ces courbes sont évidemment différentes, on voit qu'une foule d'ellipses peuvent être inscrites au même quadrilatère.

Probl. (*a*) : *Inscrire une ellipse quelconque à un quadrilatère* ABCD (P. III, F. 20).

Marquez les concours E, F des côtés opposés, l'intersection G de EF avec une au moins des diagonales du quadrilatère, et arbitrairement le point H du côté AB, pour un des quatre contacts; tirez GH jusqu'à sa rencontre en I avec BC; joignez H, I au croisement K des diagonales de ABCD. Les points L, M où HK, IK rencontreront CD, AD seront deux autres contacts, et I sera le quatrième, car le croisement des diagonales du quadrilatère circonscrit aura lieu sur celui des diagonales du quadrilatère des contacts (112).

Pour trouver d'autres points de la courbe, par exemple un de ceux de l'arc IL, vous tracerez par G une droite quelconque et vous marquerez ses intersections N, O avec la tangente AB et le côté HM opposé à IL; puis vous joindrez N au sommet L, l'opposé de H, et O au sommet I qui sépare ces deux-là; la rencontre P de LN, IO sera un point de l'ellipse inscrite au quadrilatère ABCD et circonscrite au quadrilatère HILM.

En effet, le contact H peut être considéré comme un point double, c'est-à-dire comme la réunion de deux sommets situés sur l'ellipse, et il s'ensuit que HHIPLM est un hexagone inscrit, car les côtés opposés HH et LP, MH et PI, IH et LM ont leurs concours sur une droite GN (89).

On trouverait de la même manière d'autres points de IL et des points situés sur les arcs LM, MH, HI.

Probl. (*b*) : *Inscrire à un quadrilatère une ellipse dont un contact est connu.*

La seule différence qu'il y ait entre ce problème et le précédent, c'est qu'au lieu de marquer arbitrairement un point de contact sur un des côtés du quadrilatère, il faut joindre G avec le point donné H (P. III, F. 20).

119. *De toutes les ellipses inscrites à un parallélogramme, la plus grande en superficie est celle qui a les lignes-milieux pour deux de ses diamètres conjugués.*

Dans la dernière E, le losange circonscrit minimum L (108) équivaut au parallélogramme donné (105); dans une quelconque E′ des premières, le losange minimum L′ est moindre que le même parallélogramme (106). Conséquemment, on a L > L′. Mais ces losanges sont les projections de deux carrés circonscrits aux cercles qui produisent les ellipses E, E′, et les projections de ces cercles doivent avoir évidemment une relation de grandeur analogue à celle des projections des carrés. Donc aussi, E > E′.

Probl. (*a*) : *Inscrire une ellipse quelconque dans un parallélogramme* EGHI (P. III, F. 9).

Tirez les diagonales EH, GI; leur croisement O donnera le centre de toutes les ellipses inscriptibles (103). Marquez arbitrairement sur EG, un des contacts L, et tracez le diamètre LO jusqu'à sa rencontre avec HI; cette rencontre N sera un autre contact (101). Menez par L la droite LM parallèle à EH; cette droite formera un des côtés du parallélogramme des contacts (103) ; son intersection M avec GH donnera le troisième contact, et le diamètre MO fournira le quatrième P.

Si PM se trouve parallèle à EG, ce diamètre est le conjugué de LN (54), et vous pouvez appliquer le problème *f* (53). Dans le cas contraire, menez de P une parallèle à EG, jusqu'à la rencontre de LN; cette parallèle sera une demi-corde parallèle au conjugué de LN, et vous pourrez appliquer le problème *g* (53).

Probl. (*b*) : *Inscrire à un parallélogramme* EGHI *l'ellipse maximum* (P. III, F. 9).

Marquez les milieux L, M de deux côtés contigus EG, GH ; menez par ces points des parallèles aux mêmes côtés, pour avoir les lignes-milieux LN, MP du parallélogramme ; considérez ces lignes comme diamètres conjugués, et appliquez le problème *f* (53).

Probl. (*c*) : *Inscrire une ellipse quelconque dans un losange* EGHI (P. III, F. 21).

Solution 1 : Appliquez le problème *a*.

Solution 2 : Tirez du sommet E une hypothénuse quelconque EK dans l'angle droit EOG des diagonales ; elle représentera le côté du losange qui, circonscrit à un cercle, se projette sur le losange donné. La perpendiculaire OL donne le contact L de ce cercle et le rayon. Donc, la distance OA étant prise égale à OL, détermine le grand axe AB, et LM parallèle à IK marque les contacts M, N de l'ellipse projection du cercle. Pour avoir le petit axe CD, il faut prendre OP = OK et mener par A une parallèle à PG, car il en résulte OA : OC :: OP : OG, et conséquemment OC est la projection du rayon du cercle perpendiculaire à EH, comme OG est celle de OK. Le problème *b* (53) peut donc être appliqué. On obtient d'ailleurs facilement les deux autres contacts : il suffit de prendre OQ′ = OQ et de mener par Q′ une parallèle à GI (59).

Probl. (*d*) : *Inscrire dans un losange* EFGH *l'ellipse maximum* (P. III, F. 11).

Solution 1 : Appliquez le problème *b*.

Solution 2 : Agissez comme dans la solution 2 du problème *c*, mais en prenant OP = OG, pour tirer l'hypothénuse GP ; car le losange qui, circonscrit au cercle, se projette sur le losange circonscrit minimum EFGH, est un carré, attendu que les lignes-milieux IK, LM, étant des diamètres conjugués (106), sont les projections de diamètres du cercle qui se coupent à angles droits (37).

Application : Le losange et son ellipse maximum inscrite sont fréquemment employés dans l'ornement des lambris, des meubles, des plafonds, des grilles, etc., etc.

Probl. (*e*) : *Inscrire dans un rectangle* EFGH *l'ellipse maximum* (P. III, F. 12).

Tracez les lignes-milieux AB, CD, et les prenant pour axes, appliquez le problème *b* (53).

Application : I. Les jardiniers ont à inscrire des ellipses dans des rectangles, quand ils tracent des parterres ou qu'ils forment des corbeilles dans des boulingrins.

II. L'exécution des ouvertures ou baies qu'on appelle *œils de bœuf* dans les édifices, exige parfois l'inscription d'une ellipse à un rectangle.

III. Le marbrier confectionne des écussons elliptiques qui souvent doivent être enchassés dans des cadres rectangulaires.

IV. Il arrive au tabletier d'avoir à évider un cadre selon une ellipse inscrite à un rectangle.

Probl. (*f*) : *Inscrire une ellipse quelconque dans un carré* IKLM (P. III, F. 12).

Circonscrivez une circonférence au carré ; inscrivez à cette courbe un rectangle quelconque EFGH dont pourtant les côtés soient parallèles aux diagonales du carré ; puis appliquez le problème *e*. L'ellipse inscrite au rectangle le sera aussi au carré, puisque les sommets des deux figures sont sur une même circonférence dont le rayon OF = BC, l'autre diagonale du rectangle OBFC (62).

Probl. (*g*) : *Inscrire à un carré l'ellipse maximum.*

Cela revient à l'inscription du cercle, car les lignes-milieux du carré, qui sont d'équerre, doivent être diamètres conjugués de la courbe (119) ; les diagonales, qui sont aussi d'équerre, donnent les directions de deux autres diamètres conjugués (103), et la circonférence seule peut avoir plusieurs paires de diamètres conjugués rectangulaires (39).

120. *Il est impossible d'inscrire l'ellipse à un polygone régulier qui a plus de quatre côtés.*

Supposons l'inscription faite ; le polygone régulier serait circonscrit à la courbe ; or, un tel polygone ne peut l'être (113). Il s'ensuit que tous les tracés suivants, étant appliqués aux polygones réguliers, fourniraient un cercle au lieu d'une ellipse.

121. *Cinq tangentes suffisent pour déterminer une ellipse.*

Les cinq tangentes données forment, en se coupant deux à deux, un pentagone ABCDE (P. III, F. 22) ; car, si deux tangentes voisines se trouvaient parallèles, on pourrait les considérer comme concourant à l'infini. Menons les diagonales, AC, BE par exemple, qui lient les extrémités de chaque côté aux deux sommets voisins, et joignons à leur croisement F, le sommet D opposé à ce côté. Nous obtiendrons ainsi cinq points G, H, I, K, L qui détermineront complètement une ellipse (93). Or ces cinq points, satisfaisant à la condition des contacts d'un pentagone circonscrit (115), sont ceux où l'ellipse

GHIKL touchera les cinq droites données, et aucune autre ellipse ne pourrait les toucher ailleurs.

PROBLÈME : *Inscrire une ellipse dans un pentagone* ABCDE (P. III, F. 22).

Solution 1 : Tirez des diagonales des extrémités de chaque côté aux deux sommets voisins, comme AC, BE; joignez le croisement de ces paires de diagonales au sommet qui est opposé au côté, comme F à D l'opposé de AB; la rencontre du côté et de la droite de jonction sera un contact de l'ellipse (115). Ainsi, les points G, H, I, K, L, obtenus de cette façon, sont ceux où la courbe doit toucher les côtés respectifs du pentagone donné, et l'on peut appliquer le problème *a* (95).

Solution 2 : Cherchez les points de contacts G, H, I, K, L comme ci-dessus; puis marquez arbitrairement un point P de l'une BD des diagonales; joignez ce point aux extrémités A, E du côté opposé à la diagonale dans le quadrilatère ABDE qu'elle forme, et marquez les intersections Q, R des droites de jonction EP, AP avec les deux autres côtés du pentagone. La droite QR sera une tangente, car les trois diagonales principales BD, AR, EQ de l'hexagone ABQRDE se croisent au point P, et par conséquent cet hexagone sera circonscrit à l'ellipse qui contiendra G, H, I, K L (114).

Répétant la même opération avec chacune des autres diagonales du pentagone donné, vous aurez dix tangentes et cinq points de contact, ce qui suffira bien au tracé de la courbe. On peut même trouver les contacts des cinq tangentes analogues à QR, au moyen du principe 115 : il suffit de considérer les pentagones circonscrits tels que ABQRE.

Solution 3 : Prolongez deux côtés séparés AE, CD, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en F (P. III, F. 17), et marquez le croisement G des diagonales AC, BF du quadrilatère ABCF; déterminez aussi le concours F′ des côtés séparés AB, DE, et marquez le croisement G′ des diagonales du quadrilatère BCDF′; déterminez encore le concours F″ de AE, BC, et marquez le croisement G″ des diagonales du quadrilatère CDEF″. La droite GG′, prolongée par les deux bouts, donne les contacts H, K; G′G″ fournit les contacts I, L, et en tirant IG on obtient le cinquième contact M (116). Le tracé se termine ensuite comme dans la première ou la seconde solution.

122. *On ne peut pas toujours inscrire une ellipse à un hexagone irrégulier.*

Puisque cinq tangentes suffisent pour déterminer une ellipse (121), il y a une ellipse unique qui touche cinq côtés consécutifs de l'hexagone ABQRDE (P. III, F. 22) ou qui est inscrite au pentagone ABCDE. Or le sixième côté QR peut être donné plus près ou plus loin de C que la position où il est tangent à la courbe.

123. *Une ellipse peut être inscrite à tout hexagone irrégulier dont les trois diagonales principales se croisent au même point.*

Considérons l'hexagone ABQRDE qui se trouve dans ce cas (P. III, F. 22). Une ellipse pourra être inscrite au pentagone ABCDE, et si QR ne se trouvait pas tangente, il existerait une tangente parallèle à cette droite, laquelle couperait BC, CD en des points Q',R' différents de Q, R. L'hexagone ABQ'R'DE serait donc circonscrit, et ses diagonales principales Q'E, R'A devraient couper la troisième BD au même point (114). Supposons $Q'R' > QR$; le point P, croisement de BD, QE, RA, se trouvera entre Q'E, R'A, au-dessous de leur croisement, et ces deux droites ne pourront couper BD au même point. Il en sera de même dans l'hypothèse de $Q'R' < QR$, car P se trouvera évidemment encore entre Q'E, R'A, mais au-dessus de leur croisement.

PROBLÈME : *Inscrire une ellipse à un hexagone irrégulier* ABQRDE *dont les trois diagonales principales se croisent en un seul point* P (P. III, F. 22).

Prolongez deux côtés BQ, DR que sépare un seul côté QR. Vous formerez un pentagone ABCDE, et il suffira d'appliquer à ce pentagone le problème du n° 121, pour obtenir une ellipse tangente aussi à QR.

COMBINAISONS DE L'ELLIPSE ET DE LA CIRCONFÉRENCE.

L'ellipse et la circonférence sont combinées quand il existe entre elles une certaine dépendance. Alors elles se trouvent sur des plans différents ou sur le même plan, et dans le second cas, elles se coupent ou elles se touchent ou bien encore le cercle est osculateur de l'ellipse (16).

Ellipse et cercle de plans différents.

124. *Toute section faite dans une surface cylindrique circulaire, droite ou oblique, par un plan qui coupe toutes les génératrices droites, sans être parallèle à la base, produit* généralement *une ellipse, et alors cette courbe se trouve liée à la circonférence de la base, par la surface cylindrique.*

Nous disons *généralement,* parce que la Géométrie élémentaire enseigne qu'une telle section, faite sous un certain angle, dans la surface cylindrique circulaire et oblique, donne une circonférence.

La courbe étant la projection cylindrique du cercle de la base sur le plan de la section, doit être une ellipse, d'après tout ce qui a été dit jusqu'ici, et notamment d'après la définition générale du n° 24.

Si l'on veut une démonstration directe, nous supposerons que le plan coupant rencontre selon CE le plan de la base (P. III, F. 23). Cette trace est nécessairement perpendiculaire à un certain diamètre

AB du cercle. Soit CD la trace du même plan coupant sur celui du parallélogramme ABB'A' formé par les deux diamètres parallèles AB, A'B' et les deux génératrices droites AA', BB'. La droite FG parallèle à AB est sur ABB'A' la trace d'un plan parallèle à la base, et ce plan coupe la surface cylindrique selon un cercle qui a FG pour diamètre. Le croisement K de CD, FG appartient aux deux plans coupants, et par suite à leur intersection HI. Cette droite HI et CE sont parallèles, comme intersections de deux plans parallèles FG, AB coupés par un troisième CD, et en conséquence HI est d'équerre sur le diamètre FG, de même que CE l'est sur AB. Si donc H, I sont les points où HI rencontre la circonférence,

$$\mathrm{HK} = \mathrm{KI} \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{HK}}^2 = \mathrm{FK} \times \mathrm{KG}.$$

Mais HI se trouvant dans le plan CD est aussi une corde de la courbe produite par ce plan, et DL passe par le milieu K de cette corde. On verrait de même, en menant par un point quelconque K' des parallèles à FG, HI, que DL passe par le milieu de la corde H'I'. Ainsi cette droite DL est un diamètre de la courbe due au plan CD.

Maintenant les triangles semblables FKL, ACL donnent la proportion

$$\mathrm{FK} : \mathrm{AC} :: \mathrm{LK} : \mathrm{CL},$$

et les triangles semblables ACL, GKD fournissent cette autre proportion

$$\mathrm{KG} : \mathrm{AC} :: \mathrm{DK} : \mathrm{CL}.$$

Conséquemment,

$$\mathrm{FK} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CL}}\,\mathrm{LK}, \quad \mathrm{KG} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CL}}\,\mathrm{DK}, \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{HK}}^2 = \frac{\overline{\mathrm{AC}}^2}{\overline{\mathrm{CL}}^2} \times \mathrm{LK} \times \mathrm{DK}.$$

Abaissant le plan FG jusqu'en un point quelconque K', nous trouverions de même pour toute autre demi-corde de la section faite par CD,

$$\overline{\mathrm{H'K'}}^2 = \frac{\overline{\mathrm{AC}}^2}{\overline{\mathrm{CL}}^2} \times \mathrm{LK'} \times \mathrm{DK'}.$$

Donc,

$$\overline{\mathrm{HK}}^2 : \overline{\mathrm{H'K'}}^2 :: \mathrm{LK} \times \mathrm{DK} : \mathrm{LK'} \times \mathrm{DK'}.$$

Ainsi, la courbe de la section est telle que les quarrés numériques des demi-cordes dues au diamètre DL ont même rapport que les produits des deux parties formées par chacune sur ce diamètre. Cette courbe est donc une ellipse qui a pour diamètres conjugués DL et une corde tirée par le milieu de DL, parallèlement à HI (46).

Remarque : La section faite dans une surface cylindrique circulaire, par un plan incliné sur la base, serait un cercle égal à cette base, si l'on avait $\frac{\overline{AC}^2}{\overline{CL}^2} = 1$; car il en résulterait

$$\overline{HK}^2 = LK \times DK \quad \text{ou} \quad LK : HK :: HK : DK,$$

et la relation AC = CL donnerait DL = AB, à cause des parallèles AL, BD. Mais alors le triangle ACL serait symétrique. L'ellipse ne se change donc en cercle que dans le cas où le plan coupant CD se trouve incliné de manière à rendre égaux les angles CAL, CLA.

Applications : Il faut tracer en ellipse le trou à percer dans un mur de cheminée pour y introduire obliquement un tuyau de poêle.

Quand une tour ronde est couverte d'un toit plan et incliné, les deux arêtes courbes qui terminent le manchon cylindrique par le haut, sont deux ellipses.

Une voûte de cave en plein cintre qui se trouve arrêtée par un mur oblique sur l'axe, a une ellipse pour ligne terminale.

Une descente de cave voûtée en plein cintre présente une ellipse à son orifice extérieur, si le plan vertical de son axe n'est pas perpendiculaire au mur. En terme d'art, la descente est dite *biaise* alors.

125. *Une ellipse et un cercle situés dans des plans différents, non parallèles, appartiennent à la même surface cylindrique, quand deux diamètres parallèles de ces courbes ont même longueur, que les conjugués de ceux-là se rencontrent, et qu'ils se contiennent comme les distances de leurs extrémités correspondantes au point de concours.*

Supposons égaux et parallèles les diamètres EG, E'G' d'une ellipse et d'un cercle situés dans des plans différents (P. III, F. 24). Les droites EE', GG' qui joignent les extrémités correspondantes, sont parallèles à la droite des centres OO'. Soit H le concours du conjugué IK de EG, et du diamètre I'K' perpendiculaire à E'G' dans le cercle. On a

$$IK : I'K' :: IH : I'H.$$

Ainsi, II' est parallèle à KK' ; II'K'K est un trapèze ; OO' est parallèle aux bases de ce trapèze ; ces bases sont parallèles à EE', GG', et la surface cylindrique circulaire I'K'K''I'' passe par les quatre points E, G, I, K de l'ellipse, ou renferme les deux diamètres conjugués EG, IK. Or le plan de l'ellipse coupe cette surface selon une courbe de même nature qui a aussi EG, IK pour diamètres conjugués (124). Ces deux courbes n'en font donc qu'une, puisque deux diamètres conjugués suffisent pour déterminer une ellipse (53, probl. *f*).

On peut, au reste, démontrer que des parallèles à OO' joignent les extrémités d'une corde *ik* tirée dans l'ellipse, parallèlement à IK, par un point quelconque *o* de EG, aux extrémités de la corde *i'k'* tirée dans le cercle, perpendiculairement à $E'G'$ et par un point o' tel que $O'o' = Oo$. En effet, si nous décrivions un cercle sur EG, dans le plan de l'ellipse, sa corde perpendiculaire en o à ce diamètre serait égale à $i'k'$, ou à $i''k''$, si les figures $i'o'oi''$, $o'k'k''o$ sont des parallélogrammes. Donc (43),

$$IK : I'K' :: ik : i''k'' \quad \text{ou bien} \quad IO : I'O' :: io : i''o,$$

ou encore

$$HO : HO' :: io : i''o, \quad \text{puisque} \quad IO : I'O' :: HO : HO'.$$

L'angle OHO' étant d'ailleurs égal à l'angle ioi'', il s'ensuit que les deux triangles $OO'H$, $ii''o$ sont semblables, que l'angle $oii'' = HOO'$, que ii'' est parallèle à OO', et que le point i se trouve sur $i'i''$. On verrait de même que k est sur $k'k''$ parallèle à OO', et l'on en conclurait que tous les points de l'ellipse appartiennent à la surface cylindrique circulaire $I'K'K''I''$.

126. *Toute ellipse peut être l'intersection d'une foule de surfaces cylindriques circulaires.*

Elle se trouve effectivement sur toutes les surfaces cylindriques qui ont chacune pour base un cercle convenablement incliné, dont l'un des diamètres est égal et parallèle à l'un de ceux de cette ellipse (125).

127. *Toute section faite dans une surface conique circulaire, droite ou oblique, par un plan qui coupe toutes les génératrices droites d'un seul côté du sommet, sans être parallèle à la base, produit* généralement *une ellipse.*

C'est pour cela que cette courbe est placée au nombre des sections coniques (23).

La trace CE du plan coupant sur le plan de la base est nécessairement perpendiculaire à un certain diamètre AB de cette base (P. III, F. 25). Soit CD la trace du même plan sur celui du triangle ASB formé par le sommet S du cône et les extrémités de AB. La droite FG parallèle à AB est, sur ASB, la trace d'un plan parallèle à la base, et ce plan coupe la surface conique selon un cercle qui a FG pour diamètre. Le croisement K de CD, FG appartient aux deux plans coupants et, par suite, à leur intersection HI. Comme les intersections de deux plans parallèles AB, FG coupés par un troisième CD sont parallèles, HI est parallèle à CE et perpendiculaire au diamètre FG du petit cercle. Si donc H, I sont les points où HI rencontre la circonférence,

$$HK = KI \quad \text{et} \quad \overline{HK}^2 = FK \times KG.$$

Mais HI, étant dans le plan CD, est aussi une corde de la courbe produite par ce plan, et DL passe par le milieu K de cette corde. On verrait de même, en menant par un point quelconque K' des parallèles à FG, HI, que DL passe par le milieu de la corde

H'I'. Ainsi cette droite DL est un diamètre de la courbe due au plan CD.

Maintenant, les triangles semblables FKL, ACL donnent la proportion

$$FK : AC :: LK : CL,$$

et les triangles semblables DGK, DBC fournissent cette autre proportion

$$KG : BC :: DK : DC.$$

Conséquemment,

$$FK = \frac{AC}{CL} LK, \quad KG = \frac{BC}{DC} DK, \quad \text{et} \quad \overline{HK}^2 = \frac{AC}{CL} \times \frac{BC}{DC} \times LK \times DK.$$

Abaissant le plan FG jusqu'en un point quelconque K', nous trouverions de même pour toute autre demi-corde de la section faite par CD,

$$\overline{H'K'}^2 = \frac{AC}{CL} \times \frac{BC}{DC} \times LK' \times DK'.$$

Donc,

$$\overline{HK}^2 : \overline{H'K'}^2 :: LK \times DK : LK' \times DK'.$$

Ainsi, la courbe de la section est telle que les quarrés numériques des demi-cordes parallèles, dues au diamètre DL, ont même rapport que les produits des deux parties formées par chacune sur ce diamètre. Cette courbe est donc une ellipse qui a pour diamètres conjugués DL et une corde tirée par le milieu de DL, parallèlement à HI (46).

Remarque : La section faite dans une surface conique circulaire par un plan incliné sur la base, serait un cercle plus grand ou plus petit que cette base, si l'on avait $\frac{AC}{CL} \times \frac{BC}{DC} = 1$; car il en résulterait

$$\overline{HK}^2 = LK \times DK \quad \text{et} \quad LK : HK :: HK : DK.$$

Mais alors on aurait aussi

$$\frac{AC}{CL} = \frac{DC}{BC}.$$

L'ellipse ne se change donc en circonférence que dans le cas où le plan coupant CD se trouve incliné de manière à rendre semblables les triangles ACL, BCD, ou égaux les angles ALC, B.

128. *La projection conique d'un cercle sur un plan incliné par rapport au sien est une ellipse.*

La projection n'est au fond que l'intersection du plan de projection et de la surface conique qui enveloppe le cercle. Or cette intersection est une ellipse (127).

Il suffirait même de faire observer que la seule différence d'une projection conique à une projection cylindrique consiste en ce que les droites projetantes partent, dans la première, d'un point situé à une distance finie du plan de projection, et que, dans la seconde, elles partent d'un point situé à une distance infinie du même plan, puisqu'elles sont parallèles; car il s'ensuit évidemment que les deux cas doivent donner des courbes analogues (24).

APPLICATIONS : I. La perspective d'un cercle est sa projection conique : le sommet du cône projetant se trouve au centre de la pupille du dessinateur. Il y a donc deux cas où cette perspective forme un autre cercle; celui où le tableau est parallèle au plan du cercle donné et celui où il coupe le cône SAB des rayons visuels (P. III, F. 25) de manière à rendre égaux les angles B, ALC. Dans toutes les autres positions que prend d'ordinaire le tableau relativement au plan du cercle, la perspective est une ellipse qui a pour diamètres conjugués la projection conique LD d'un diamètre AB tiré dans le cercle perpendiculairement à la trace CE du tableau sur le plan de ce cercle, et la projection conique d'une corde parallèle à la même trace. Le point O′ où cette corde coupe AB a sa perspective au milieu O de LD.

Les perspectives de AB et de la corde d'équerre en O′ donnent les axes, quand CE est perpendiculaire à CD, trace du tableau sur le plan ASB. Alors CE se trouve perpendiculaire à ce plan ASB. Ces circonstances ont lieu, par exemple, dans le cas où le cercle et le tableau forment des plans verticaux, tandis que l'œil S est placé à la hauteur de AB.

II. Lorsqu'un cercle AB, éclairé par le Soleil CD (P. III, F. 26), a son plan perpendiculaire à la droite des centres, il jette derrière lui une ombre conique circulaire ASB dont les génératrices droites SAC, SBD, etc., s'appuient sur la circonférence du cercle et sur celle du disque solaire. La surface conique est droite, parce que le Soleil est un globe, et que le cercle pourrait être remplacé par une sphère qui aurait son centre au concours E des perpendiculaires AE, BE élevées sur SC, SD. Mais, bien que le diamètre CD ait environ 320000 lieues, le sommet S n'est jamais très-voisin de AB, attendu qu'un intervalle de 34 millions de lieues sépare AB de CD. L'ombre portée par le cercle sur un plan A′B′ parallèle au plan AB et placé à une médiocre distance en arrière, formerait donc un autre cercle sensiblement égal au cercle AB, quoique un peu plus petit en réalité. Il en serait de même de l'ombre portée sur le plan A″B″, placé de manière que l'angle DB″F = C. Mais celle que recevrait tout autre plan A‴B‴ aurait pour contour une ellipse.

III. Tout cercle AB éclairé par la flamme d'une lampe ou d'une bougie jette derrière lui une ombre à fort peu près conique et circulaire (P. III, F. 27); mais le sommet S est alors situé à l'opposite de la flamme par rapport à AB; de sorte que l'ombre portée sur un plan quelconque surpasse l'objet en grandeur. Néanmoins, celle qui se peint sur un plan A′B′ parallèle au plan du cercle est encore un autre cercle. Il en est de même de celle qui tombe sur un plan A″B″ tellement placé que l'angle FB″G = SAB; et celle qu'on voit sur tout autre plan A‴B‴, a pour contour une ellipse.

129. *Pour qu'une ellipse et un cercle situés dans des plans différents, non parallèles, appartiennent à la même surface conique, il faut que deux diamètres parallèles* EG, E′G′ *de ces courbes* (P. III, F. 28) *aient des conjugués concourants* HI, H′I′, *et qu'après avoir projeté obliquement le diamètre concourant* HI *de l'ellipse sur celui du cercle* H′I′, *en joignant les extrémités* I, I′ *les plus éloignées du concours* K, *on trouve que le quarré du diamètre parallèle* EG *de l'ellipse, multiplié par le rapport* $\frac{KH}{KI}$ *de la plus courte et de la plus longue distance du concours aux extrémités du conjugué, égale le quarré de la projection* H″I′ *de ce conjugué, multiplié par le rapport* $\frac{KH'}{KI'}$ *des distances correspondantes du concours aux extrémités du diamètre concourant du cercle.*

En effet, l'égalité $\overline{EG}^2\frac{KH}{KI}=\overline{H''I'}^2\frac{KH'}{KI'}$ donne

$$\overline{EG}^2=\overline{H''I'}^2\times\frac{KH'}{KI'}\times\frac{KI}{KH}.$$

Mais HH″ étant parallèle à II′ fournit la proportion

$$H''I' : HI :: KI' : KI \quad \text{et l'égalité} \quad H''I'=HI\frac{KI'}{KI}.$$

Par conséquent,

$$\overline{EG}^2=HI\times H''I'\times\frac{KH'}{KH} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{EG}^2}{4}=HO\times O''I'\times\frac{KH'}{KH},$$

si OO″ est parallèle à II′. Menons par O une droite LM parallèle à H′I′ et terminée aux concourantes HH′, II′. Nous aurons

$$OM=O''I' \quad \text{et} \quad LO : KH' :: HO : KH \quad \text{ou} \quad LO=HO\frac{KH'}{KH};$$

puis, parce que $\frac{\overline{EG}^2}{4}=\overline{EO}^2$,

$$\overline{EO}^2=LO\times OM.$$

Or LM est le diamètre d'un cercle qui appartient à la surface conique SH′I′; EO est perpendiculaire à ce diamètre, comme sa parallèle E′G′ l'est à H′I′. Donc, en vertu de la valeur LO × OM du quarré de EO, ce demi-diamètre de l'ellipse est une demi-corde du cercle LM, et les points E, G de l'ellipse se trouvent sur la surface conique SH′I′.

Je dis maintenant que les extrémités N, P de toute autre corde menée dans l'ellipse, parallèlement à EG, sont sur la même surface conique. En effet, $\overline{NQ}^2 : \overline{EO}^2 :: HQ \times QI : HO \times OI$ (46), et si RT est tirée de Q parallèlement à LM, $HQ : HO :: RQ : LO$, $QI : OI :: QT : OM$, ce qui donne

$$HQ \cdot QI : HO \cdot OI :: RQ \cdot QT : LO \cdot OM, \quad \overline{NQ}^2 : \overline{EO}^2 :: RQ \cdot QT : LO \cdot OM,$$

puis

$$\overline{NQ}^2 = RQ \times QT,$$

puisque $\overline{EO}^2 = LO \times OM$. Donc, NQ perpendiculaire à RT est une demi-corde du cercle qui, ayant cette dernière droite pour diamètre, se trouve aussi sur la surface conique SH'I'.

130. *Toute ellipse peut être l'intersection d'une foule de surfaces coniques circulaires.*

Elle se trouve effectivement sur toutes les surfaces coniques circulaires dont les bases satisfont aux conditions du n° 129.

131. *Toute ellipse peut être l'intersection d'une surface cylindrique et d'une surface conique circulaires.*

Il en est ainsi évidemment lorsque la base de la première surface satisfait aux conditions du n° 125, et qu'en même temps celle de la seconde remplit les conditions du n° 129.

Cercles sécants de l'ellipse.

132. *Les intersections d'une ellipse et d'un cercle sont toujours en nombre pair.*

Soit EG, normale de l'ellipse O (P. III, F. 29), la plus courte distance du point E à la courbe. La circonférence décrite de E avec le rayon EG aura, comme l'ellipse, pour tangente au point G, une perpendiculaire élevée en ce point sur la normale. Les deux courbes se toucheront donc en G, milieu d'un élément commun. Mais augmentons le rayon du cercle, sans changer le centre E. L'élément de l'ellipse reste en G où il continue de se confondre avec celui de la tangente, tandis que l'élément correspondant du cercle passe en F où il se trouve parallèle à l'élément G. La tangente de l'ellipse devient donc corde du cercle; il y a deux arcs égaux de circonférence compris entre le point F et la tangente; cette droite est coupée en deux points par le cercle EF, et il arrive deux cas : ou l'ellipse se trouve comprise toute entière entre le cercle tangent et l'autre, ou elle a un arc en dehors de leur intervalle. Dans la première circonstance, le nombre des intersections de la courbe et du cercle EF est zéro, nombre pair; dans la seconde, ce nombre est nécessairement 2 ou 4, car l'ellipse sortie de l'intervalle des cercles doit y rentrer pour se fermer en G, et si après y être rentrée, elle en sortait de nouveau avant de se fermer, il faudrait évidemment qu'elle y rentrât une seconde fois.

On voit aussi par là qu'*entre deux intersections d'une ellipse et d'un cercle, il y a toujours le contact d'un cercle tangent de même centre que le cercle sécant, contact qui est le pied d'une normale abaissée du centre commun.*

133. *Un cercle coupe l'ellipse en deux points, quand son rayon surpasse une seule des normales qui peuvent être menées de son centre.*

Soit d'abord le cercle de rayon EF (P. III, F. 29) dont le centre est situé dans l'intérieur de l'ellipse. Comme son rayon surpasse la normale EG, il y a une intersection de chaque côté du point G (134); mais, comme le même rayon est moindre que les autres normales EH, EI, les pieds H, I de ces normales ne peuvent se trouver entre les extrémités d'un arc extérieur du cercle EF. Ce cercle n'ayant donc qu'un seul arc extérieur à l'ellipse, la coupe seulement en deux poitns.

Soit maintenant le cercle E' dont le centre est hors de la courbe. Il a nécessairement un arc intérieur, si son rayon E'F' surpasse la normale E'G'. Mais il n'a que celui-là et seulement deux intersections, car son rayon ne peut surpasser d'autres normales issues du centre, E'G' étant la seule qui puisse être menée du point extérieur E'.

Ainsi, *un cercle dont le centre est hors de l'ellipse, ne peut couper cette courbe qu'en deux points.*

134. *Un cercle coupe l'ellipse en quatre points, quand son rayon surpasse deux des normales qui peuvent être menées de son centre.*

Puisqu'il y a au moins deux normales issues du centre, ce point E'' se trouve nécessairement dans l'intérieur de l'ellipse O (P. III, F. 29). Or, l'excès du rayon E''F'' sur la normale E''G'' donne au cercle un arc extérieur du côté de G'', et deux intersections. L'excès du même rayon sur la normale E''H'' donne un second arc extérieur du côté de H'' et deux autres points d'intersection.

135. *Un cercle ne peut couper l'ellipse en plus de quatre points.*

S'il la coupait en plus de quatre points, il la couperait au moins en six (132), et les points d'intersection formeraient un hexagone ABCDEF (P. III, F. 30) inscrit à la fois dans l'ellipse O et dans le cercle. Or ce polygone serait la projection d'un autre hexagone A'B'C'D'E'F' inscrit dans le cercle O' qui, situé sur un plan incliné, a produit l'ellipse en se projetant selon des droites perpendiculaires au plan de cette courbe supposé horizontal. Tirons les diagonales A'D', B'E'. Nous formerons les deux angles égaux A'D'E', A'B'E' qui se projetteront sur ADE, ABE. Le premier, ayant ses côtés inclinés en sens contraires, surpasse ADE dont les côtés sont horizontaux; le second, ayant ses côtés inclinés dans le même sens, est moindre que ABE. Par conséquent, on a ADE $<$ ABE; les deux sommes F + ADE, F + ABE ne peuvent valoir aucune 180°; les deux quadrilatères ADEF, ABEF ne sont point inscriptibles à la fois dans un cercle, et les six sommets de l'hexagone ABCDEF inscrit à l'ellipse ne sauraient appartenir à la même circonférence.

PROBL. (*a*) : *Tracer un cercle de rayon donné qui coupe une ellipse en deux points marqués* A, B (P. IV, F. 1).

Décrivez des points A, B, avec le rayon donné, deux petits arcs qui se coupent en C, soit à droite de la corde AB, soit à gauche. Leur intersection sera évidemment le centre d'un cercle qui, décrit avec le rayon donné, passera par les points marqués sur la courbe. Le problème a donc toujours deux solutions.

PROBL. (*b*) : *Décrire un cercle qui coupe une ellipse en quatre points.*

Il faut que les quatre intersections forment un quadrilatère inscriptible dans une circonférence. Si donc elles ne sont pas données, tirez d'un point de l'ellipse deux cordes arbitraires AB, AC (P. IV, F. 2) ; faites en C, sur BC, un angle BCD égal à l'angle CAE que forme avec AC le prolongement de BA ; élevez en C, sur CD, une perpendiculaire, et du point F où elle coupe la perpendiculaire au milieu de BC, décrivez avec le rayon FC un cercle qui coupe l'ellipse ailleurs qu'aux points B, C. S'il ne donnait pas d'autres intersections que ces dernières, vous tireriez de nouvelles cordes du point A, afin d'obtenir un arc BGC capable de l'angle CAE, qui coupe l'ellipse en G. Menant alors les cordes BG, GC, vous auriez le quadrilatère ABGC dont l'angle G, égalant BCD ou CAE, formerait 180° avec BAC, et qui par suite serait inscriptible dans une circonférence. Il ne vous resterait donc plus qu'à élever une perpendiculaire au milieu d'un des côtés, de AC par exemple, et à décrire, du point où elle rencontrerait la perpendiculaire au milieu de BC, un cercle qui eût pour rayon la distance de l'intersection à un des sommets du quadrilatère ABGC.

PROBL. (*c*) : *Décrire un cercle qui coupe une ellipse en quatre points sommets d'un rectangle.*

Il suffit de prendre pour centre du cercle celui de l'ellipse, et un rayon plus grand que la moitié du petit axe, mais moindre que la moitié de l'autre (86).

PROBL. (*d*) : *Décrire un cercle qui coupe une ellipse aux quatre sommets du carré inscrit.*

Le centre est celui de l'ellipse, et le rayon égale une demi-diagonale du carré (87).

Ellipses sécantes du cercle.

136. Toute ellipse sécante d'un cercle se détermine par cinq conditions (95). Quand celles qui sont imposées se trouvent en

moindre nombre, l'opérateur se donne arbitrairement autant de choses qu'il en faut pour rendre la détermination complète.

PROBL. (*a*) : *Tracer une ellipse qui coupe un cercle* A *en deux points* B, C (P. IV, F. 3), *dont le centre* D *est marqué et dont on connaît la longueur du diamètre par lequel la corde* BC *des intersections est divisée en deux parties égales.*

Comme la courbe doit passer par les deux extrémités du diamètre donné, quatre points sont connus; la position du centre fait la cinquième condition; il n'y a rien d'arbitraire, et le problème ne comporte qu'une seule solution.

Joignez le milieu de BC au centre D; portez la demi-longueur du diamètre sur DE, de chaque côté du centre et à partir de ce point, pour marquer F, G qui doivent appartenir à la courbe; cherchez le conjugué HI de FG, au moyen de la demi-corde BE (41, probl. *g*); puis recourant au problème *f* (53), tracez l'ellipse FIGH; elle passera aussi par B, C, et satisfera à toutes les conditions imposées.

PROBL. (*b*) : *Tracer une ellipse qui coupe un cercle* A *en deux points* B, C (P. IV, F. 3) *et dont on connaît les longueurs de deux diamètres conjugués, ainsi que l'angle sous lequel l'un de ces diamètres partage en deux parties égales la corde* BC *des intersections.*

Tirez, par le milieu E de BC, une droite indéfinie EG qui fasse avec cette corde l'angle donné; vous aurez la direction de l'un des diamètres conjugués; celle de l'autre sera une parallèle à BC (35); mais pour mener cette parallèle et pour limiter les deux diamètres, il faut déterminer la position du centre de l'ellipse.

Décrivez un demi-cercle sur une droite H′I′ égale au diamètre qui doit être parallèle à BC; menez du centre D′ une droite D′F′ qui fasse avec H′I′ un angle égal à l'angle donné; prenez D′F′ égale à la moitié de l'autre diamètre; portez EC de D′ en K′; élevez sur H′I′ les perpendiculaires D′L, K′M; rapportez K′M sur D′L, par une parallèle à H′I′, puis de D′ en M′, par un arc de cercle, pour vous écarter de F′ suffisamment, et menez M′E′ parallèlement à I′F′; D′E′ sera la distance du centre de l'ellipse au milieu de la corde BC, et il vous restera à la porter sur EG, de E en D, à tirer par D une parallèle HI à BC, à prendre DF, DG, DH, DI égales aux demi-longueurs des diamètres, et à faire l'application du problème *f* (53). Il y a deux solutions, car D′E′ peut être porté aussi de l'autre côté de E, sur EG.

Démonstration : On peut facilement démontrer qu'en effet D′E′ est la distance du centre D de l'ellipse au milieu de la corde BC. La construction donne

$$D'F' : D'I' :: D'E' : D'M' \quad \text{ou} \quad D'F' : D'L :: D'E' : K'M.$$

Ainsi D′E′ est la demi-corde qui partirait de K′ et serait parallèle à D′F′, dans une ellipse dont D′F′, D′I′ seraient deux demi-diamètres conjugués (43). Menons CK parallèlement à EG. Nous aurons

$$DK = EC = D'K' \quad \text{et} \quad DF : D'L :: CK : K'M \ (43).$$

Donc CK = D'E'. Or CK = DE.

PROBL. (c): *Tracer une ellipse qui coupe un cercle en quatre points marqués* A, B, C, D (P. IV, F. 4) *et dont deux diamètres conjugués soient parallèles à deux côtés opposés* AB, CD *du quadrilatère.*

Chaque diamètre coupe au milieu la corde parallèle à son conjugué (35). Si donc vous tirez, du milieu de AB, EO parallèle à CD, puis du milieu de CD, FO parallèle à AB, l'intersection O sera le centre de l'ellipse demandée, OB la moitié d'un troisième diamètre, et il ne s'agira plus que de trouver le conjugué de OB. Prolongez à cette fin les côtés opposés du quadrilatère, et marquez leurs concours G, H; la droite GH sera aussi le lieu des concours de chaque paire de tangentes à l'ellipse, tirées par les sommets opposés du quadrilatère (88). Mais OI, qui passe par le milieu de la corde des contacts BD, concourt avec les deux tangentes des points B, D (58); par conséquent I est le point commun à ces tangentes; IB touchera l'ellipse cherchée, et OK parallèle à IB donne la direction du conjugué de OB (54). Il ne faut plus, pour le limiter et tracer l'ellipse, que tirer AL parallèle à OK, et appliquer le problème *g* (41). La courbe ainsi déterminée passera nécessairement par C, D comme par A, B, et remplira toutes les conditions imposées.

Cercles tangents à l'ellipse.

157. *Un cercle et une ellipse sont tangents l'un à l'autre quand ils ont la même tangente en un de leurs points communs.*

Considérons d'abord un cercle et une ellipse que sépare la tangente commune AB (P. IV, F. 5). Le contact C est le seul point du cercle qui soit sur AB : tous les autres sont à droite de cette tangente. Le même contact C est le seul point de l'ellipse qui puisse se trouver sur AB : tous les autres sont à gauche de cette tangente. Il est donc impossible que les deux courbes aient un second point commun, et par conséquent elles se touchent en C où elles ont la même normale qui est perpendiculaire à AB.

Si l'ellipse est touchée intérieurement en F par le cercle G, la tangente DE de la première courbe ne peut prendre que le point F de la seconde. Si c'était le cercle qui fût touché intérieurement par l'ellipse, la tangente de la circonférence ne pourrait prendre que le point F de l'autre courbe. Ainsi, dans les deux cas, l'ellipse et le cercle ont une tangente commune. Reste donc à démontrer la réciproque, c'est-à-dire qu'un cercle et une ellipse sont tangents, quand ils ont une tangente commune DE qui les laisse du même côté.

Or, il est toujours possible de décrire un cercle plus grand ou plus petit que le cercle donné, qui passe entre les deux courbes et par lequel l'ellipse soit touchée en F. Comme DE se trouvera tangente à cette ellipse et au cercle décrit, elle le sera aux deux cercles à la fois; les centres de ces cercles seront sur FG perpendiculaire à DE; le cercle décrit enveloppera le cercle donné ou en sera enveloppé, et puisque le premier n'aura que le point F de commun avec l'ellipse, il en sera de même du second, attendu que, dans les deux cas, celui-ci laissera les deux autres courbes du même côté.

Probl. (a) : *Décrire un cercle de rayon connu qui touche extérieurement une ellipse en un point marqué.*

Menez par le point donné C (P. IV, F. 5), une tangente AB à l'ellipse; élevez en C une perpendiculaire CH sur cette tangente; portez le rayon extérieurement de C en H, et du point H décrivez une circonférence qui passe par C; elle y touchera l'ellipse, puisqu'elle aura aussi AB pour tangente.

Probl. (b) : *Décrire un cercle de rayon connu par lequel une ellipse soit touchée intérieurement en un point marqué* F.

L'opération est la même que la précédente; seulement au lieu de porter le rayon sur la normale commune, à l'extérieur de l'ellipse, il faut le porter à l'intérieur de F en G.

Probl. (c) : *Décrire un cercle qui touche une ellipse en un point marqué et passe par un autre point également assigné.*

Solution 1 : Menez par le contact F une tangente DE à l'ellipse; élevez une perpendiculaire FG sur cette droite, puis une perpendiculaire au milieu de la corde FI, déterminée par le contact et l'autre point donné I. L'intersection G des deux perpendiculaires sera le centre d'un cercle qui, décrit avec le rayon GF, touchera l'ellipse en F et passera par I.

Solution 2 : Elevez une perpendiculaire au milieu de la corde AB (F. 6) que détermine le contact A et l'autre point donné B; d'un point quelconque C de cette perpendiculaire, décrivez une circonférence qui passe par A, B et deux autres points D, E de l'ellipse; menez de A une corde AF d'ellipse parallèle à la corde DE; élevez une perpendiculaire au milieu de la droite BF, et du point G où elle rencontre la perpendiculaire au milieu de AB, décrivez un cercle, avec GA pour rayon. Ce cercle passera par A, B, F évidemment. Il reste donc à démontrer que le premier de ces trois points est un contact, ou que l'ellipse et le cercle G ont en A une tangente commune.

Démonstration : Soit AK la tangente de l'ellipse. L'élément A de cette courbe, qui se trouve sur AK, constitue, avec le pentagone ABFDE, un hexagone inscrit. Par conséquent (89), le concours H des côtés opposés AE, BF, le concours I des côtés opposés AB, DE, et le concours K du cinquième côté DF avec la tangente AK, se trouvent sur une même droite HK. Comme cette propriété appartient au cercle aussi bien qu'à l'ellipse, le pentagone ABFMLA et la tangente au point A du cercle G donnent également trois concours en ligne droite. Or H est déjà celui des côtés opposés AE, BF. Si donc I forme celui des côtés opposés AB, LM, l'intersection K de HI et du cinquième côté FM sera nécessairement le concours de FM et de la tangente au point A du cercle G ; de sorte que cette tangente se confondra avec la tangente AK de l'ellipse.

Ainsi, nous avons encore à faire voir que LM passe par I, ou que LI passe par M, ou que la seconde intersection M′ de cette droite et de la circonférence G se confond avec M. Or, les cordes AL, FM se coupent au point N en parties réciproquement proportionnelles, et NL : NM :: NF : NA. De plus, les parallèles AF, DE donnent NF : NA :: ND : NE. Conséquemment, NL : NM :: ND : NE, et les quatre points D, E, L, M peuvent être liés par une circonférence. D'un autre côté, il résulte des sécantes IB, IL, ID, les relations $IL \cdot IM' = IB \cdot IA = ID \cdot IE$, qui montrent que les quatre points D, E, L, M′ peuvent être unis aussi par une circonférence. Les points M, M′ se trouvent donc à la fois sur la circonférence que déterminent D, E, L, et sur la circonférence G. Comme la première coupe déjà la seconde en L, il faut nécessairement que M et M′ se confondent.

138. *Tout cercle qui touche une ellipse en deux points, a ses contacts symétriquement placés par rapport à l'un des axes, et son centre sur ce même axe.*

Soient E, G les deux contacts (P. IV, F. 7). Le cercle et l'ellipse ont en ces points des tangentes communes, et par suite des normales communes. Ces normales concourent donc au centre du cercle et sont égales. Par conséquent, le centre H est sur l'axe AB, et les points E, G sont symétriques (73).

139. *Le cercle qui touche une ellipse aux deux extrémités de l'un des axes, a pour centre le centre même de la courbe.*

Cela provient de ce que les normales des extrémités des axes passent par le centre de l'ellipse (72) et de ce que les cordes qu'elles forment y sont divisées en deux parties égales (32).

140. *Quand les deux contacts* E, G *d'un cercle* H *et d'une ellipse* O (P. IV, F. 7) *sont séparés par le grand axe, la première courbe touche la seconde intérieurement.*

Il suffit de démontrer que le cercle se trouve alors tout entier dans l'intérieur de l'ellipse. Cela est vrai, s'il a seulement un point dans cet intérieur ; car pour en sortir, il serait obligé de couper la courbe, ce qu'il ne peut faire, attendu que les deux contacts E, G remplacent quatre points d'intersection (135).

Tirons le demi-diamètre EO de l'ellipse. Le rayon HE est plus petit que HO + OE. Or OE est moindre que OB (26). Donc, à plus forte raison, HE est plus petit que HB, et le cercle H coupe nécessairement le grand axe entre son centre et le sommet B.

141. *Quand les deux contacts* E, I *d'un cercle* K *et d'une ellipse* O (P. IV, F. 7) *sont séparés par le petit axe, la première courbe touche la seconde extérieurement.*

Il suffit de démontrer que le cercle enveloppe entièrement l'ellipse. Cela est vrai, s'il a seulement un point en dehors; car pour entrer dans la courbe, il serait obligé de la couper, ce qu'il ne peut faire, attendu que les deux contacts E, I équivalent à quatre points d'intersection.

On voit d'abord que si le centre K du cercle est hors de l'ellipse, comme dans la figure, la première courbe a nécessairement des points hors de la seconde. Si ce même centre se trouve dans l'intérieur de l'ellipse, il sera en O ou entre O et D, car aucune normale de l'arc AC ne coupe le petit axe entre O et C ou le grand entre O et B (76). Dans le premier cas, le cercle touche l'ellipse aux sommets A, B (139), et l'enveloppe entièrement (26); dans le second, le centre sera, par exemple, en K'. Or le conjugué du diamètre parallèle à EL passe évidemment dans l'angle AOD; par conséquent le milieu de EL se trouve entre OA, OD (35); K'L est plus court que K'E, et le point du cercle diamétralement opposé à E se trouve hors de l'ellipse.

Probl. (*a*) : *Décrire un cercle qui touche intérieurement une ellipse aux deux extrémités d'un axe.*

La solution n'est possible que dans le cas où les deux contacts sont les extrémités du petit axe (140). Prenez alors pour centre, le centre O de l'ellipse (139), et pour rayon, la moitié OC du petit axe (P. IV, F. 7).

Probl. (*b*) : *Décrire un cercle qui touche extérieurement une ellipse aux deux extrémités d'un axe.*

La solution n'est possible que dans le cas où les deux contacts sont les sommets (141). Prenez alors pour centre, le centre O de l'ellipse (139), et pour rayon, la moitié OA du grand axe (P. IV, F. 7).

Probl. (*c*) : *Décrire un cercle qui touche intérieurement une ellipse en deux points situés hors des axes.*

La solution n'est possible que dans le cas où les points donnés E, G (P. IV, F. 7) sont symétriquement placés par rapport au grand axe (138 et 140). S'il en est ainsi, menez par l'un E des contacts une normale à l'ellipse; puis, du point H où cette normale coupe le grand axe AB, décrivez une circonférence qui ait EH pour rayon.

Probl. (*d*) : *Décrire un cercle qui touche extérieurement une ellipse en deux points situés hors des axes.*

La solution n'est possible que dans le cas où les points donnés E, I (P. IV, F. 7) sont symétriquement placés par rapport au petit axe (138 et 141). S'il en est ainsi, menez par l'un E des contacts une normale à l'ellipse; puis, du point K où cette normale coupe le petit axe CD, décrivez une circonférence qui ait EK pour rayon.

142. *Quand des cercles touchent une ellipse au même point* A (P. IV, F. 8), *les cordes* BC, DE, *qui joignent leurs intersections respectives avec la courbe, sont des droites parallèles.*

Si l'on ajoute l'élément A de l'ellipse au pentagone ABDEC, il en résulte un hexagone inscrit dont les côtés opposés ont leurs concours F, G, H en ligne droite (89). Prolongeons BD jusqu'en I où cette corde de l'ellipse coupe une seconde fois la grande circonférence, et tirons IK. Nous aurons un pentagone ABIKCA inscrit au grand cercle; l'élément A de ce cercle, dirigé selon AG, achèvera un hexagone inscrit, et comme F, H sont aussi les concours de deux paires de côtés opposés du nouvel hexagone, IK, l'opposé de l'élément A, devra passer par G. Conséquemment, $GI \cdot GK = \overline{GA}^2 = GE \cdot GD$; les quatre points D, E, I, K sont sur une même circonférence; $IL : LK :: LE : LD$, et parce que $IL : LK :: LC : LB$, on a aussi $LE : LD :: LC : LB$, ce qui démontre que DE, BC sont effectivement parallèles.

PROBLÈME : *Décrire un cercle qui touche une ellipse au même point* A *qu'un autre cercle sécant* M *déja tracé* (P. IV, F. 8).

Tirez la corde BC qui joint les deux points où le cercle M coupe l'ellipse; tirez aussi, dans cette dernière courbe, une autre corde DE parallèle à la précédente; puis faites passer un cercle par les trois points A, D, E : il sera sécant en D, E, et tangent en A.

Ellipses tangentes au cercle.

143. *L'ellipse est tangente au cercle quand un diamètre* DE *de la première courbe aboutit à un point* E *de la seconde* (P. IV, F. 9), *et que le conjugué* GH *se trouve parallèle à la tangente* IK *de la circonférence au même point.*

En effet, IK est alors tangente à l'ellipse comme au cercle (54) et par conséquent les deux courbes se touchent en E (137).

PROBL. (*a*) : *Tracer une ellipse qui touche un cercle en un point donné* E (P. IV, F. 9).

Menez par le point donné la tangente IK du cercle; tirez une droite quelconque ED, et prenez-y deux parties égales EO, OD; tracez par le point O une parallèle indéfinie à IK; prenez arbitrairement OG, OH d'égales longueurs; puis décrivez l'ellipse qui a DE, GH pour diamètres conjugués (53, probl. *f*).

PROBL. (*b*) : *Tracer une ellipse dont le centre soit un point* O *marqué et qui touche un cercle au point donné* E (P. IV, F. 9).

Menez EO; prenez OD = OE; tirez par O une parallèle à la tangente IEK du cercle, et achevez comme dans le cas précédent.

PROBL. (*c*) : *Tracer une ellipse dont les axes sont donnés et qui touche un cercle au point marqué* C (P. IV, F. 9).

Elevez une perpendiculaire sur la tangente ICK du cercle, et au point de contact même; portez la moitié de l'un des axes de C en O′ et de O′ en D; menez par O′ une parallèle à IK; portez-y la moitié de l'autre axe, de O′ en A et en B; puis tracez l'ellipse qui a pour axes les droites d'équerre AB, CD (53, probl. *b*).

144. *Une ellipse ne saurait toucher un cercle en deux points écartés de* 90°.

L'angle EGF étant droit (P. IV, F. 10), ainsi que les angles E, F formés par les tangentes du cercle, il faut que l'angle H de ces tangentes soit droit également. Mais EH, FH seraient tangentes aussi à l'ellipse qui toucherait le cercle en E, F (137). Les rayons EG, FG parallèles à ces tangentes donneraient donc les directions de deux diamètres conjugués (54); le centre de la courbe se confondrait avec celui du cercle; EG, FG formeraient les demi-axes, et par conséquent, la prétendue ellipse ne serait autre que la circonférence G elle-même.

PROBL. (*a*) : *Tracer une ellipse qui touche extérieurement un cercle* G *en deux points* I, K *dont l'écartement surpasse* 90° (P. IV, F. 10).

Solution 1 : Tirez les tangentes du cercle IL, KL, et par les contacts donnés, des parallèles à ces tangentes. Ces parallèles se couperont en un point O, et si vous tracez l'ellipse qui a ce point pour centre et OI, OK pour demi-diamètres conjugués, elle satisfera aux conditions imposées.

Démonstration : D'abord, LI touchera la courbe en I, puisque cette droite est parallèle à OK conjugué du diamètre OI (54). Il en sera de même de LK, pour une semblable raison. Maintenant, l'angle ILK est aigu, attendu que IGK est obtus et que les angles GIL, GKL sont droits. L'angle IOK, qui égale ILK, est donc aigu aussi; par suite, le centre O de l'ellipse se trouve plus éloigné de la corde IK que l'intersection G des normales égales IG, KG; cette intersection se fait sur le grand axe (138, 73 et 75); et le cercle touche l'ellipse intérieurement (140), ou bien cette courbe touche la circonférence extérieurement.

Solution 2 : Déterminez la bissectrice GL de l'angle IGK; elle donnera la direction du grand axe (138 et 140). Tirez de I une droite quelconque qui coupe GL en arrière de G (76). L'intersection O pourra être prise pour centre de l'ellipse demandée. La droite IM, double de IO, sera un diamètre; KN menée parallèlement à la tangente IL, sera une demi-corde parallèle au conjugué de IM (54), et vous pourrez appliquer le problème *g* (53).

PROBL. (*b*) : *Tracer une ellipse qui touche extérieurement un cercle en deux points dont l'écartement soit moindre que* 90°.

Employez la seconde solution du problème *a*.

PROBL. (*c*) : *Tracer une ellipse qui touche intérieurement un cercle* G *en deux points* I, K *dont l'écartement surpasse* 90° (P. IV, F. 11).

Déterminez la bissectrice GL de l'angle IGK ; elle donnera la direction du petit axe (141). Tirez de I une droite quelconque qui coupe GL entre G et IK (76). L'intersection O pourra être prise pour centre de l'ellipse demandée. La droite IM, double de IO, sera un diamètre ; KN, menée parallèlement à la tangente IL, sera une demi-corde parallèle au conjugué de IM (54), et vous pourrez appliquer le problème *g* (53).

PROBL. (*d*) : *Tracer une ellipse qui touche intérieurement un cercle en deux points dont l'écartement soit moindre que* 90°.

Solution 1 : Employez la solution du problème *c*.

Solution 2 : Menez les tangentes du cercle aux deux points de contact donnés I, K (P. IV, F. 12), et par les mêmes points, des parallèles à ces tangentes ; puis tracez l'ellipse qui a l'intersection O pour centre, et IO, KO pour demi-diamètres conjugués : elle satisfera aux conditions du problème.

Démonstration: D'abord, LI touchera la courbe en I, puisque cette droite est parallèle à KO, conjugué de IO (54). Il en sera de même de LK pour une raison analogue. Maintenant, l'angle ILK est obtus, puisque IGK est aigu et que les angles GIL, GKL sont droits. L'angle IOK, qui égale ILK, est donc obtus aussi. Conséquemment, le centre O de l'ellipse se trouve entre le centre G du cercle et la corde IK ; l'intersection des normales d'ellipse IG, KG, se fait sur le petit axe (76), et le cercle touche la courbe extérieurement (141), ou bien l'ellipse touche la circonférence intérieurement.

Cercles de même courbure que l'ellipse.

145. *L'ellipse n'a pas de cercle osculateur pour les extrémités de ses axes.*

En effet, les caractères des cercles osculateurs d'une courbe c'est d'être tangents et sécants au même point, ce qui ne leur permet plus qu'une autre intersection (15 et 16). Or, tout cercle qui touche l'ellipse à l'une des extrémités d'un axe, a son centre sur cet axe (72). Si donc il coupait la courbe à son contact et en un second point, il la couperait encore au point symétrique de ce dernier.

146. *Le cercle de même courbure que l'ellipse à l'une des extrémités de chaque axe, a son centre sur cet axe au point où concourent les deux normales infiniment voisines.*

Le cercle qui remplace le cercle osculateur pour chaque extrémité d'un axe, a un contact de seconde espèce (15 et 16). Il résulte donc d'un cercle E (P. IV, F. 13) tangent à cette extrémité A et sécant en deux points symétriques G, H, dont les intersections se rapprochent également du contact à mesure que le rayon diminue. Or, le centre E se trouve, pour toutes les positions, ou pour toutes les longueurs de rayon, au concours de deux droites symétriques GE, HE issues des deux intersections, et quand ces intersections sont près de se réunir au contact A, les deux droites se confondant presque avec l'axe AB deviennent des normales.

147. *Le rayon de courbure pour chaque sommet d'une ellipse, égale le demi-paramètre.*

Le principe précédent montre que le cercle qui donne la courbure de l'ellipse aux sommets, a son centre G (P. IV, F. 13) au point où se termine sur le grand axe, la normale en A. Cette normale est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs FA, F'A, quoique cet angle soit nul (70); elle divise donc FF' en deux parties proportionnelles à FA, F'A, de sorte que

$$GF : GF' :: FA : F'A.$$

On tire de là

$$GF : FF' :: FA : FA+F'A, \quad GF : FA :: FF' : AB \ (52),$$

$$GF+FA : FA :: FF'+AB : AB, \quad GF+FA : FA :: \tfrac{1}{2}(FF'+AB) : \tfrac{1}{2} AB,$$

$$GA : FA :: OF+AO : AO, \quad GA : FA :: F'A : AO,$$

et

$$GA = \frac{FA \times F'A}{AO}.$$

Or (51) $\overline{OC}^2 = FA \times FB = FA \times F'A$. Conséquemment,

$$GA = \frac{\overline{OC}^2}{AO}.$$

Mais $IK = \dfrac{\overline{CD}^2}{AB}$, $IK = 2FK$, $\overline{CD}^2 = 4\overline{OC}^2$, $AB = 2AO$, et par suite,

$$2FK = \frac{4\overline{OC}^2}{2AO} \quad \text{ou} \quad FK = \frac{\overline{OC}^2}{AO}.$$

Donc enfin, le rayon de courbure GA du sommet A ou du sommet B égale FK moitié du paramètre IK.

PROBLÈME : *Déterminer le rayon et le centre de courbure des sommets d'une ellipse.*

Marquez les foyers F, F' (P. IV, F. 13); élevez par un de ces points une perpendiculaire FK sur le grand axe AB; la partie FK de cette perpendiculaire, comprise entre le pied F et la courbe, est le rayon de courbure demandé, et si vous portez ce rayon sur le grand axe, de A en G, de B en G', les points G, G' seront les centres de courbure ou les centres des cercles à double contact qui ont même courbure que l'ellipse à ses sommets.

148. *Le rayon de courbure pour les extrémités du petit axe d'une ellipse est le diamètre de la circonférence qui passe par une de ces extrémités et les deux foyers.*

L'ellipse O (P. IV, F. 14) est la projection d'un cercle O'. Le cercle G, qui a en C un contact de seconde espèce avec l'ellipse O, est la projection d'une ellipse G' située dans le plan du cercle O', et cette ellipse a nécessairement aussi, à son sommet C', un contact de seconde espèce avec la circonférence O'. Ainsi (147), O'C' est le demi-paramètre de l'ellipse G', et (51)

$$G'C' : G'H' :: G'H' : O'C'.$$

Mais $G'H' = GH = GC$, et $O'C' = O'A' = OA$. Donc

$$G'C' : GC :: GC : OA.$$

De plus, G'C' contient sa projection GC, comme O'C' contient sa projection OC. Par conséquent,

$$O'C' : OC :: GC : OA \quad \text{ou} \quad OA : OC :: GC : OA$$

ou encore

$$OC : OA :: OA : GC,$$

ce qui montre que *le rayon* GC *du cercle dont la courbure égale celle de l'ellipse aux extrémités du petit axe, est une troisième proportionnelle au demi-petit axe et au demi-grand axe.*

Cela posé, soit tirée la droite CF à l'un des foyers. On a $CF = OA$ (49). Par suite, $OC : CF :: CF : GC$. Les deux triangles COF, CFG, qui ont l'angle C commun, sont donc semblables, et parce que le premier est rectangle en O, le second l'est en F. Le foyer F se trouve donc sur la circonférence qui a GC pour diamètre; réciproquement GC est diamètre de la circonférence qui passe par C et les deux foyers F, F'.

PROBLÈME : *Déterminer le rayon et les centres de courbure des extrémités du petit axe d'une ellipse.*

Solution 1 : Faites passer une circonférence par les foyers F, F' et par l'une C des extrémités du petit axe (P. IV, F. 14). Le point G, où elle coupera une seconde fois cet axe, sera le centre de courbure pour l'extrémité C, et si vous prenez Dg égal à CG, le point g sera le centre de courbure de l'extrémité D. Par conséquent, CG ou Dg donne le rayon de courbure commun aux deux extrémités du petit axe.

Solution 2 : Marquez les foyers F, F'; joignez-les aux extrémités C, D du petit axe; puis élevez, par ces mêmes foyers, des perpendiculaires aux droites de jonction FC, F'D. Les points G, g, où la direction du petit axe est coupée par les perpendiculaires, sont respectivement les centres de courbure pour C, D, et GC ou *g*D donne le rayon de courbure pour ces deux points.

149. *Tout point de l'ellipse, autre que les extrémités des axes, a un cercle osculateur.*

Soit menée la normale d'un tel point A (P. IV, F. 15). On peut toujours décrire d'un certain point B de cette normale, avec le rayon BA, une circonférence qui coupe l'ellipse en deux points non symétriques C, D (137, probl. *c*). Cette circonférence aura de plus, en A, un contact simple avec l'ellipse. Tirons la corde AE parallèlement à la corde CD. La circonférence G, qui aura son centre sur la normale AH et passera par les points A, E, touchera l'ellipse en A, comme la circonférence B; de plus, elle sera sécante en A et en E, comme B l'est en C et en D (142). Ainsi, le point A formera à la fois un contact et une intersection pour le cercle G; ce cercle n'aura plus qu'un autre point E commun avec l'ellipse, et par conséquent, il sera osculateur en A (16).

PROBLÈME : *Déterminer le centre et le rayon de courbure pour un point quelconque* A *d'une ellipse, autre que les extrémités des axes* (P. IV, F. 15).

Tracez la normale AH du point donné; marquez à volonté un point C de l'ellipse; décrivez un cercle B qui touche la courbe en A et la coupe en C (137, probl. *c*). S'il n'a aucun autre point commun avec l'ellipse, il sera le cercle osculateur cherché (16); mais s'il en a un troisième D, menez par A une corde AE parallèle à CD; puis élevez une perpendiculaire au milieu de AE. L'intersection G de cette perpendiculaire et de la normale sera le centre du cercle osculateur au point A; par conséquent, G et GA seront respectivement le centre et le rayon de courbure pour ce même point.

COMBINAISONS DES ELLIPSES.

Deux ellipses sont entièrement séparées ou elles ont quelques points communs, quelques parties communes. Nous n'avons à considérer dans le premier cas, que les ellipses semblables. Dans le second, les deux courbes se coupent, se touchent, ou encore l'une écartée de l'autre, sur tout son pourtour, la renferme en totalité. Mais cette dernière circonstance n'a d'intérêt qu'autant que les ellipses sont concentriques.

Ellipses semblables.

150. *Il y a similitude entre deux ellipses quand les deux axes de l'une sont proportionnels aux deux axes de l'autre.*

Cela est vrai si deux autres cordes quelconques, mais correspondantes, ont le même rapport, car alors l'ellipse la plus petite sera évidemment la copie réduite de la plus grande.

Je dis d'abord que les cercles dont les ellipses sont les projections, ont la même inclinaison. Désignons par $A'B'$, $C'D'$, $a'b'$, $c'd'$ les diamètres de ces cercles qui se projettent respectivement sur les axes AB, CD, *ab*, *cd* (P. IV, F. 16). Nous aurons

$$A'B' : a'b' :: AB : ab,$$

puisque $A'B' = AB$ et que $a'b' = ab$. (25). Donc, en vertu de l'hypothèse

$$AB : ab :: CD : cd, \quad A'B' : a'b' :: CD : cd.$$

Mais $A'B' = C'D'$, $a'b' = c'd'$. Conséquemment,

$$C'D' : c'd' :: CD : cd;$$

les triangles rectangles formés par $C'D'$ et CD, $c'd'$ et *cd*, avec les verticales projetantes de C', c', sont semblables; les angles aigus de l'un égalent les angles aigus correspondants de l'autre, et les plans des deux cercles se trouvent également inclinés sur ceux des ellipses.

Il s'ensuit que les diamètres circulaires $E'G'$, $e'g'$, projetés sur les diamètres elliptiques EG, *eg*, font des angles égaux avec ces projections, si AOE $=$ *aoe*. Les verticales projetantes des points G', g' achèvent donc des triangles rectangles semblables, et

$$E'G' : e'g' :: EG : eg.$$

Mais

$$E'G' : e'g' :: A'B' : a'b',$$

puisque les antécédents sont diamètres du grand cercle, et les conséquents, diamètres du petit. Donc,

$$EG : eg :: AB : ab,$$

et tous les diamètres d'une ellipse sont proportionnels aux diamètres correspondants de l'autre.

Quant aux cordes, telles que GH, *gh*, qui ne passent point par les centres, elles forment des triangles semblables OGH, *ogh*, avec les diamètres tirés de leurs extrémités, puisque, étant correspondantes, elles se trouvent comprises dans les angles égaux GOH, *goh*. Leur rapport vaut donc celui de OG à *og* et celui de EG à *eg*.

151. *Deux ellipses circonscrites à des pentagones semblables* EGHIK, eghik, *sont semblables* (P. IV, F. 17).

La démonstration consiste à faire voir que les axes sont proportionnels (150). Désignons par $E'G'H'I'K'$ le pentagone qui, inscrit au cercle dont l'ellipse O est la projection, se projette sur EGHIK. Ses diagonales $G'K'$, $H'K'$ forment deux quadrilatères inscrits, et la somme des angles $G'K'I'$, $G'H'I'$ vaut 180°, ainsi que celle des angles $E'K'H'$, $E'G'H'$. Mais le pentagone $E'G'H'I'K'$ peut être considéré comme la section oblique d'un prisme droit dont EGHIK serait la base. Le pentagone *eghik* peut aussi former la base d'un prisme droit, et les coins de ce second prisme égalent les coins correspondants du premier, puisque les angles E, G, etc., qui mesurent les uns, égalent les angles e, g, etc., qui mesurent les autres. Plaçons *eghik* de manière que ses côtés soient parallèles aux côtés correspondants de EGHIK, puis coupons le petit prisme par un plan parallèle à celui du cercle O′; les angles de la section $e'g'h'i'k'$ vaudront lès angles correspondants du pentagone E′G′H′I′K′, et $g'k'i' + g'h'i'$ donnera 180, ainsi que $e'k'h' + e'g'h'$. Le pentagone $e'g'h'i'k'$ sera donc inscriptible dans un cercle o', et ce cercle aura pour projection l'ellipse o, puisque le pentagone se projette sur *eghik* (95).

Ainsi, les cercles O′, o' dont les ellipses O, o sont les projections, se trouvent également inclinés sur les plans de ces ellipses. Il s'ensuit que

$$C'D' : CD :: c'd' : cd \quad \text{ou que} \quad C'D' : c'd' :: CD : cd.$$

Mais

$$A'B' : a'b' :: AB : ab,$$

puisque $A'B' = AB$ et que $a'b' = ab$ (25). D'ailleurs $A'B' = C'D'$, $a'b' = c'd'$, attendu que les deux membres de chaque équation sont diamètres du même cercle. Donc enfin,

$$AB : ab :: CD : cd.$$

152. *Deux ellipses inscrites à des pentagones semblables* EGHIK, eghik *sont semblables* (P. IV, F. 18).

Il suffit de démontrer que les axes sont proportionnels (150). Soit E′G′H′I′K′ le pentagone projeté sur EGHIK et circonscrit au cercle qui a l'ellipse O pour projection. On peut le considérer comme la section oblique d'un prisme droit dont EGHIK serait la base, et qui se composerait des prismes triangulaires E′EIK, E′EIH, E′EGH. Le pentagone *eghik* peut aussi former la base d'un prisme droit, ou de trois prismes triangulaires, et les coins de ces prismes égalent les coins correspondants des autres, puisque les angles KEI, K, KIE, IEH, etc, qui mesurent les premiers, égalent les angles *kei*, *k*, *kie*, *ieh*, etc., qui mesurent les seconds. Plaçons *eghik* de manière que ses côtés soient parallèles aux côtés correspondants de EGHIK, puis coupons le petit prisme par un plan parallèle à celui du cercle O′; les angles de la section $e'g'h'i'k'$ vaudront les angles correspondants du pentagone E′G′H′I′K′; il en sera de même pour les angles des triangles qui composent ces polygones; les petits triangles seront donc semblables aux grands; il y aura aussi similitude entre les deux pentagones, et puisqu'un cercle est inscrit à l'un, un cercle pourra être inscrit à l'autre.

Ainsi, l'ellipse o est la projection d'un cercle o' aussi incliné que le cercle O′ projeté sur l'ellipse O, et l'on peut faire voir, comme dans la démonstration précédente, que $AB : ab :: CD : cd$.

Problème : *Tracer une ellipse qui soit semblable à une ellipse donnée.*

Solution 1 : Prenez une longueur arbitraire ab pour grand axe de l'ellipse demandée (P. IV, F. 17); cherchez une quatrième proportionnelle aux deux demi-axes donnés AO, CO et à la moitié de *ab*; portez le résultat sur une perpendiculaire élevée au milieu *o* de *ab*, de *o* en *c* et en *d*; puis tracez une ellipse qui ait pour axes *ab*, *cd*.

Solution 2: Inscrivez dans l'ellipse donnée O un pentagone quelconque EGHIK; construisez un pentagone semblable *eghik*, et circonscrivez une ellipse *o* à ce dernier (95, probl. *a*).

Solution 3: Circonscrivez un pentagone quelconque EGHIK à l'ellipse donnée O (F. 18); construisez un pentagone semblable *eghik*, et inscrivez une ellipse à ce dernier (121).

Ellipses mutuellement sécantes.

153. *Deux ellipses ne peuvent se couper en plus de quatre points.*

Si elles avaient cinq points communs, elles se confondraient, puisque les cinq sommets d'un pentagone suffisent pour déterminer une ellipse (95).

PROBL. (*a*): *Tracer une ellipse qui en coupe une autre en deux points donnés.*

Appliquez, selon les cas, les solutions des problèmes *a* ou *b* (136).

PROBL. (*b*): *Tracer une ellipse qui en coupe une autre en quatre points assignés.*

Marquez arbitrairement un cinquième point qui ne soit pas sur la courbe donnée, et faites passer une ellipse par les cinq sommets du pentagone que vous avez alors (95, probl. *a*).

PROBL. (*c*): *Tracer une ellipse qui en coupe une autre aux quatre sommets d'un parallélogramme* EGHI (P. IV, F. 19).

Tirez les lignes-milieux KL, K'L' du parallélogramme; portez sur l'une, à partir de leur intersection O, deux parties égales OK, OL plus longues ou plus courtes que OM, mais plus grandes que ON. La droite KL pourra être prise pour diamètre de l'ellipse demandée, et le conjugué sera dirigé selon K'L' (35). Cherchez donc, au moyen de la demi-corde EN, la longueur de ce conjugué (41, probl. *g*), puis appliquez le problème *f* (53).

Ellipses mutuellement tangentes.

154. *Deux ellipses peuvent avoir un ou deux contacts, mais elles ne sauraient en avoir trois.*

Chaque contact résultant de deux intersections confondues (15), il faudrait que deux ellipses pussent se couper en six points, pour qu'elles se touchassent trois fois (153).

155. *Deux ellipses se touchent quand un diamètre de l'une*

aboutit à un point de l'autre, et que le conjugué se trouve parallèle à la tangente de la seconde au même point.

La démonstration est analogue à celle du n° 143.

Probl. (*a*) : *Tracer une ellipse qui en touche une autre en un point marqué.*

Appliquez la solution du problème *a* (143).

Probl. (*b*) : *Tracer une ellipse qui en touche une autre aux deux extrémités d'un diamètre.*

Déterminez le conjugué EG du diamètre HI des contacts (P. IV, F. 20) dans l'ellipse donnée EHGI; portez sur ce conjugué, à partir du centre O, deux parties égales OK, OL, plus courtes que OE si l'ellipse donnée doit être touchée intérieurement, plus grandes que OE dans le cas contraire; puis tracez une ellipse qui ait HI, KL pour diamètres conjugués.

Il est clair que KL se trouve parallèle à la tangente en H de l'ellipse donnée, puisque ce diamètre fait partie de EG conjugué de HI dans la même ellipse (54).

Probl. (*c*) : *Tracer une ellipse qui en touche une autre aux deux extrémités d'une corde donnée* EG (P. IV, F. 21).

Menez par E, G des tangentes EH, GH à l'ellipse O décrite; tirez de E une parallèle à GH, et de G une parallèle à EH; prenez $O'I = O'E$, $O'K = O'G$, puis tracez une ellipse qui ait pour diamètres conjugués EI, GK.

Les deux courbes se touchent en E, parce que le conjugué de EI est parallèle à la tangente EH de l'ellipse O, et elles se touchent en G, parce que le conjugué de GK est parallèle à la tangente GH.

156. *Deux ellipses ne peuvent se toucher qu'en un sommet, lorsque l'une* O *renferme l'autre* O' (P. IV, F. 22), *et que les grands axes sont sur la même droite.*

Il est clair d'abord que si l'on fait glisser A'B' sur AB, jusqu'à ce que les sommets B et B' se confondent, un contact mutuel aura lieu en ces points (155). Reste donc à faire voir que, placées comme elles le sont dans la figure, les deux courbes ne peuvent se toucher entre les extrémités de leurs axes.

L'ellipse O est la projection d'un cercle *o* d'une certaine inclinaison; l'ellipse O' est la projection d'un autre cercle de la même inclinaison ou d'une inclinaison différente, et généralement le cylindre circulaire qui projette la seconde est coupé selon une ellipse *o'* par le plan du premier cercle (124). Or, si les deux ellipses O et O' pouvaient se toucher en E, par exemple, le point E', symétrique de E, serait un second contact; les deux cylindres projetants auraient deux génératrices droites communes, et le cercle *o* toucherait extérieurement l'ellipse *o'* en deux points symétriques par rapport au grand axe *a'b'*, ce qui est impossible (140).

157. *Deux ellipses ne peuvent se toucher qu'à une extrémité des petits axes, quand ces axes sont sur la même droite et que l'une des courbes renferme l'autre.*

La démonstration est analogue à la précédente.

Ellipses concentriques.

158. *Deux ellipses concentriques ne peuvent être équidistantes, même quand les axes de la petite sont sur les axes correspondants de la grande, et qu'ils en diffèrent également.*

La distance d'un point quelconque e de la petite ellipse à la grande est la partie eE de la normale à cette dernière, comprise entre les deux courbes (P. IV, F. 23). Nous avons donc à faire voir que eE n'est pas une quantité constante, ou qu'elle n'égale pas la différence des demi-axes correspondants, quand Aa = Cc.

Décrivons d'un point quelconque H de la grande ellipse, avec OA pour rayon, un arc qui coupe le petit axe CD. Nous aurons

$$\mathrm{HI} = \mathrm{OA}, \quad \text{et} \quad \mathrm{IK} = \mathrm{OA} - \mathrm{OC} \ (45).$$

Mais de $\mathrm{OA} - \mathrm{O}a = \mathrm{OC} - \mathrm{O}c$, résulte $\mathrm{OA} - \mathrm{OC} = \mathrm{O}a - \mathrm{O}c$. Donc

$$\mathrm{IK} = \mathrm{O}a - \mathrm{O}c, \quad \mathrm{I}h = \mathrm{O}a, \quad \mathrm{H}h = \mathrm{IH} - \mathrm{I}h = \mathrm{OA} - \mathrm{O}a = \mathrm{A}a \text{ ou } \mathrm{C}c,$$

et il ne s'agit plus que de démontrer l'inégalité de Hh et de Ee, ou celle de Hh et de Lh partie de la normale LM.

Or, si Hh = Lh, la perpendiculaire élevée au milieu de la corde HL passe par h, et le cercle décrit de ce point h, avec hL pour rayon, est osculateur en L (149). Décrivons un autre cercle de M, avec le rayon ML; il sera tangent au point L, comme le cercle h, et la corde de ses deux points d'intersection avec la grande ellipse, devra se trouver parallèle à HL (142). Mais le cercle M touche aussi la courbe à l'incidence E de la normale ME symétrique de ML; ses deux points d'intersection se confondent donc en E, et leur corde devient la tangente au même point E. D'un autre côté, HL est parallèle à la tangente menée par l'extrémité du diamètre qui coupe cette corde au milieu, car elle est parallèle, comme la tangente, au conjugué du même diamètre (35 et 54). Il faudrait donc pour qu'on eût Hh = Lh, que la tangente en un certain point de HL fût parallèle à celle de E. Or c'est là chose impossible, puisque les tangentes en L et en E concourent sur le grand axe (59), et que la première a, sur cet axe, une inclinaison supérieure à celle de toute tangente qui touche entre H et L.

Nous avons supposé, il est vrai, que Hh est une droite distincte de la normale menée de h à la grande ellipse. Pour le démontrer, soient G, G' les centres de courbure respectivement relatifs aux extrémités A, C des axes.

$$\mathrm{OA} : \mathrm{OC} :: \mathrm{OC} : \mathrm{GA} \ (147), \qquad \mathrm{OC} : \mathrm{OA} :: \mathrm{OA} : \mathrm{G'C} \ (148).$$

Conséquemment,

$$GA = \frac{\overline{OC}^2}{OA}, \qquad G'C = \frac{\overline{OA}^2}{OC},$$

$$OG = OA - GA = OA - \frac{\overline{OC}^2}{OA} = \frac{\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2}{OA} = \frac{OA + OC}{OA}(OA - OC),$$

$$OG' = G'C - OC = \frac{\overline{OA}^2}{OC} - OC = \frac{\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2}{OC} = \frac{OA + OC}{OC}(OA - OC).$$

Mais OG forme la plus petite partie de normale comprise entre les axes, OG' est la pus grande, et OA + OC surpasse toujours soit OA, soit OC. La partie interceptée sur une normale quelconque par les axes est donc toujours plus grande que OA — OC ou que IK; d'où il suit que HI et toutes les droites analogues ne sont point normales à la grande ellipse.

PROBLÈME : *Tracer une ellipse qui soit concentrique à une ellipse donnée* ACBD (P. IV, F. 23).

Déterminez les axes AB, CD de la courbe donnée; portez les demi-axes de l'ellipse demandée du point O en *a*, *b*, et en *c*, *d*, puis appliquez la solution du problème *b* (53).

APPLICATIONS : I. La courbe d'*extrados* d'une voûte est la section de la surface convexe par un plan perpendiculaire à l'axe, et la courbe d'*intrados* est la section de la surface concave par le même plan. Ces deux courbes sont équidistantes toutes les fois que la voûte a une épaisseur uniforme, si donc alors la seconde est une ellipse, ce qui arrive souvent dans les voûtes surbaissées, la première ne peut être de même nature.

II. Une fenêtre en œil de bœuf est elliptique, et parfois un bandeau saillant de même forme l'entoure. Si donc on veut donner à ce bandeau une largeur uniforme, l'arête convexe ne pourra pas être une ellipse comme l'arête concave, et il faudra la tracer de la même manière qu'on trace une courbe d'extrados dans le même cas.

159. *Deux ellipses concentriques qui ont un axe commun, se touchent aux deux extrémités de cet axe.*

Les deux autres axes se trouvent alors sur la même droite, et par conséquent, les extrémités de l'axe commun doivent former des contacts (156 et 157).

MESURAGES DE L'ELLIPSE.

160. *L'ellipse n'est pas rectifiable* (21).

La Géométrie ne fournit aucun moyen de mesurer exactement soit la longueur d'un arc d'ellipse, soit celle de toute la courbe.

Problème : ***Mesurer le pourtour d'une ellipse et la longueur d'un arc déterminé.***

Employez un des moyens indiqués dans le n° 21.

161. ***Le rapport de la superficie d'une ellipse à celle du cercle dont elle est la projection orthogonale, égale le rapport du petit axe au grand.***

Le cercle qui se projette orthogonalement sur l'ellipse a ses diamètres égaux au grand axe (25 et 26). Si donc nous décrivons un cercle du centre O de l'ellipse, avec OA pour rayon (P. I, F. 25), il faudra démontrer que la superficie de l'ellipse ACBD est contenue dans celle du cercle AQBR, comme CD est contenu dans AB.

Partageons le demi-grand axe en parties égales ON, NP, etc., assez petites pour que les arcs correspondants des deux courbes puissent être regardées comme des droites; puis menons, par les points de division N, P, etc., des parallèles au petit axe CD. Les portions de surface elliptique CDHG, GHML, etc., seront des trapèzes, et la dernière UVA formera un triangle. Les portions de surface circulaire QRFE, EFKI, etc., seront aussi des trapèzes et la dernière STA formera également un triangle. Les trapèzes correspondants, ayant même hauteur ON ou NP, sont entre eux comme les demi-sommes de leurs bases ou comme les sommes de ces bases. Les deux triangles, ayant aussi même hauteur XA, se contiennent comme leurs bases. Conséquemment,

$$\mathrm{CDHG} : \mathrm{QRFE} :: \mathrm{CD}+\mathrm{GH} : \mathrm{QR}+\mathrm{EF}.$$

Mais (44)

$$\mathrm{CD} : \mathrm{GH} :: \mathrm{QR} : \mathrm{EF}, \quad \mathrm{CD} : \mathrm{QR} :: \mathrm{CD}+\mathrm{GH} : \mathrm{QR}+\mathrm{EF}.$$

Donc,

$$\mathrm{CDHG} : \mathrm{QRFE} :: \mathrm{CD} : \mathrm{QR} :: \mathrm{CD} : \mathrm{AB}.$$

On démontrerait de même que GHML : EFKI :: CD : AB, et qu'il existe aussi un égal rapport entre tous les autres trapèzes correspondants. Quant aux triangles,

$$\mathrm{UVA} : \mathrm{STA} :: \mathrm{UV} : \mathrm{ST} :: \mathrm{CD} : \mathrm{QR} :: \mathrm{CD} : \mathrm{AB}.$$

Les parties de l'ellipse et celles du cercle donnent donc cette suite de rapports égaux :

$$\mathrm{CDGH} : \mathrm{QRFE} :: \mathrm{GHML} : \mathrm{EFIK} :: \text{etc.} :: \mathrm{UVA} : \mathrm{STA},$$

et

$$\mathrm{CDGH}+\mathrm{GHML}+\text{etc.}+\mathrm{UVA} : \mathrm{QRFE}+\mathrm{EFIK}+\text{etc.}+\mathrm{STA}$$
$$:: \mathrm{CDGH} : \mathrm{QRFE} :: \mathrm{CD} : \mathrm{AB}.$$

Or la première somme constitue la moitié de la surface elliptique, et la seconde, la moitié de la surface circulaire. Donc enfin,

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{ACBD} : \tfrac{1}{2}\mathrm{AQBR} :: \mathrm{CD} : \mathrm{AB} \quad \text{ou} \quad \mathrm{ABCD} : \mathrm{AQBR} :: \mathrm{CD} : \mathrm{AB}.$$

Application : Deux cylindres de même hauteur qui auraient pour bases l'un une ellipse, l'autre un cercle dont le grand axe de cette ellipse serait le diamètre, se contiendraient comme ces bases. Le rapport du premier au second égalerait donc le rapport du petit axe au grand.

Ainsi, le volume d'un poêle à base elliptique est bien moindre que celui d'un poêle à base circulaire de même hauteur, quand les deux foyers ont même longueur, c'est-à-dire quand le grand axe de l'ellipse égale le diamètre du cercle. Le premier poêle contient donc moins de matière que le second, coûte moins cher et s'échauffe plus vite, mais en revanche il se refroidit plus rapidement.

162. *La superficie d'une ellipse égale le quart du produit fait avec le rapport de la circonférence au diamètre et les deux axes.*

Soient E la surface de l'ellipse, C celle du cercle dont E est la projection, A le grand axe, et a le petit. Le principe précédent donne

$$E : C :: a : A \quad \text{et} \quad E = C\frac{a}{A}.$$

Mais puisque le cercle a A pour diamètre, $C = \frac{\pi A^2}{4}$. Par conséquent,

$$E = \frac{\pi A^2}{4} \times \frac{a}{A} = \frac{\pi A a}{4}.$$

Probl. (a) : *Mesurer la superficie d'un segment d'ellipse* GHML *formé par deux cordes parallèles au petit axe* (P. I, F. 25).

Décrivez un cercle qui ait le grand axe AB pour diamètre ; prolongez les cordes GH, LM jusqu'à la circonférence ; mesurez le segment de cercle EFKI ; puis calculez le premier terme de la proportion GHML : EFKI :: CD : AB.

La vérité d'une telle relation a été établie dans la démonstration du principe 161.

Probl. (b) : *Mesurer un segment d'ellipse* EFKI *formé par deux cordes* EF, IK *parallèles au grand axe* (P. I, F. 33).

Décrivez un cercle sur le petit axe CD pris pour diamètre ; mesurez le segment GHML, et calculez le premier terme de la proportion EFKI : GHML :: AB : CD.

Une démonstration analogue à celle du n° 161 ferait voir en effet la justesse d'une telle relation, car (44)

$$EF : GH :: AB : QR :: AB : CD.$$

Probl. (c) : *Mesurer la superficie d'un secteur d'ellipse* BOE *formé par le grand axe* AB *et un diamètre quelconque* OE (P. IV, F. 24).

Décrivez un cercle sur le grand axe AB pris pour diamètre ; abaissez de E une perpendiculaire sur ce diamètre ; prolongez-la jusqu'à la circonférence; tirez, par son extrémité E′, le rayon E′O; mesurez le secteur de cercle BOE′, et calculez le premier terme de la proportion BOE : BOE′ :: CD : AB.

Démonstration : En effet, le demi-segment

$$BGE : BGE' :: CD : AB\ (161);$$

les triangles EGO, E′GO, de même base GO, donnent

$$EGO : E'GO :: EG : E'G :: CD : AB\ (44).$$

Par conséquent,

$$BGE : BGE' :: EGO : E'GO,$$

et $BGE + EGO : BGE' + E'GO :: EGO : E'GO :: CD : AB,$

ou bien $BOE : BOE' :: CD : AB.$

Probl. (*d*) : *Mesurer la superficie d'un secteur d'ellipse* EOH *formé par deux diamètres quelconques* EO, HO (P. IV, F. 24).

Décrivez un cercle sur le grand axe AB pris pour diamètre; abaissez de E et de H des perpendiculaires sur ce diamètre; prolongez-les jusqu'à leurs rencontres avec la circonférence en E′, H′; tirez les rayons E′O, H′O; mesurez le secteur de cercle E′OH′, et calculez le premier terme de la proportion EOH : E′OH′ :: CD : AB.

Démonstration : En effet, BOE : BOE′ :: CD : AB, d'après la démonstration précédente; de même

$$BOH : BOH' :: CD : AB.$$

Donc

$$BOE : BOE' :: BOH : BOH',$$

$$BOE - BOH : BOE' - BOH' :: BOE : BOE' :: CD : AB$$

ou $EOH : E'OH' :: CD : AB.$

Probl. (*e*) : *Mesurer la superficie d'un segment d'ellipse* IEK *formé par une corde quelconque* IK (P. IV, F. 24).

Mesurez le secteur IEKO et retranchez-en la superficie du triangle IKO.

Probl. (*f*) : *Mesurer la superficie d'un segment d'ellipse* EBKI *formé par deux cordes quelconques* BE, IK (P. IV, F. 24).

Mesurez séparément le grand segment IEK et le petit EHB, puis retranchez le second du premier.

Probl. (*g*) : *Décrire un cercle qui ait même superficie qu'une ellipse donnée.*

Prenez pour rayon une moyenne proportionnelle aux deux demi-axes.

Démonstration : En effet (162), la superficie d'une ellipse $E = \frac{\pi A a}{4}$; celle d'un cercle $C = \pi r^2$. On doit donc avoir

$$\pi r^2 = \frac{\pi A a}{4}, \quad r^2 = \frac{A}{2} \times \frac{a}{2}, \quad \text{et} \quad \frac{A}{2} : r :: r : \frac{a}{2}.$$

PROBL. (h) : *Tracer une ellipse qui ait même superficie qu'un cercle donné.*

Choisissez arbitrairement la longueur de l'un des axes, celle du grand par exemple ; prenez pour le petit une troisième proportionnelle au grand et au diamètre du cercle donné ; puis appliquez le problème b (53).

Démonstration : Soient A, a, D les axes de l'ellipse et le diamètre du cercle. On aura

$$A : D :: D : a \quad \text{et} \quad Aa = D^2.$$

Par conséquent, la surface de l'ellipse

$$\frac{\pi Aa}{4} = \frac{\pi D^2}{4},$$

surface du cercle donné.

ELLIPSOÏDES.

163. On a nommé *ellipsoïdes* les deux corps que terminent de toutes parts les surfaces courbes engendrées par la révolution d'une ellipse autour de ses axes, et ces surfaces sont dites *ellipsoïdales*.

Le mouvement circulaire produit l'*ellipsoïde alongé*, lorsqu'il se fait autour du grand axe, et l'*ellipsoïde aplati*, quand il a lieu autour du petit axe. La première forme est à-peu-près celle d'un œuf dont les deux bouts auraient la même grosseur ; la seconde rappelle celle d'une orange.

Il suit de ces définitions que si l'on suppose vertical l'axe de révolution, chaque ellipsoïde a pour projection verticale l'ellipse génératrice, et pour projection horizontale un cercle ; mais le diamètre de ce cercle égale le petit axe C'D' de l'ellipse, quand il s'agit de l'ellipsoïde alongé (P. V, F. 1), et le grand axe A'B', dans le cas de l'ellipsoïde aplati (F. 2).

164. *Tout plan méridien d'un ellipsoïde en coupe la surface selon l'ellipse génératrice.*

Les *plans méridiens* d'une surface de révolution sont ceux qui contiennent l'axe du mouvement ; chacun détermine donc une position de l'ellipse génératrice, et comme cette ellipse se trouve à la fois dans le plan méridien et sur la surface ellipsoïdale, elle forme nécessairement leur intersection.

165. *Toutes les ellipses méridiennes d'un ellipsoïde alongé ont leurs sommets aux pôles du corps.*

Les *pôles* d'une surface de révolution sont les extrémités P, P' de l'axe du mouvement (P. V, F. 1). Or, la droite PP' étant le grand axe de chaque ellipse méridienne, se termine nécessairement aux sommets (50).

166. *Toutes les ellipses méridiennes d'un ellipsoïde alongé ont*

leurs foyers aux mêmes points F, F′ *de l'axe de révolution* (P. V, F. 1); *ces points sont les* FOYERS *de la surface ellipsoïdale.*

Puisque l'axe de révolution PP′ est le grand axe de chaque ellipse méridienne, et que tous les petits axes C′D′ sont égaux, la détermination des foyers d'une courbe doit donner les mêmes points F, F′ que celle des foyers de toute autre (49).

167. *La surface d'un ellipsoïde aplati n'a point de foyers, et les sommets de ses ellipses méridiennes se trouvent sur le plus grand cercle.*

La position des sommets résulte de ce que les grands axes A′B′ des ellipses méridiennes (P. V, F. 2) sont les diamètres du plus grand cercle O de la surface; et cette surface n'a pas de foyers, parce que ceux des ellipses méridiennes, placés sur les divers diamètres du même cercle, ne peuvent se confondre pour produire deux points uniques.

168. *Tout plan perpendiculaire à l'axe de révolution coupe l'un ou l'autre ellipsoïde selon un cercle.*

Cela provient de ce que chaque point de l'ellipse génératrice décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe du mouvement circulaire et qui a son centre sur cet axe.

APPLICATION : On peut donc former les deux ellipsoïdes sur le tour, en employant pour guide une demi-ellipse placée comme l'est le guide en demi-cercle dont on se sert pour tourner une sphère par cercles parallèles. Si l'on veut un ellipsoïde alongé, il faut employer la demi-ellipse qui se termine au grand axe. S'il s'agit d'obtenir l'ellipsoïde aplati, on dirige l'outil au moyen de la demi-ellipse terminée au petit axe.

169. *Tout plan méridien d'un ellipsoïde est un plan de symétrie;* c'est-à-dire qu'il partage la surface en deux parties égales, superposables et symétriquement placées.

Les deux parties sont symétriquement placées par rapport au plan méridien, parce que ce plan, prenant un diamètre de chacun des cercles parallèles de la surface, coupe d'équerre et par le milieu toutes les cordes qui dans chaque cercle sont perpendiculaires à ce diamètre, et il y a égalité entre les mêmes parties, attendu qu'elles se composent chacune des moitiés des cercles parallèles.

170. *Le plan qui coupe d'équerre et par le milieu l'axe de révolution, est un plan de symétrie pour chaque ellipsoïde.*

Dans l'ellipsoïde alongé, il prend les petits axes des ellipses méridiennes; il divise donc ces ellipses en deux parties égales, et de plus il coupe d'équerre, par le milieu, les cordes parallèles au grand axe commun (35).

Dans l'ellipsoïde aplati, le plan prend les grands axes des ellipses méridiennes; il divise donc ces ellipses en deux parties égales, et de plus il coupe d'équerre, par le milieu, les cordes parallèles au petit axe commun.

Application : Un demi-ellipsoïde alongé, à base circulaire, placé sur un cylindre circulaire et droit, forme une voûte en dôme surhaussé; c'est-à-dire qu'un tel dôme serait plus élevé que le dôme sphérique qui recouvrirait le même cylindre.

Un demi-ellipsoïde aplati, à base circulaire, placé sur un cylindre circulaire et droit, forme une voûte en dôme surbaissé; c'est-à-dire qu'un tel dôme serait moins élevé que le dôme sphérique qui recouvrirait le même cylindre.

171. *Tout plan oblique ou parallèle à l'axe de révolution coupe chaque ellipsoïde selon une ellipse différente de l'ellipse génératrice.*

Supposons le plan coupant perpendiculaire au plan vertical de projection; la section se projettera verticalement selon une droite $a'b'$, si elle est oblique à l'axe PP' de l'ellipsoïde (P. V, F. 3). Des plans perpendiculaires au même axe coupent la surface ellipsoïdale selon des circonférences $I'K'$, $L'M'$, et la section, selon des cordes (E', Ee), (G', Gg). Les intersections des projections horizontales Ee, Gg de ces cordes avec les circonférences O, projections horizontales des cercles $I'K'$, $L'M'$, sont des points E, e, G, g de la projection horizontale de la courbe $a'b'$.

Cela posé, nous remarquerons que dans le cercle de diamètre PP' dont l'ellipse O' peut être la projection (25), les cordes $a''b''$, $I''K''$, projetées en $a'b'$, $I'K'$, se coupent en parties réciproquement proportionnelles, de sorte que

$$a''E'' : I''E'' :: E''K'' : E''b'' \quad \text{et que} \quad a''E'' \times E''b'' = I''E'' \times E''K''.$$

Or toutes les parties de la droite $a''b''$ ont le même rapport m avec leurs projections respectives, et toutes les parties de la droite $I''K''$ ont aussi le même rapport n avec leurs projections respectives. Conséquemment,

$$a''E'' = ma'E', \quad E''b'' = mE'b', \quad I''E'' = nI'E', \quad E''K'' = nE'K',$$
$$m^2a'E' \times E'b' = n^2I'E' \times E'K'.$$

Les cordes $a''b''$, $L''M''$ donnent ensuite

$$a''G'' : L''G'' :: G''M'' : G''b'' \quad \text{et} \quad a''G'' \times G''b'' = L''G'' \times G''M''.$$

Mais $a''G'' = ma'G'$, $G''b'' = mG'b'$, et parce que $L''M''$ est parallèle à $I''K''$, comme $L'M'$ à $I'K'$,

$$L''G'' = nL'G', \quad G''M'' = nG'M', \quad m^2a'G' \times G'b' = n^2L'G' \times G'M'.$$

Il s'ensuit

$$m^2a'E' \times E'b' : m^2a'G' \times G'b' :: n^2I'E' \times E'K' : n^2L'G' \times G'M'$$

ou

$$a'E' \times E'b' : a'G' \times G'b' :: I'E' \times E'K' : L'G' \times G'M'.$$

Or les deux demi-cordes de cercles ee', Og sont perpendiculaires aux deux cordes I'K', L'M'. Par conséquent,

$$\overline{ee'}^2 = \text{I'E'}.\text{E'K'},\ \overline{Og}^2 = \text{L'G'}.\text{G'M'},\ \text{et}\ \overline{ee'}^2 : \overline{Og}^2 :: a\text{E'}.\text{E'}b' : a\text{G'}.\text{G'}b'.$$

Observons maintenant que les deux premiers termes de la dernière proportion ne peuvent jamais égaler respectivement les deux seconds, car si l'on avait $\overline{ee'}^2 = a'\text{E}' \times \text{E}'b'$, on aurait aussi

$$a\text{E}' \times \text{E}'b' = \text{I'E'} \times \text{E'K'} \quad \text{et} \quad m^2 = n^2 \quad \text{ou} \quad m = n,$$

ce qui ne peut être, à moins que $a'b'$ ne devienne parallèle à I'K'. Ainsi les quarrés des demi-cordes perpendiculaires à $a'b'$ ont même rapport que les produits des parties qu'elles forment sur cette droite, sans égaler les mêmes produits. La courbe projetée sur $aegebd$GE est donc une ellipse (47), qui ne peut jamais dégénérer en cercle; ses axes égalent $a'b'$, cd, et son centre a o, o' pour projections.

La démonstration serait absolument la même, dans le cas où le plan coupant se trouverait parallèle à l'axe de révolution PP'.

172. ***Il y a similitude entre les ellipses selon lesquelles un ellipsoïde est coupé par des plans parallèles*** EF, GH (P. V, F. 2).

Soient I, K les milieux des axes EF, GH de ces ellipses. La droite IK est diamètre de l'ellipse méridienne PA'P'B' et le conjugué du diamètre parallèle à EF, GH (35). Par conséquent (46),

$$\overline{\text{EI}}^2 : \overline{\text{GK}}^2 :: \text{IL} \times \text{IM} : \text{KL} \times \text{KM}.$$

Les autres axes des deux ellipses parallèles, qui se projettent en I, K sur le plan méridien de la figure, sont dans le plan LM perpendiculaire à ce plan méridien, et forment des cordes de l'ellipse selon laquelle le plan LM coupe l'ellipsoïde. Ces cordes sont d'ailleurs perpendiculaires à l'axe LM de l'ellipse. Si donc I', I'' indiquent les extrémités de l'une, et K', K'' celles de l'autre,

$$\overline{\text{II'}}^2 : \overline{\text{KK'}}^2 :: \text{IL} \times \text{LM} : \text{KL} \times \text{KM}, \quad \overline{\text{II'}}^2 : \overline{\text{KK'}}^2 :: \overline{\text{EI}}^2 : \overline{\text{GK}}^2,$$

$$\text{II'} : \text{KK'} :: \text{EI} : \text{GK}, \quad \text{I'I''} : \text{K'K''} :: \text{EF} : \text{GH}.$$

Ainsi, les deux axes de l'ellipse EF sont proportionnels à ceux de l'ellipse GH, et par conséquent ces deux courbes sont semblables (150).

173. Un plan est *tangent* à un ellipsoïde quand il n'a qu'un seul point de commun avec la surface courbe.

Tout plan qui coupe à la fois un ellipsoïde et un plan tangent, trace sur ce plan une droite tangente à la courbe selon laquelle il rencontre la surface ellipsoïdale.

Si la droite n'était pas tangente à la courbe, qui ne peut être qu'un cercle ou une ellipse, elle la couperait au contact du plan tangent et par suite en un second point. Ce plan tangent renfermerait donc deux points de la surface ellipsoïdale, ce qui serait contraire à sa définition.

174. *Tout plan tangent à un ellipsoïde est perpendiculaire au plan méridien qui passe par le contact.*

Concevons par I′ une perpendiculaire X au plan méridien PC′P′ (P. V, F. 3). Elle est d'équerre sur la droite I′K′ qu'elle rencontre. Or I′K′, perpendiculaire à PP′, forme le diamètre d'un cercle horizontal de la surface ellipsoïdale (168). La perpendiculaire X se trouve donc tangente à ce cercle; par suite, elle est dans le plan tangent en I′ (173), et ce plan coupe effectivement à angle droit le plan méridien PC′P′.

175. Une droite est *normale* à la surface d'un ellipsoïde, si elle se trouve d'équerre sur le plan tangent au point où elle rencontre la surface.

Toute normale d'une surface ellipsoïdale est contenue dans le plan méridien du point où elle perce cette surface.

Puisque le plan méridien est d'équerre sur le plan tangent (174), il doit en effet contenir les perpendiculaires à ce plan qui ont avec lui un point commun.

Toute normale d'une surface ellipsoïdale est aussi normale de l'ellipse génératrice.

Etant perpendiculaire au plan tangent du point I′, par exemple (P. V, F. 3), elle l'est aussi à la tangente de l'ellipse PC′P′D′ au même point (173), et comme de plus elle se trouve dans le plan de cette courbe, elle lui est nécessairement normale (4).

Problème : *Planter une tige normalement sur un ellipsoïde, en un point donné.*

Tracez sur un tableau l'ellipse génératrice PC′P′D′ (P. V, F. 3), après avoir pris, au moyen d'un compas à curseur, la longueur de l'axe de révolution PP′ et celle du diamètre C′D′ du plus grand cercle; marquez le point N′, en portant de P′ en N′ la distance du point donné au pôle P′, prise avec un compas courbe; menez Q′N′ normale de l'ellipse (77, probl. *a*), et mesurez les distances Q′N′, Q′P′.

Cela fait, vous planterez la tige au point donné, et à l'aide du fil-aplomb, si l'axe de révolution est vertical, vous la placerez tout entière dans le plan vertical PN′P′. Enfin, après avoir marqué le point Q′ sur cette tige, il ne restera plus qu'à le rapprocher ou à l'éloigner de P′, jusqu'à ce que la distance des deux points soit égale à Q′P′.

Si l'axe de révolution n'est pas vertical, projetez Q′N′ en QN; abaissez de Q′ une perpendiculaire sur PP′; décrivez de O un cercle avec R′S′ pour rayon, et mesurez QS. Il faudra ensuite décrire sur l'ellipsoïde, avec le compas courbe, un cercle qui ait son centre au pôle P' et dont le rayon soit $P'R'$; tracer, avec une règle très-flexible, l'arc $N'P'$ pour avoir R' et pouvoir marquer S' à 90° de ce point ; planter la tige en N' ; porter dessus la longueur $N'Q'$, et enfin l'incliner de manière que son point Q' soit à une distance QP' de P' et à une distance QS de S', ou en d'autres termes, de manière que ce point Q' se trouve au sommet de la pyramide triangulaire qui a pour base $N'P'S'$ et pour ses autres arêtes les droites QN', $Q'P'$, QS.

Application : On trouve dans quelques cabinets de physique des réflecteurs métalliques qui offrent des calottes d'un ellipsoïde alongé. Ces calottes sont limitées chacune par un cercle que donne une section faite perpendiculairement à l'axe de révolution, soit à chaque foyer, soit entre un foyer et le pôle voisin. Un vase en treillis de fil de fer est placé au foyer F d'une calotte (P. V, F. 4), et une pince ou un second vase occupe le foyer F' de l'autre. Quand les pieds des réflecteurs sont établis sur un plan horizontal, que la distance des pôles P, P' égale l'axe de révolution, et que le vase F est rempli de matières incandescentes, la chaleur et la lumière se trouvent bientôt beaucoup plus grandes en F' que partout ailleurs, le point F excepté. Cela tient à la manière dont se fait la réflexion sur une ellipse (page 54) : tous les rayons de chaleur et de lumière émanés de F, qui rencontrent le réflecteur APB, sont réfléchis vers F', parce que chacun des divers plans qui contiennent l'axe PP', coupe les deux calottes selon des arcs d'une même ellipse méridienne, dont les foyers se confondent avec ceux de la surface ellipsoïdale (166). De même, tous les rayons que reçoit de F la calotte $A'P'B'$, sont renvoyés au foyer F' ; il n'y a de perdus que ceux qui passent entre les bords circulaires AB, $A'B'$, et la faible partie des autres qui pénètre dans la matière des deux réflecteurs. Si donc un corps inflammable est mis en F', il brûlera, tandis que celui qu'on aura placé entre les deux foyers ne fera que s'échauffer un peu.

Remplissez le vase F de neige ou de glace et fixez la boule d'un thermomètre en F' ; vous verrez bientôt le liquide du tube descendre avec rapidité. Cet effet provient de ce que les corps en présence s'envoient constamment de la chaleur, en proportion de celle qu'ils renferment. Le thermomètre en ayant plus que la neige, lui en envoie plus qu'il n'en reçoit d'elle ; il se refroidit donc et sa liqueur doit se contracter. Mais elle se contracte dans la position F' plus rapidement, plus fortement que si elle était entre les deux foyers, et la neige fond plus vite ; car les rayons de chaleur émanés du thermomètre et reçus par les calottes sont réfléchis au foyer F ; ces calottes, qui d'abord se sont refroidies comme l'instrument, ne se réchauffent donc pas, et la liqueur leur envoie sans cesse plus de chaleur qu'elles ne lui en rendent. Il n'en serait pas de même entre F, F', parce que le thermomètre recevrait par réflexion plusieurs des rayons envoyés aux réflecteurs, qui ne pourraient plus les diriger exclusivement vers le foyer F.

Si l'on supprimait la calotte A'P'B', le point F' ne recevrait plus autant de lumière d'un corps enflammé placé en F, puisqu'il n'y aurait plus de réfléchis que les rayons reçus par la calotte APB. Toutefois la clarté se trouverait encore beaucoup plus grande que partout ailleurs, le foyer F excepté.

Ainsi, *le réflecteur ellipsoïdal est propre à éclairer fortement un point.*

Mais observez bien qu'il s'agit d'une calotte d'ellipsoïde alongé : celle d'un ellipsoïde aplati ne saurait jouir de la même propriété (167).

Les réflecteurs ellipsoïdaux sont rares, parce que leur construction exige du savoir et de l'habileté : il faut faire en grand l'épure de l'ellipse génératrice ; façonner un guide, d'après cette épure ; tourner, à l'aide du guide, une calotte d'ellipsoïde en bois ; puis enfin se servir de la calotte comme d'une forme, pour emboutir des feuilles métalliques.

Combinaisons des ellipsoïdes avec les cylindres, les cônes et la sphère.

176. *Les intersections d'un ellipsoïde et d'un cylindre circulaire droit sont des cercles, lorsque les axes de révolution se confondent.*

Soient les deux cercles égaux I'K', N'T' tracés sur la surface ellipsoïdale (P. V, F. 3). Evidemment, ils appartiennent aussi à la surface cylindrique circulaire dont la génératrice droite est I'N' parallèle à l'axe PP'.

APPLICATION : Les dômes surhaussés ou surbaissés sont quelquefois couronnés d'une tourelle cylindrique, appelée *lanterne*, qui a même axe que la surface ellipsoïdale. C'est donc un cercle qui doit former l'arête horizontale de la baie qu'on ménage dans cette surface pour l'orifice inférieur de la lanterne.

177. *La courbe d'entrée ou de sortie d'un cylindre circulaire et droit qui pénètre dans un ellipsoïde, est une ellipse, lorsque les deux axes de révolution* PP', EF (P. V, F. 5) *forment un seul plan, et que l'intersection* G *de celui du cylindre avec la plus grande corde commune* ab, *divise le diamètre* HI *d'un des cercles de l'ellipsoïde en deux parties dont le produit égale le quarré du rayon* aE *du cylindre.*

La figure représente la coupe des deux solides par le plan EFP des axes. Les premières intersections *a*, *b* de l'ellipse génératrice avec les génératrices extrêmes du cylindre déterminent la plus grande corde commune aux deux surfaces, dans la courbe d'entrée. Cette corde *ab* est le grand axe de l'ellipse selon laquelle l'ellipsoïde serait coupé par un plan *ab* perpendiculaire au plan EFP (171). Le petit axe de la même courbe est la corde G perpendiculaire à HI, dans le cercle dont cette droite est le diamètre, car le point G où EF coupe *ab* est le milieu de cette corde, comme E est le milieu de *aK*.

Or, pour que l'ellipse *ab* puisse former l'entrée de la surface cylindrique, il faut qu'elle se trouve tout entière sur cette surface, ou ce qui est la même chose, qu'elle se projette orthogonalement selon le cercle *a*K base du cylindre. Par conséquent, le diamètre *a*K doit égaler le petit axe G, et le rayon *a*E doit en valoir la moitié. Mais le quarré de la demi-corde G égale le produit GH $\times$ GI. Donc enfin, le quarré du rayon *a*E du cylindre égale GH $\times$ HI, quand la surface cylindrique prend toute l'ellipse *ab*.

Probl. (*a*) : *Déterminer le cylindre circulaire et droit qui entre dans un ellipsoïde par une ellipse donnée* ab (P. V, F. 5).

Marquez le milieu G du grand axe *ab* de l'ellipse; tirez par ce point, dans l'ellipse génératrice, la corde HI parallèle au petit axe CD; décrivez sur HI un demi-cercle, pour limiter la perpendiculaire GL, moyenne proportionnelle entre GH et GI; décrivez de *a* un cercle dont le rayon égale GL, et par G menez une tangente à ce cercle; cette tangente GE sera l'axe du cylindre, *a*E le rayon, et des parallèles à GE, menées par *a*, *b*, donneront les génératrices extrêmes.

Probl. (*b*) : *Déterminer une ellipse selon laquelle un cylindre circulaire et droit, de rayon connu, puisse entrer dans un ellipsoïde.*

Tirez une parallèle HI (P. V, F. 5) au petit axe CD de l'ellipse génératrice; élevez une perpendiculaire à l'une des extrémités; portez-y le rayon donné, de H en M par exemple; menez par M une parallèle à HI, jusqu'à la rencontre L de la demi-circonférence décrite sur cette corde prise pour diamètre; déterminez le point G, en abaissant de L une perpendiculaire sur HI; cherchez le conjugué du diamètre OG, et tirez par G une corde *ab* de l'ellipse génératrice, qui soit parallèle à ce conjugué. La corde *ab* sera le grand axe d'une ellipse qui, ayant pour petit axe la corde 2GL du cercle HI, ou le diamètre de la surface cylindrique, pourra former l'entrée de cette surface dans l'ellipsoïde.

Démonstration: Il est clair, en effet, que G est le milieu de *ab* (35), que $\overline{GL}^2$ ou $\overline{HM}^2 = GH \times GI$, et qu'il suffit de faire passer l'axe du cylindre par G et par un point de PP′, pour que les conditions du principe 177 soient remplies.

Quant à la direction que doit avoir l'axe du cylindre, pour que l'ellipse *ab* forme l'entrée ou la sortie, on la trouve en décrivant de *a* un cercle dont le rayon soit GL, et en menant par G une tangente GE à ce cercle. Des droites tirées de *a* et de *b*, parallèlement à GE, donnent ensuite les deux génératrices extrêmes contenues dans le plan EFP des axes.

Application : Les portes et les fenêtres pratiquées dans un dôme surhaussé ou surbaissé présentent ordinairement des berceaux circulaires et horizontaux. La tête de ces berceaux est plus agréable à l'œil quand l'intersection des deux surfaces est une ellipse, que dans le cas où elle a deux courbures.

178. *Un cylindre circulaire et droit qui entre par une ellipse* ab *dans un ellipsoïde* (P. V, F. 5), *en sort* généralement *par une courbe à double courbure.*

Pour que l'ellipse $a'b'$ pût former la sortie du cylindre, il faudrait qu'on eût

$$G'H' \times G'I' = \overline{EK}^2.$$

Il s'ensuivrait

$$GH \times GI = G'H' \times G'I' \quad \text{ou} \quad GH : G'H' :: G'I' : GI.$$

Or cette relation ne peut évidemment avoir lieu que dans certains cas. Tous les autres rendront la corde G' du cercle H'I' plus grande ou plus petite que la corde G du cercle HI. Si l'on a $G' > G$, la courbe de sortie passera nécessairement au-dessous de G', puisque le rayon EK du cylindre égale la corde G. Si au contraire on a $G' < G$, la courbe de sortie passera au-dessus de G', et dans les deux circonstances, elle aura des points hors du plan de l'ellipse $a'b'$.

179. *Le cylindre circulaire et droit qui entre dans un ellipsoïde par une ellipse* ab (P. V, F. 6), *en sort par une ellipse égale* a'b', *si son axe passe par le centre* O *de la surface ellipsoïdale..*

Tirons les diamètres aa', bb'; la figure $aba'b'$, inscrite dans l'ellipse génératrice, sera un parallélogramme (81). L'axe du cylindre, passant par l'intersection O des diagonales et par le milieu G de ab, est une ligne-milieu du parallélogramme; le point G', où il coupe $a'b'$, est donc le milieu de cette corde. D'ailleurs, ab', $a'b$, étant parallèles à GG', forment les génératrices extrêmes du cylindre qui entre par ab; de sorte que a', b' sont deux points de la sortie.

Il reste donc à faire voir que tous les autres points sont sur l'ellipse $a'b'$, et que cette ellipse, dont le grand axe $a'b' = ab$, a aussi un petit axe G' égal à G celui de l'ellipse d'entrée. Or, de $OG' = OG$ résulte l'égalité des triangles rectangles GKO, G'K'O, puis celle des parties OK, OK' du grand axe PP' de l'ellipse génératrice. Par conséquent (42),

$$HI = H'I', \quad HK = H'K', \quad GH = G'H', \quad GI = G'I',$$
$$GH \times GI = G'H' \times G'I' \quad \text{et} \quad G = G',$$

puisque les moitiés de ces deux petits axes sont des moyennes proportionnelles entre les deux parties des diamètres HI, H'I'. Enfin, le rayon du cylindre, égalant la moitié de G (177), vaut aussi la moitié de G', et toutes les conditions sont remplies pour que l'ellipse $a'b'$ se trouve tout entière sur la surface cylindrique.

APPLICATION : Si deux fenêtres ou deux portes diamétralement opposées sont pratiquées dans un dôme surhaussé ou surbaissé, et qu'elles forment des berceaux circulaires, ces berceaux de même diamètre et de même axe constituent un cylindre qui traverse un ellipsoïde. Les arcs des deux têtes peuvent donc être des demi-ellipses égales.

180. *Un cylindre circulaire et oblique peut aussi couper la surface ellipsoïdale selon une ellipse.*

L'intersection est, par exemple, une ellipse, quand les deux axes de révolution PP′, EF (P. V, F. 5) se coupent; que la corde commune *ab* contenue dans leur plan est perpendiculaire à l'axe du cylindre et égale au diamètre de la base circulaire; que l'intersection G de EF, *ab*, divise le diamètre HI d'un cercle de l'ellipsoïde en deux parties dont le produit égale le quarré de la projection orthogonale qu'a le rayon du cylindre, perpendiculaire à *ab*, sur le plan de l'ellipse dont cette corde est le grand axe.

En effet, la projection du rayon désigné est le demi-petit axe de l'ellipse selon laquelle la base du cylindre se projette orthogonalement sur le plan de l'ellipse *ab*; cette corde *ab* forme le grand axe des deux ellipses; la demi-corde G du cercle HI est le demi-petit axe de la seconde, et son quarré vaut $GH \times GI$. Si donc la projection du rayon désigné a aussi ce produit pour quarré, les deux ellipses possédant les mêmes axes sont égales; et celle qui appartient à la surface cylindrique peut s'appliquer sur celle de la surface ellipsoïdale.

Application : Un dôme en ellipsoïde est quelquefois percé d'un berceau circulaire et incliné qui recouvre un escalier. Il convient alors, pour la beauté de la façade, que l'intersection de la surface ellipsoïdale et de la surface cylindrique inclinée soit plutôt une ellipse qu'une courbe à double courbure.

181. *Les intersections d'un ellipsoïde et d'un cône circulaire droit sont des cercles, lorsque les axes de révolution se confondent.*

Coupons les deux surfaces par un plan méridien (P. V, F. 7). La section de l'une donne une ellipse PCP′D (164), et la section de l'autre, deux droites EF, EG également inclinées sur l'axe commun PP′. Du point F où EF coupe l'ellipse, abaissons une perpendiculaire sur PP′ et prolongeons-la jusqu'à la droite EG. Les deux triangles rectangles EHF, EHG sont égaux, $FH = GH$, et le point G est aussi sur l'ellipse (35). Ainsi, F, G appartiennent à l'intersection des deux surfaces. Mais, si par la corde commune FG on fait passer un plan perpendiculaire à PP′, il coupe chaque surface selon un cercle dont le centre est en H (168), et deux cercles qui ont même centre et même rayon FH, se confondent. Donc enfin, l'intersection des deux surfaces a lieu selon la circonférence dont FG est diamètre.

Des raisonnements analogues montreraient que la courbe d'entrée du cône dans l'ellipsoïde forme un cercle dont F′G′ est diamètre.

Application : La cucurbite d'un alambic présente souvent un demi-ellipsoïde creux CP'D, et le chapiteau qui la recouvre, est un cône circulaire droit. Ces deux parties peuvent donc s'appliquer l'une sur l'autre par leurs bords circulaires.

182. *La courbe d'entrée ou de sortie d'un cône circulaire et droit qui pénètre dans un ellipsoïde, est une ellipse, lorsque les deux axes de révolution* PP', SF (P. V, F. 8) *font un seul plan, et que le milieu* G *de la plus grande corde commune* ab *divise un diamètre* EK *du cône en deux parties réciproquement proportionnelles à celles qu'il forme sur le diamètre* HI *d'un des cercles de l'ellipsoïde.*

La corde G qui, dans le cercle HI, se trouve perpendiculaire au plan méridien SFP des axes de révolution, est le petit axe de l'ellipse *ab*, section de l'ellipsoïde par un plan d'équerre sur SFP (171), et elle donne

$$GH \times GI = \tfrac{1}{4} G^2.$$

La corde G' qui, dans le cercle EK, est aussi perpendiculaire au plan SFP, fournit la relation

$$GE \times GK = \tfrac{1}{4} G'^2.$$

Si donc GH : GE :: GK : GI, on a

$$GH \times GI = GE \times GK, \quad \text{et} \quad G = G'.$$

Or G' est le petit axe de l'ellipse, section du cône par le plan *ab* (127). Cette ellipse est donc égale à celle *ab* de l'ellipsoïde, et par conséquent, les deux peuvent n'en faire qu'une, commune à la surface conique et à la surface ellipsoïdale.

Problème : *Déterminer un cône circulaire qui puisse entrer dans un ellipsoïde par une ellipse donnée* ab (P. V, F. 8).

Tracez, du milieu G de *ab*, une corde HI de l'ellipse méridienne, qui soit parallèle au petit axe CD. Du même point G, tirez une droite EK qui fasse avec HI un angle quelconque ; prenez GE arbitrairement, puis cherchez une quatrième proportionnelle aux droites GE, GH, GI ; elle vous donnera GK ; les droites E*a*, *b*K seront les génératrices extrêmes du cône, et EK en sera le diamètre, pour la section droite faite selon cette ligne.

183. *Les intersections d'une surface ellipsoïdale et d'une surface sphérique sont des cercles, quand l'axe de révolution* PP' *de la première passe par le centre* A *de la seconde* (P. V, F. 9).

De l'intersection d'une ellipse méridienne et d'un cercle méridien, abaissons une perpendiculaire EF sur le grand axe de la première ; il la divise en deux parties égales (35), et par conséquent, le point F de l'ellipse appartient aussi à la circonférence. Donc, le cercle EF de l'ellipsoïde se confond avec le cercle EF de la sphère, et réunis ils forment l'intersection des deux surfaces.

On voit de même que la seconde intersection E'F' est aussi un cercle.

184. *Les intersections d'un ellipsoïde et de la sphère ne peuvent être des courbes planes, quand le centre A′ du second corps se trouve hors de l'axe de révolution* PP′ *du premier* (P. V, F. 9).

Le cercle méridien décrit de A′ rencontre l'ellipse méridienne en deux points E″, F″ qui ne sont pas symétriques. Tout plan mené par E″F″ coupe donc la surface ellipsoïdale selon une ellipse (171). Or, aucun plan ne peut couper la surface sphérique selon une courbe autre que la circonférence. Conséquemment, le plan E″F″ ne saurait contenir tous les points communs aux deux surfaces, quelle que soit son inclinaison.

Application : On pratique parfois, dans un dôme ellipsoïdal, des niches cylindriques terminées par une voûte sphérique et destinées à recevoir des statues. Comme le centre de la sphère, placé sur l'axe vertical du demi-cylindre, se trouve hors de l'ellipsoïde, l'intersection des deux voûtes est une courbe à double courbure.

185. Deux surfaces courbes sont *tangentes* l'une à l'autre dans tous les points où elles ont le même plan tangent.

Un ellipsoïde et un cylindre ou un cône ou une sphère ne peuvent se toucher extérieurement qu'en un seul point.

Le plan tangent commun passant alors entre les deux surfaces ne permet pas que des points autres que son contact appartiennent à l'une et à l'autre.

186. *Un cylindre ou un cône circulaire et droit peut être touché intérieurement selon un cercle par un ellipsoïde, quand les axes de révolution se confondent.*

Menons une tangente à l'ellipse méridienne, par l'extrémité A de l'axe AB perpendiculaire à l'axe de révolution PP′ (P. V, F. 10), et une seconde tangente à la même courbe, par un autre point E quelconque ; puis faisons tourner autour de PP′ le système SEAP′. Il engendrera un ellipsoïde, un cylindre et un cône. Or le cercle décrit par A sera commun à la surface ellipsoïdale et à la surface cylindrique ; le cercle décrit par E sera commun à la première et à la surface conique. Dans chaque plan méridien, les génératrices droites du cylindre et du cône seront tangentes à l'ellipse génératrice de l'ellipsoïde, comme elles le sont dans le plan méridien qui représente la figure, et leurs contacts se trouveront sur les circonférences AB, EF. Les plans tangents communs auront donc aussi leurs contacts sur ces courbes, et par conséquent les deux circonférences seront des lignes de contacts pour les surfaces.

187. *Un cylindre circulaire peut être touché intérieurement selon une ellipse par un ellipsoïde.*

Soit tiré le diamètre EG (P. V, F. 10), et menons par E, G des tangentes à l'ellipse méridienne. Ces tangentes ES, GH seront parallèles (54) et appartiendront à la surface cylindrique qui a l'ellipse EG pour base et dont l'axe passe par le centre O de l'ellipsoïde. Or cette surface cylindrique touche la surface ellipsoïdale selon l'ellipse EG, car s'il n'en était pas ainsi, l'ellipse serait une courbe d'entrée, et la sortie du cylindre devrait se faire par une ellipse égale (179 et 180) qui prendrait aussi les points E, G. Mais le grand axe O de l'ellipse EG égale AB, et il est impossible qu'une section elliptique qui, contenant les points E, G, se trouve pourtant distincte de l'ellipse EG, ait aussi un grand axe égal à AB.

D'ailleurs, le cylindre est circulaire, car l'ellipse peut se projeter selon un cercle sur un plan convenablement placé par rapport aux lignes projetantes ES, HG, et ce cercle peut être regardé comme la base du cylindre.

188. *Un cône circulaire peut être touché intérieurement selon une ellipse par un ellipsoïde.*

Aux extrémités d'une corde quelconque EF de l'ellipse méridienne (P. V, F. 11), menons des tangentes à cette courbe. Elles se couperont en un point S et appartiendront à la surface conique qui a l'ellipse EF pour base et le concours S pour sommet. Menons par S un plan quelconque SI perpendiculaire au plan méridien de la figure. Il coupe la surface ellipsoïdale selon l'ellipse HI, et la surface conique selon deux droites qui se projettent sur SI.

D'ailleurs, la corde des contacts EF donne (66) SH:GH::SI:GI, et parce que les quatre points S, H, G, I appartiennent au grand axe de l'ellipse HI, G est l'intersection du même axe avec la corde des contacts des deux tangentes menées de S à cette courbe. Or les points où touchent ces tangentes sont symétriquement placés par rapport au grand axe (59); la corde qui les joint est donc d'équerre sur cet axe, et comme de plus elle se trouve dans le plan SI, elle est perpendiculaire au plan méridien et s'y projette en G. Ainsi, ses extrémités forment les intersections des deux ellipses EF, HI, et par conséquent, les tangentes menées de S à la dernière sont génératrices de la surface conique ESF. Donc enfin, cette surface a toutes ses droites tangentes à l'ellipsoïde en des points de l'ellipse EF, et les deux surfaces se touchent selon la même ellipse.

Du reste, il est clair que le cône est circulaire, puisque la projection conique de l'ellipse EF, faite du point S, donne un cercle sur un plan convenablement placé (128).

189. *Une sphère peut être touchée intérieurement selon un cercle par un ellipsoïde aplati, quand son centre est sur l'axe de révolution.*

Soit E la rencontre de l'axe de révolution PP′ (P. V, F. 12) avec la normale d'un point quelconque F d'une ellipse méridienne. Le cercle décrit de E avec le rayon EF touche l'ellipse extérieurement en F (141) et en est touché intérieurement. Or, la révolution de la demi-ellipse PFP′ et du demi-cercle correspondant, autour de PP′, engendre un ellipsoïde et une sphère dont les méridiennes de même plan se touchent en un point du cercle FG décrit par le contact F. La surface sphérique est donc touchée intérieurement selon ce cercle par la surface ellipsoïdale.

190. *Une sphère peut être touchée extérieurement selon un cercle par un ellipsoïde alongé, quand son centre est sur l'axe de révolution.*

Soit E la rencontre de l'axe de révolution PP′ (P. V, F. 13) avec la normale d'un point quelconque F d'une ellipse méridienne. Le cercle décrit de E avec le rayon EF touche l'ellipse intérieurement en F (140) et en est touché extérieurement. Or, la révolution de la demi-ellipse PFP′ et du demi-cercle correspondant, autour de PP′, engendre un ellipsoïde et une sphère dont les méridiennes de même plan se touchent en un point du cercle FG décrit par le contact F. La surface sphérique est donc touchée extérieurement selon ce cercle par la surface ellipsoïdale.

191. *Une sphère et un ellipsoïde ne peuvent point se toucher selon une ellipse.*

Si une ellipse formait le contact, elle serait l'intersection de son propre plan et de la surface sphérique. Or, tout plan coupe cette surface selon un cercle.

192. Un cylindre ou un cône est *circonscrit* à un ellipsoïde, quand la surface cylindrique ou conique et les bases planes sont tangentes à la surface ellipsoïdale.

Il y a égalité de volume entre tous les cylindres circonscrits à un ellipsoïde qui ont chacun leurs bases parallèles à la courbe de contact.

Soit EF (P. V, F. 14) la courbe de contact d'un ellipsoïde et d'un cylindre circonscrit dont les bases GH, IK sont parallèles à EF. Ces bases sont des ellipses égales à l'ellipse EF, et la superficie de celle-ci (162) vaut $\frac{\pi \times EF \times AB}{4}$, car son grand axe projeté en O égale AB, celui de l'ellipse génératrice. Si donc nous tirons IL perpendiculairement au plan GH, le volume du cylindre circonscrit est

$$\frac{\pi \times EF \times AB \times IL}{4}.$$

Or quelle que soit la direction des tangentes parallèles GK, HI, leurs contacts E, F sont toujours les extrémités d'un diamètre (55). L'ellipse de contact a donc, dans tous les cas, un grand axe égal à AB.

Les tangentes GH, IK, parallèles à EF, ont aussi leurs contacts aux extrémités d'un diamètre MN, et ce diamètre est le conjugué de EF (54), et il est parallèle aux tangentes GK, HI. Ainsi,

$$EK = ON = FI, \quad EG = OM = FH,$$

et comme $OM = ON$, $EK = EG$, $FI = FH$; de même

$$MG = MH, \quad NK = NI,$$

et le parallélogramme GHIK a des diamètres conjugués pour lignes-milieux. Sa superficie $GH \times IL$ ou $EF \times IL$ est donc celle de la section méridienne de tout cylindre circonscrit dont les bases sont parallèles à la courbe de contact (105). Par conséquent, l'expression $\frac{\pi \times EF \times AB \times IL}{4}$ est constante et convient au volume de tout cylindre circonscrit analogue à GHIK.

193. *De tous les cylindres circonscrits à un ellipsoïde, ceux dont les bases sont parallèles à la courbe de contact, ont le moindre volume.*

On vient de voir que la section méridienne de chacun de ces cylindres forme un parallélogramme circonscrit dont les lignes-milieux sont des diamètres conjugués. La superficie $EF \times IL$ est donc un minimum (106). Or le produit $\frac{\pi \times AB}{4}$ reste le même pour tous les cylindres circonscrits. Conséquemment, le volume $\frac{\pi \times EF \times AB \times IL}{4}$ est moindre que tout autre pour lequel EF se trouverait remplacée par une tangente qui ne lui serait pas parallèle, et IL par une autre hauteur.

194. *Le cône qui, circonscrit à un ellipsoïde, a sa base parallèle à la courbe de contact, est moindre en volume que tout autre cône circonscrit de même sommet.*

Soit E′F′ un plan tangent parallèle à l'ellipse EF qui ait I pour contact (P. V, F. 11), et un autre plan tangent LM qui touche l'ellipsoïde en I′. Ces plans coupent le cône ESF selon deux ellipses dont l'intersection est une droite perpendiculaire au plan méridien de la figure, puisque les deux plans tangents le sont eux-mêmes, et le point K sur lequel se projette cette intersection se trouve nécessairement entre I et I′.

Le diamètre IO de l'ellipse méridienne est le conjugué du diamètre parallèle à la tangente E′F′ ou à la corde EF (54). Le croisement G de IO, EF est donc le milieu de cette corde (35). Mais SG passe aussi par le centre O (58). Donc S, G, O, I sont quatre points en ligne droite; I est le milieu de E′F′, comme G est celui de EF, et l'on a $KF' > IF'$, puis à plus forte raison $KF' > KE'$. On a de plus $KM > KL$, car l'oblique KM surpasse l'oblique KF′, tandis que l'oblique KL est surpassée par l'oblique KE′, Ainsi, les deux portions d'ellipse qui se projettent sur KF′ et KM ont plus d'étendue que celles qui se projettent sur KE′, KL. Comme d'ailleurs les deux coins F′KM, E′KL sont égaux, évidemment le solide formé par le premier et la surface conique MSE′ surpasse en volume le solide formé par le second et la même surface courbe. Or le solide E′KL ajouté au solide LKF′S donne le cône circonscrit E′SF′ dont la base E′F′ est parallèle à la courbe de contact EF. Le solide

FKM ajouté au solide LKF'S donne le cône circonscrit LSM dont la base LM n'est pas parallèle à l'ellipse de contact EF. Donc enfin le premier cône est moindre que le second.

Combinaisons des ellipsoïdes.

195. *Des ellipsoïdes sont semblables quand leurs axes de révolution sont proportionnels aux diamètres des plus grandes circonférences de leurs surfaces.*

Toutes les sections méridiennes de l'un donnent alors une ellipse semblable à celle des sections méridiennes de l'autre (150), et le plus petit est évidemment la copie réduite du plus grand.

196. *L'intersection de deux ellipsoïdes est un cercle, si leurs axes de révolution se confondent.*

La démonstration est absolument la même que celle du n° 183.

197. *L'intersection de deux surfaces ellipsoïdales est une ellipse, lorsque les axes de révolution* PP', pp' (P. V, F. 15) *sont dans un même plan, et que le milieu* G *de la plus grande corde commune* EF *partage le diamètre* HI *d'un cercle de l'une en deux parties réciproquement proportionnelles aux deux parties qu'il forme sur le diamètre* H'I' *d'un cercle de l'autre.*

Concevons un plan qui prenne EF et soit perpendiculaire au plan méridien qu'ont en commun les deux ellipsoïdes. Il coupe la surface PP' selon une ellipse (171) qui a pour petit axe la corde G du cercle HI, et $\frac{1}{4}G^2 = GH \times GI$. Il coupe la surface pp' selon une ellipse qui a pour petit axe la corde G' du cercle H'I', et $\frac{1}{4}G'^2 = GH' \times GI'$. Or, si $GH : GH' :: GI' : GI$, $GH \times GI = GH' \times GI'$, $G' = G$, et les deux ellipses ont le même petit axe. Donc, puisque d'ailleurs EF est le grand axe de l'une et de l'autre, elles se confondent et forment l'intersection des deux surfaces.

198. *Deux ellipsoïdes ne peuvent se toucher extérieurement qu'en un seul point.*

La démonstration est la même que celle du n° 185.

199. *Deux surfaces ellipsoïdales de même espèce ne peuvent se toucher qu'en un pôle, lorsque l'une renferme l'autre et que les axes de révolution sont sur la même droite.*

D'abord, le contact en un pôle est possible, puisque les ellipses méridiennes de même plan peuvent se toucher en ce point (156 et 157). Ensuite, il ne saurait y avoir un autre contact, car les deux ellipses méridiennes qui le contiendraient, devraient s'y toucher, et elles ne le peuvent point.

200. *Deux surfaces ellipsoïdales ne peuvent se toucher qu'en un point commun à leurs plus grands cercles, lorsque ces cercles étant*

inégaux se trouvent dans un même plan et que l'une des surfaces renferme l'autre.

Les plus grands cercles étant dans le même plan peuvent se toucher, et avoir à leur contact la même tangente, ainsi que la même normale. Cette normale commune rencontre d'équerre les axes de révolution, et comme ces axes sont parallèles, étant perpendiculaires au plan des deux grands cercles, leur plan contient le contact des circonférences. Ainsi, par ce contact passeront deux ellipses méridiennes dont les petits axes seront sur la même droite. Elles s'y toucheront donc (157) et y auront la même tangente. Conséquemment, les deux surfaces ellipsoïdales posséderont au même point deux tangentes communes, et parce que le plan de ces tangentes constitue un plan tangent commun (173), les surfaces courbes se toucheront au contact même de leurs grands cercles. Mais il ne peut y avoir ailleurs tangence entre elles, car deux ellipses méridiennes de même plan devraient se toucher au point commun, et le fait est impossible (157).

201. *Une surface ellipsoïdale ne peut être touchée extérieurement par une autre qu'en l'un de ses pôles, lorsque son axe de révolution se trouve sur un diamètre du plus grand cercle de cette autre et moindre que le même diamètre.*

L'axe de révolution est la normale des pôles de la première surface, et le diamètre est normal à la seconde. Les deux surfaces peuvent donc avoir au même point une normale commune, un plan tangent commun et se toucher. Or ce point est l'un des pôles de la première surface et appartient à la plus grande circonférence de la seconde.

Du reste, le contact ne saurait avoir lieu nulle part ailleurs, car les deux ellipses méridiennes qui le contiendraient, se trouvant dans des plans différents, auraient des normales différentes, et le même plan ne pourrait pas être perpendiculaire à ces deux droites, ni tangent aux deux surfaces (174).

202. *Deux surfaces ellipsoïdales concentriques dont l'une renferme l'autre, se touchent par leurs pôles, quand elles ont le même axe de révolution, et par leurs grands cercles, quand ces cercles ont le même diamètre.*

Dans le premier cas, en effet, les ellipses méridiennes de même plan se touchent aux pôles (159), et dans le second, elles se touchent aux points où elles croisent les plus grands cercles.

203. *Une surface ellipsoïdale est touchée en ses pôles par une autre qui lui est concentrique, si un diamètre du plus grand cercle de celle-ci forme l'axe de révolution de celle-là.*

Alors, en effet, les deux ellipses méridiennes de même plan ayant l'axe de révolution de la première surface pour axe commun, se touchent aux extrémités de cet axe (159), et il en est de même du plus grand cercle de la seconde surface et de l'ellipse méridienne selon laquelle le plan de ce cercle coupe la première. Il y a donc à chaque extrémité deux tangentes communes, et par conséquent même plan tangent.

204. *Deux surfaces ellipsoïdales concentriques et de même espèce, dont les axes de révolution se confondent, ne sont point équidistantes, lors même que la différence de ces axes égale celle des diamètres des deux grands cercles.*

Les distances des deux surfaces se mesurent selon les normales de la plus petite; ces normales se trouvent toutes dans des plans méridiens (175) et sont aussi normales des ellipses méridiennes de la moindre surface. Or leurs parties comprises entre ces ellipses et celles de même plan qui appartiennent à la grande surface, sont inégales (158). Donc, les distances des divers points de cette surface à l'autre sont inégales aussi.

Application : Dans les dômes surhaussés ou surbaissés qui ont une épaisseur uniforme, la surface d'extrados ne peut appartenir à un ellipsoïde, comme la surface d'intrados, ou bien si les deux surfaces sont ellipsoïdales, la voûte n'a point partout la même épaisseur.

Mesurages des ellipsoïdes.

205. *La surface d'un ellipsoïde égale la somme des surfaces courbes des troncs de cône dont les bases, très-rapprochées, sont des cercles du corps.*

Ce mesurage n'est qu'approximatif, mais il donne une exactitude suffisante pour la pratique. D'ailleurs, il n'est pas plus possible d'obtenir rigoureusement la superficie d'un ellipsoïde que la longueur d'une ellipse (160).

Probl. (*a*) : *Mesurer la surface d'un ellipsoïde alongé.*

Au moyen d'un *compas à curseur*, instrument analogue à celui dont se sert le cordonnier pour mesurer la longueur du pied humain, prenez la longueur de l'axe de révolution, puis celle d'un diamètre du plus grand cercle; au milieu d'une droite PP′ égale à la première (P. V, F. 16), élevez une perpendiculaire, et portez-y la moitié de la seconde longueur, du croisement O en C, D. Vous aurez les axes PP′, CD d'une ellipse méridienne et vous pourrez tracer cette courbe.

Portez ensuite de C vers P, sur l'arc CP, autant de fois qu'il sera possible, une corde *l* arbitraire, assez petite néanmoins pour que les parties correspondantes de l'ellipse puissent être regardées, sans grande erreur, comme des droites; menez, par les points de division de CP, des cordes parallèles à CD et mesurez-les; additionnez la moitié de CD ou OC, la moitié de la dernière corde FG ou EF et toutes les cordes intermédiaires ; puis multipliez le total par le produit fait avec la longueur l et le rapport 3,1416 de la circonférence à son diamètre ; le résultat vous donnera, en unités carrées, à peu près la surface courbe du segment CDGF de l'ellipsoïde, et en y ajoutant la surface courbe du petit cône PFG, c'est-à-dire le produit $3,1416 \times EF \times FP$, vous aurez celle du demi-ellipsoïde CPD. Il ne restera donc plus qu'à la doubler, pour avoir approximativement la surface courbe de l'ellipsoïde entier.

Démonstration : Le calcul prescrit pour le segment CDGF est basé sur la formule qui donne la surface courbe d'un tronc de cône à bases parallèles. Soient r, r', r'', r''',.... $r^{[n-1]}$, $r^{[n]}$ les longueurs des demi-cordes perpendiculaires à OP. La surface courbe du premier tronc de cône vaut

$$\frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \times l = (r+r')\pi l.$$

Celle du second est

$$(r'+r'')\pi l,$$

celle du troisième

$$(r''+r''')\pi l,$$

et celle du dernier

$$(r^{[n-1]}+r^{[n]})\pi l.$$

On a donc, pour la somme de toutes,

$$\left[(r+r')+(r'+r'')+(r''+r''')\ldots+(r^{[n-1]}+r^{[n]})\right]\pi l$$
$$=\left[r+2r'+2r''+2r'''\ldots.+2r^{[n-1]}+r^{[n]}\right]\pi l.$$

PROBL. (*b*) : *Mesurer la surface d'un ellipsoïde aplati.*

Agissez comme pour l'ellipsoïde alongé, seulement, au lieu de tirer les cordes parallèlement au petit axe dans l'ellipse méridienne, vous les tirerez parallèlement au grand axe, attendu que les cercles, bases des troncs de cônes, sont ici perpendiculaires au petit axe de la courbe, qui est l'axe de révolution dans l'ellipsoïde aplati.

PROBL. (*c*) : *Mesurer la surface courbe d'un segment* HIKL *d'ellipsoïde à bases parallèles* (P. V, F. 16).

Agissez comme dans le problème *a*, pour le segment CDGF. Si le dernier tronc de cône LKMN n'a pas une longueur égale à la longueur arbitraire des autres, vous en calculerez séparément la surface courbe, après avoir trouvé celle du segment HIMN, et vous ferez la somme des deux résultats.

206. *Le rapport du volume d'un ellipsoïde à celui de la sphère qui a l'axe de révolution pour diamètre, égale le rapport des superficies de leurs grands cercles respectifs.*

Soit D le diamètre du plus grand cercle de l'ellipsoïde. La superficie de ce cercle est $\frac{\pi D^2}{4}$. Soit A l'axe de révolution. Tout grand cercle de la sphère qui a cet axe pour diamètre, vaut en superficie $\frac{\pi A^2}{4}$. Le rapport des deux grands cercles est donc

$$\frac{\pi D^2}{4} : \frac{\pi A^2}{4} \quad \text{ou} \quad D^2 : A^2,$$

et nous avons à démontrer que l'ellipsoïde contient la sphère comme le quarré du diamètre de son grand cercle contient le quarré de son axe de révolution.

Considérons les troncs de cône formés dans les deux corps, par des plans HI′, NM′ (P. V, F. 16) perpendiculaires à l'axe de révolution PP′ et fort rapprochés. Désignons par R, r les rayons QI′, QI des deux grandes bases, par R′, r' les rayons RM′, RM des petites bases, et par h la hauteur commune QR. Le tronc de cône de la sphère a pour volume

$$\frac{\pi h}{3}(R^2+RR'+R'^2)=T,$$

et celui de l'ellipsoïde vaut

$$\frac{\pi h}{3}(r^2+rr'+r'^2)=t.$$

Mais (44)

$$QI : QI' :: OD : OP, \qquad RM : RM' :: OD : OP$$

ou bien

$$r : R :: D : A, \qquad r' : R' :: D : A.$$

Donc

$$r=R\frac{D}{A}, \quad r'=R'\frac{D}{A}, \quad r^2=R^2\frac{D^2}{A^2}, \quad rr'=RR'\frac{D^2}{A^2}, \quad r'^2=R'^2\frac{D^2}{A^2},$$

$$t=\frac{\pi h}{3}\left(R^2\frac{D^2}{A^2}+RR'\frac{D^2}{A^2}+R'^2\frac{D^2}{A^2}\right)=\frac{\pi h}{3}(R^2+RR'+R^2)\frac{D^2}{A^2},$$

et

$$\frac{t}{T}=\frac{D^2}{A^2} \quad \text{ou} \quad t : T :: D^2 : A^2.$$

On verrait de même que pour d'autres couples de troncs de cône, on a

$$t' : T' :: D^2 : A^2, \qquad t'' : T'' :: D^2 : A^2, \qquad \text{etc.}$$

Après que les deux solides auront été ainsi décomposés en troncs de cône, il restera deux cônes qui auront P pour sommet commun, et deux autres cônes dont le sommet sera le pôle P′. Les rayons des bases sont EG′ $=$ R″, EG $= r''$, la hauteur commune est EP $= h$, et les volumes valent

$$\frac{\pi h}{3}R''^2=C, \qquad \frac{\pi h}{3}r''^2=c.$$

Mais

$$EG : EG' :: OD : OP \quad \text{ou bien} \quad r'' : R'' :: D : A.$$

Donc

$$r'' = R''\frac{D}{A}, \quad r''^2 = R''^2\frac{D^2}{A^2}, \quad c = \frac{\pi h}{3}R''^2\frac{D^2}{A^2},$$

et

$$\frac{c}{C} = \frac{D^2}{A^2} \quad \text{ou} \quad c : C :: D^2 : A^2.$$

Ainsi,

$$t : T :: t' : T' :: t'' : T'' \ldots :: c : C.$$

Cette suite de rapports égaux donne

$$t + t' + t'' \ldots + c : T + T' + T'' \ldots + C :: c : C :: D^2 : A^2.$$

Or le premier terme est la moitié de l'ellipsoïde, et le second celle de la sphère. Donc enfin ces moitiés et les touts sont entre eux $:: D^2 : A^2$.

207. ***Le volume d'un ellipsoïde est le sixième du produit fait avec le rapport de la circonférence à son diamètre, l'axe de révolution et le quarré du diamètre du grand cercle.***

Soient E le volume de l'ellipsoïde, S celui de la sphère qui a pour diamètre l'axe de révolution, A cet axe, et D le diamètre du plus grand cercle. Le principe 206 donne

$$E : S :: D^2 : A^2, \quad \text{d'où suit} \quad E = S\frac{D^2}{A^2}.$$

Or $S = \frac{\pi A^3}{6}$. Donc

$$E = \frac{\pi A^3}{6} \times \frac{D^2}{A^2} = \frac{\pi A D^2}{6}.$$

208. ***Un ellipsoïde est les deux tiers du cylindre droit et circonscrit qui a même axe.***

Ce cylindre est circulaire; sa base égale le grand cercle de l'ellipsoïde, dont le diamètre a été désigné par D; sa hauteur est l'axe de révolution A, et son volume vaut $\frac{\pi D^2}{4} A = C$. Ainsi,

$$E : C :: \frac{\pi A D^2}{6} : \frac{\pi A D^2}{4} :: \frac{1}{6} : \frac{1}{4}, \quad \text{et} \quad E = \frac{C}{6} : \frac{1}{4} = \frac{4C}{6} = \frac{2}{3}C.$$

Probl. (*a*): ***Mesurer le volume d'un ellipsoïde.***

Prenez, à l'aide d'un compas à curseur, la longueur de l'axe de révolution, puis celle du diamètre du plus grand cercle, et appliquez la formule $E = \frac{\pi A D^2}{6}$, en substituant 3,1416 au facteur π.

Probl. (*b*) : ***Mesurer le volume d'un segment d'ellipsoïde terminé par un ou deux cercles.***

Supposons qu'il s'agisse du segment à deux bases HIMN (P. V, F. 16). Après avoir tracé l'ellipse génératrice, vous décrirez un demi-cercle sur l'axe de révolution PP′, pris pour diamètre ; puis, ayant mesuré les rayons QI′, RM′ des bases circulaires du segment sphérique 2QI′M′R et la hauteur QR, vous calculerez le volume de ce segment. Il ne restera plus qu'à multiplier le résultat par le rapport $\frac{\overline{CD}^2}{\overline{PP'}^2}$, pour avoir le volume du segment ellipsoïdal HIMN.

Soient CD = D, PP′ = A, QI′ = R, RM′ = R′ et QR = H. Comme le segment sphérique vaut la demi-somme des cylindres qui ont R, R′ pour rayons et H pour hauteurs, plus la sphère dont H est le diamètre,

$$2QI'M'R = \frac{\pi R^2 + \pi R'^2}{2} H + \frac{\pi H^3}{6} = (3R^2 + 3R'^2 + H^2)\frac{\pi H}{6},$$

et par conséquent (206), le segment ellipsoïdal

$$HIMN = (3R^2 + 3R'^2 + H^2)\frac{\pi HD^2}{6A^2}.$$

Application : Il peut se faire qu'on ait à jauger la capacité d'une cucurbite ellipsoïdale HPI (P. V, F. 16). Il faut d'abord marquer les extrémités H, I d'un diamètre de l'orifice ; puis, si l'axe du vase est vertical, marquer, à l'aide du fil aplomb, plusieurs points de l'intersection du plan vertical HI avec la surface interne ; tracer, par tous ces points, la courbe HPI ; marquer sur cette courbe, arbitrairement, des points H, N, L, F, et des points I, M, K, G qui soient deux à deux aussi écartés verticalement que leurs correspondants du premier groupe ; noter les écartements verticaux, et mesurer, avec un compas convenable, les diamètres HI, NM, LK, FG. On peut alors construire l'arc HPI de l'ellipse méridienne, en portant les écartements sur une droite PP′, de Q en R, etc., et en donnant aux perpendiculaires QH, QI, RN, RM, etc., les demi-longueurs des diamètres. Le pôle P se détermine d'ailleurs exactement au moyen de la distance verticale QP = H dont le mesurage est facile. L'application du problème *b* (41) donne le centre O qui doit se trouver sur le prolongement de PQ. Prenant OP′ = OP, on a l'axe de révolution A, ce qui permet de décrire le demi-cercle PI′P′, de mesurer QI′ = R, et de calculer la capacité de la calotte sphérique 2QI′P. Cette capacité vaut

$$\frac{\pi R^2 H}{2} + \frac{\pi H^3}{6} = (3R^2 + H^2)\frac{\pi H}{6},$$

et par conséquent, celle de la cucurbite

$$HPI = (3R^2 + H^2)\frac{\pi HD^2}{6A^2}.$$

Quant à la valeur de $D = CD$, on peut la trouver en prolongeant la courbe HPI jusqu'à la perpendiculaire élevée sur PP', au point O. Mais, pour plus d'exactitude, il faudra (44) calculer le quatrième terme de la proportion

$$2QI' : HI :: PP' : CD.$$

Si la cucurbite n'était pas placée sur un fourneau, on en rendrait l'axe vertical, en rendant horizontaux, au moyen de calles, deux diamètres de l'orifice.

HYPERBOLE.

209. Le nom d'*ellipse*, qui signifie *manquement*, ayant été donné à une projection de la circonférence où cette courbe se trouve déprimée perpendiculairement à un diamètre, il était naturel d'appeler *hyperboles*, c'est-à-dire cercles *jetés au-delà* de leurs bornes, d'autres projections dans lesquelles la circonférence prend une extension sans limites. Mais ces projections ne peuvent pas être cylindriques, comme la première (24) ; les droites projetantes doivent concourir ; il faut même que le plan de projection ne les coupe pas toutes du même côté, relativement au concours, pour qu'une circonférence projetée cesse de donner une courbe fermée (127).

La projection conique est *droite* quand l'axe du cône projetant rencontre d'équerre le plan du cercle ; elle est *oblique* toutes les fois que cette condition n'est pas remplie. Dans les deux circonstances, l'hyperbole projection du cercle est symétrique par rapport à deux axes d'équerre (5), si le plan de projection se trouve parallèle à l'axe du cône projetant ; mais la même courbe n'a plus qu'un seul axe de symétrie, lorsque le parallélisme indiqué n'existe pas. Nous considérerons uniquement le premier cas, parce que l'hyperbole doublement symétrique a seule de l'importance ; de plus, la projection conique sera toujours supposée droite, de sorte que nous partirons de la définition suivante.

210. *L'hyperbole est la projection conique et droite d'une circonférence sur un plan parallèle à l'axe du cône projetant.*

Soient les droites égales cd, $a'b'$ les projections orthogonales d'un cercle (P. V, F. 17) ; Sg, $S'g'$, perpendiculaires au milieu de cd, $a'b'$, celles de l'axe du cône projetant ; S, S' celles du sommet de ce cône. Comme Sg, $S'g'$ sont parallèles à la ligne de terre, il y a parallélisme entre l'axe qu'elles représentent et le plan horizontal de projection. Par conséquent, la projection conique du cercle sur ce plan nous donnera l'hyperbole qu'il s'agit d'étudier.

Or, les génératrices droites du cône qui passent par les points projetés sur a', b' ont $a'S'a''$, $S'b'b''$ pour projections verticales, Sg pour projection horizontale, et elles percent le plan horizontal en A, B, intersections de Sg avec les perpendiculaires $a''A$, $b''B$ élevées sur la ligne de terre $a''b''$. Les points A, B sont donc les projections coniques des extrémités du diamètre vertical du cercle, et conséquemment A, B appartiennent à l'hyperbole.

Les extrémités du diamètre horizontal du cercle sont sur deux génératrices droites du cône qui ont Sc, Sd pour projections horizontales, et $S'g'$ pour projection verticale. Comme $S'g'$ est parallèle à la ligne de terre, les deux génératrices ne peuvent percer le plan horizontal qu'à l'infini de chaque côté de S. Ainsi, les projections coniques des points correspondants de c, d sont situés à des distances infinies de S, ou bien les droites Sc, Sd et leurs prolongements ne rencontrent l'hyperbole qu'à l'infini.

Le centre du cercle, dont les projections orthogonales sont g, g', a aussi pour projection conique un point (G) infiniment éloigné de S à droite ou à gauche*.

Cherchons maintenant la projection conique de la corde horizontale projetée orthogonalement en k'. Pour avoir sa longueur $e'i'$, nous rabattrons le cercle sur le plan vertical. Portant la moitié de $e'i'$ sur cd, de g en e et en i, nous obtiendrons les droites Se, Si pour projections horizontales des génératrices du cône qui contiennent les points $\underline{e, k'}$, $\underline{i, k'}$**, et $k'S'k''$ pour leur projection verticale commune. Ces génératrices percent donc le plan horizontal de projection en E, I, deux autres points de l'hyperbole.

Si $b'h' = a'k'$, h' forme la projection verticale d'une corde horizontale $l'm'$ égale à $e'i'$. La projection horizontale se confond avec ei, et par conséquent, la projection conique est LM, perpendiculaire élevée en h'' sur la ligne de terre.

Les autres cordes du cercle dont les milieux sont placés sur $a'b'$, comme h', k', ont évidemment des projections coniques respectivement situées comme LM, EI, qui n'atteignent point les côtés de l'angle cSd, ni les prolongements de ces côtés. L'hyperbole se compose donc des arcs AE, AI, BL, BM étendus à l'infini, de chaque côté des points A, B, dans les deux angles formés par les droites Sc, Sd qui se croisent évidemment au milieu de AB.

Ainsi, *l'hyperbole est une courbe à deux branches séparées* EAI, LBM, *de plus en plus écartées, infiniment grandes, et ouvertes.*

PROBLÈME : *Déterminer un cercle dont une hyperbole donnée soit la projection conique.*

Puisque chaque branche d'une hyperbole s'étend à l'infini, il ne suffit pas, pour indiquer la courbe complètement, d'en donner les arcs EAI, LBM (P. V, F. 17) ; il faut encore faire connaître les droites Sc, Sd qui la limitent en se croisant à égales distances des deux branches (210).

Tracez la bissectrice AB de l'angle cSd, et une parallèle $a''b''$;

---

* Nous mettrons entre deux crochets toute lettre qui devrait être placée à l'infini.

** Nous soulignerons toujours ainsi les deux projections orthogonales d'un point ou d'une droite qu'il faudra désigner.

élevez sur AB aux points A, B où elle rencontre les branches de l'hyperbole, des perpendiculaires Aa'', Bb''; la partie Bc'' de la dernière, comprise entre AB et Sc sera le rayon d'un cercle dont l'hyperbole formera la projection conique. Afin de mettre ce cercle dans la position qu'il doit avoir pour produire l'hyperbole, et de former la projection verticale du cône projetant, vous porterez Bc'' sur son prolongement, de b'' en g''' et de g''' en a'''; puis, ayant mené $g'''S'$ parallèlement à $a''b''$, jusqu'à la rencontre de SS'' parallèle à Bc'', vous tirerez les droites $a'''S'a''$, $b''S'$.

Démonstration : Il est clair d'abord que $a'''S'$ aboutira au point a'', car le triangle $a'''S'b''$ ayant été fait symétrique, il s'ensuit que le triangle $a''S'b''$ l'est aussi, et que

$$a''S'' = b''S'' = BS = AS.$$

Je dis ensuite que toute corde LM de l'hyperbole, perpendiculaire à AB, est la projection conique d'une corde horizontale du cercle projeté verticalement sur $a''b''$. En effet, LM est la projection conique de la corde horizontale h' du cercle g' (210), et

$$S'h' : h' :: S'h'' : LM.$$

Mais, si x représente la projection conique de la corde horizontale h''' du cercle g''',

$$S'h''' : h''' :: S'h'' : x;$$

d'ailleurs,

$$S'h' : h' :: S'h''' : h''',$$

car le cône $\underline{a'''S'b'', c''Sd''}$ se confond évidemment avec le cône $\underline{a'S'b', cSd}$; par conséquent,

$$S'h'' : LM :: S'h'' : x, \quad \text{et} \quad x = LM.$$

211. *Nulle droite ne peut avoir plus de deux points qui soient communs à l'hyperbole.*

L'hyperbole est la projection conique d'une circonférence. Le plan qui contient la droite D, transversale de cette projection, et le sommet du cône projetant, coupe le plan du cercle selon une seconde droite D′ dont la première forme la projection conique. Par conséquent, les points communs à cette première droite D et à l'hyperbole sont les projections coniques d'autant de points communs à la droite D′ et à la circonférence. Si donc la droite D avait plus de deux points qui fussent sur l'hyperbole, D′ en aurait aussi plus de deux qui seraient sur la circonférence, ce qui est impossible.

Application : Lorsqu'un plan horizontal AB (P. V, F. 18) se trouve éclairé par un fallot à verres ronds, la courbe qui sépare l'ombre de la lumière est souvent, de chaque côté, une branche d'hyperbole.

Supposons d'abord le milieu de la flamme en S, au niveau des centres de verres égaux et parallèles. Les rayons lumineux qui traversent ces verres forment un cône à deux nappes ASB′, BSA′, telles que les génératrices SA′, SB de l'une sont les prolongements des génératrices SA, SB′ de l'autre. Les mêmes rayons font donc sur le plan horizontal une projection conique et droite du cercle CD ou du cercle EF, et comme ce plan est évidemment parallèle à l'axe SG du cône projetant, la partie sombre AB est séparée des parties éclairées AH, BI par les deux branches d'une hyperbole doublement symétrique, dont les points A, B sont ceux qui ont le moindre écartement (210).

Si le milieu de la flamme se trouve au-dessus ou au-dessous de S, en *s*, par exemple, les rayons lumineux, au lieu de former une seule surface conique à deux nappes, produisent deux cônes égaux *ask*, *bsl* qui n'ont rien de commun que le sommet. Chacun de ces cônes fait une projection conique et oblique du verre correspondant, et donne une hyperbole qui n'a qu'un seul axe de symétrie, parce que le plan AB n'est pas parallèle aux axes *sg*, *sg′* (209). L'ombre *ab* est alors séparée de la lumière, d'un côté par la branche de gauche de l'hyperbole que donne le cône *ask*, de l'autre côté par la branche de droite de l'hyperbole que produit le cône *bsl*. La branche de droite de la première courbe serait dans la partie éclairée du plan, au-delà de I, et la branche de gauche de la seconde se trouverait aussi dans la lumière, au-delà de H.

Ainsi, certains effets de lumière exigent des peintres la connaissance des hyperboles. Elle est nécessaire encore aux dessinateurs, aux lithographes, aux graveurs, pour construire les figures des ouvrages de mathématiques qui traitent des courbes; aux appareilleurs, dans plusieurs cas de la coupe des pierres; aux lampistes, pour la confection des réflecteurs divergents; aux architectes, pour construire des cheminées parfaites; aux tourneurs, pour façonner les formes des moules de plusieurs sortes de vases. Les vanniers même emploient l'hyperbole dans leurs corbeilles, et les serruriers ont à les imiter quand ils confectionnent en verges de fer des piédouches destinés aux tables rondes.

« Nous entrerons dans quelques détails sur ces diverses applications, à mesure que nous aurons établi les principes dont elles dépendent. »

CORDES DE L'HYPERBOLE.

212. Les points A, B où les deux branches de l'hyperbole se trouvent le moins écartées (P. V, F. 17) sont les *sommets* de cette courbe.

Toute corde tirée d'une branche à l'autre, parallèlement à la droite AB *des sommets, prolonge les projections coniques d'un diamètre du cercle projeté sur l'hyperbole.*

La droite AB prolonge les projections coniques A(G), B(G) des deux parties $a'g'$, $b'g'$ du diamètre $a'b'$ (210). Il suffit donc d'établir que tous les diamètres du cercle ont des projections coniques parallèles. Or ces projections, devant se rencontrer sur celle du centre g, n'ont de point commun qu'à l'infini, puisque ce sont des droites. Donc, en réalité elles ne se coupent pas et sont parallèles.

213. *Les cordes perpendiculaires à la droite des sommets forment les projections coniques des cordes qui, dans le cercle projeté sur l'hyperbole, sont parallèles au plan de cette courbe.*

La corde horizontale k', étant perpendiculaire au plan vertical de projection (P. V, F. 17), a sa projection conique EI perpendiculaire à la ligne de terre. Mais, parce que l'axe du cône projetant et le diamètre $a'b'$ sont parallèles au même plan, la projection conique AB de ce diamètre doit être parallèle à la ligne de terre. Donc, EI est aussi perpendiculaire à AB.

214. *Toute corde tirée entre les deux branches, par le milieu de la droite des sommets, prolonge les projections coniques, infiniment grandes, d'une corde qui, dans le cercle projeté sur l'hyperbole, se trouve perpendiculaire au plan de cette courbe.*

Le plan qui projette coniquement la corde verticale $q'r'$ (P. V, F. 17) contient nécessairement la verticale $\underline{S, S'S''}$, et sa trace horizontale QR passe conséquemment par le pied S de cette verticale. Or le point S est le milieu de la droite AB des sommets (210). D'ailleurs, le milieu t' de $q'r'$, étant sur le diamètre horizontal du cercle, a sa projection conique sur une parallèle à AB (212) située à une distance infinie de S; ce qui fait que Q(T), R(T), projections coniques de $q't'$, $r't'$, sont en effet infiniment grandes, ou que la droite QR ne rencontre réellement l'hyperbole qu'aux deux points Q, R (211).

215. *Les cordes parallèles des branches sont les projections coniques de cordes qui, dans le cercle projeté sur l'hyperbole, concourent toutes à l'intersection du diamètre horizontal et d'une polaire.*

Menons, par un point quelconque n' du cercle g' rabattu (P. V, F. 17), une tangente qui s'arrête au point P' du diamètre horizontal $c'd'$ prolongé. La perpendiculaire P'P'', élevée sur d'P', sera la polaire du pôle p', intersection de $c'd'$ et de la corde $n'n''$ tirée parallèlement à P'P'' *. Portons g'P' sur cd, de g en P. La droite SP sera la projection horizontale de l'horizontale qui joint le sommet $\underline{S, S'}$ du cône projetant à l'intersection de la polaire et du diamètre horizontal $\underline{cd, g'}$. Or, les plans par lesquels seront projetées coniquement les cordes $a'e'$P', $q'o'$P', contiendront l'horizontale que représente SP, et leurs traces AE, QO se trouveront parallèles à cette droite. Donc, ces traces, projections coniques de $a'e'$, $q'o'$, sont parallèles entre elles.

216. *Les cordes parallèles comprises entre les branches prolongent les projections coniques de cordes qui, dans le cercle projeté sur l'hyperbole, se croisent toutes en un point du diamètre horizontal.*

Soient, dans le cercle rabattu (P. V, F. 17), les cordes $b'e'$, $o'r'$

* Voyez notre Géométrie appliquée à l'industrie, 3e édit., p. 134.

qui se croisent au point p' du diamètre horizontal $c'd'$. Si nous portons $g'p'$ sur cd, de g en p, Sp sera la projection horizontale de l'horizontale qui joint le sommet $\underline{S, S'}$ du cône projetant au point $\underline{p, g'}$. Les plans par lesquels seront projetées coniquement les cordes $\overline{b'e'}$, $o'r'$, contiendront cette horizontale et traceront, sur le plan de l'hyperbole, des droites BE, OR parallèles à Sp. Donc, ces droites sont parallèles entre elles. Comme d'ailleurs la projection conique de p' est sur une parallèle à AB infiniment éloignée (212), les prolongements de BE, OR, poussés jusqu'à l'infini, forment à gauche les projections coniques de $e'p'$, $o'p'$, et à droite celles de $b'p'$, $r'p'$.

217. *Quand les cordes parallèles comprises entre les deux branches, et les cordes parallèles tirées dans l'une de ces branches sont telles qu'une* BE *du premier groupe, menée par l'un* B *des sommets* (P. V, F. 17), *rencontre sur la courbe celle* AE *du second groupe à laquelle appartient l'autre sommet* A, *les deux groupes proviennent respectivement de cordes qui, dans le cercle projeté sur l'hyperbole, se croisent en un pôle* p', *et de cordes qui, dans le même cercle, concourent au milieu* P' *de la polaire correspondante.*

Les cordes parallèles BE, OR prolongent les projections coniques des cordes $b'e'$, $o'r'$ qui se croisent en un certain point p_1' du diamètre horizontal $c'd'$ (216). Les cordes parallèles AE, QO sont les projections coniques des cordes $a'e'$, $q'o'$ qui se croisent au milieu P' de la polaire P'P'' du pôle p' (215). Il s'agit donc seulement de démontrer que le croisement p_1' se confond avec le pôle p'.

Le rayon du cercle est moyen proportionnel entre les distances du centre au pôle et à la polaire, de sorte que

$$\overline{b'g'}^2 = p'g' \times P'g'.$$

Il s'ensuit

$$p'g' = \frac{\overline{b'g'}^2}{P'g'}.$$

Mais le triangle $p_1'g'b'$ se trouve semblable au triangle $a'e'b'$, et celui-ci au triangle $a'g'P'$. Par conséquent,

$$p_1'g' : a'g' :: b'g' : P'g',$$

ce qui donne

$$p_1'g' = \frac{\overline{b'g'}^2}{P'g'}, \quad \text{puis} \quad p_1'g' = p'g'.$$

218. *Deux cordes* OQ, OR (P. V, F. 17) *menées d'un point* O *de l'hyperbole, parallèlement à celles qui joignent un autre point* E *de la même branche aux sommets* A, B, *ont leurs autres extrémités* Q, R *sur celles d'une corde* QR *par laquelle la droite* AB *des sommets est coupée en deux parties égales.*

La démonstration consiste à faire voir que QR est le prolongement des projections coniques d'une corde qui, dans le cercle projeté sur l'hyperbole, se trouve perpendiculaire au plan de cette courbe (214), ou bien que $q'r'$ est parallèle à $a'b'$.

Les cordes parallèles OR, BE proviennent de cordes $o'r'$, $b'e'$ qui se croisent en un pôle p', et les cordes parallèles OQ, AE sont les projections coniques de cordes $o'q'$, $a'e'$ qui concourent au milieu de la polaire P'P'' de p' (217). Or, si l'on fait pivoter $b'e'$ sur p', et en même temps $a'e'$ sur P', la seconde corde aura la position de $q'o'$, quand la première se confondra avec $o'r'$, et alors la corde verticale $a'b'$ sera devenue $q'r'$. Il ne s'agit donc plus que d'établir le principe suivant.

Lorsque deux côtés d'un triangle a'e'b' *inscrit au cercle pivotent, l'un* a'e' *sur le milieu* P' *d'une polaire, l'autre* b'e' *sur le pôle* p' *correspondant, le troisième côté reste constamment parallèle à sa première position.*

Rendons la sécante $P'a'$ tangente au cercle; les points a', e' se confondent en n'; le triangle $a'e'b'$ se réduit à la corde $n'n''$ parallèle à $a'b'$, et les sommets a', b' ont parcouru les arcs égaux $a'n'$, $b'n''$. Amenons $P'a'$ sur $P'd'$; les points a', e' deviennent d', c'; b' passe aussi en d'; le triangle $a'e'b'$ se réduit au diamètre $c'd'$, et les sommets a', b' ont encore parcouru des arcs égaux $a'd'$, $b'd'$. Nous devons en conclure qu'il y a toujours égalité entre les arcs qu'ont parcourus les mêmes sommets, quand le triangle $a'e'b'$ a pris une nouvelle position quelconque. Lors donc que $a'e'b'$ est devenu $q'o'r'$, les arcs $a'q'$, $b'r'$ sont égaux, et $q'r'$ se trouve parallèle à $a'b'$.

DIAMÈTRES DE L'HYPERBOLE.

219. *La droite* AB *des sommets* (P. V, F. 17) *est un axe de l'hyperbole* (5).

En effet, la corde EI d'équerre sur AB est la projection conique de la corde $\overline{ei,\ k'}$ du cercle g' projeté sur l'hyperbole (213); ces deux horizontales, étant donc dans le même plan projetant, sont parallèles; les droites projetantes, que représentent eE, gK, iI, et qui se croisent au sommet $\overline{\mathrm{S},\ \mathrm{S}'}$ du cône, les divisent de la même manière. Or le point $\overline{g,\ k'}$ est le milieu de $\overline{ei,\ k'}$. Conséquemment, l'intersection K de AB et de EI forme aussi le milieu de cette corde de l'hyperbole.

On démontrerait de même que AB partage en deux parties égales toute autre corde parallèle à EI.

Il s'ensuit que *la droite des sommets prolongée divise chaque branche de l'hyperbole et toute la courbe en deux parties égales, symétriquement placées relativement à cette droite.*

220. *La perpendiculaire* SS'' *au milieu* S *de la droite des sommets est aussi un axe de l'hyperbole* (P. V, F. 17).

Les génératrices droites du cône projetant qui passent par les extrémités i', l' du diamètre $i'l'$ du cercle g', ont pour projections orthogonales iSI, $k'S'k''$, SlL, $S'h'h''$, et les points I, L de l'hyperbole sont les projections coniques de i', l'. Or le triangle $h''S'k''$ est symétrique, comme le triangle $k'S'h'$, ce qui fait que S'' se trouve au milieu de la base $h''k''$; la corde d'hyperbole IL, qui prolonge la projection conique du diamètre $i'l'$, est parallèle à AB (212) et à $h''k''$; k''I, h''L sont parallèles à SS''. Par conséquent, SS'' coupe d'équerre et au milieu la corde IL, ainsi que toutes les autres cordes parallèles à celle-là.

Il est clair, d'après cela, que *la perpendiculaire au milieu de la droite des sommets partage l'hyperbole en deux parties égales, formées chacune d'une des branches, et symétriquement placées par rapport à cette perpendiculaire.*

221. Comme la droite SS'' d'équerre au milieu de AB (P. V, F. 17) ne pénètre point dans l'angle cSd, ni dans son opposé, elle s'écarte de plus en plus des branches de l'hyperbole (210). Cette circonstance doit lui faire donner le nom d'*axe déclinant*. Par opposition, la droite des sommets, qui coupe la courbe en deux points, a été appelée *axe transverse*.

Afin de mettre l'hyperbole dans le même cas que l'ellipse, qui est complètement déterminée par ses deux axes, on limite ordinairement l'axe déclinant à deux points C, D, dont les distances CS, DS au croisement des deux axes égalent chacune la hauteur $S'S''$ à laquelle le sommet du cône projetant se trouve au-dessus du plan horizontal de projection, et la droite CD est désignée par l'expression conventionnelle *longueur de l'axe déclinant.*

L'axe transverse et l'axe déclinant sont des diamètres conjugués (35).

Les cordes que divise chaque axe en deux parties égales se trouvent effectivement parallèles à l'autre; car il les coupe à angle droit (5) et les deux axes sont d'équerre (220).

Problème : *Trouver la demi-longueur de l'axe déclinant d'une hyperbole dont on connaît seulement les sommets et un autre point quelconque.*

Elevez une perpendiculaire CD au milieu de la droite AB des sommets (P. V, F. 17); joignez le troisième point donné E aux deux autres A, B, par les cordes EA, EB; marquez les intersections X, Y de ces cordes avec la perpendiculaire CD; décrivez une demi-circonférence dont XY soit le diamètre; le point Z où elle coupera l'axe transverse donnera, pour la demi-longueur cherchée, SZ, moyenne proportionnelle entre SX et SY; de sorte que si vous rapportez SZ sur CD, de S en C et en D, ces deux derniers points seront les extrémités de l'axe déclinant.

Démonstration : En effet, la droite $S'S''$, SX se trouve dans le plan vertical $SS''S'$ et dans le plan S, S' AE. La droite $a'e'$ se trouve aussi dans ce dernier plan, qui la projette coniquement sur AE, et de plus elle est sur le plan vertical $a'b'$ du cercle, lequel est parallèle à SS''S'. Ces deux droites, étant dans deux plans parallèles, ne peuvent se rencontrer, et ne se rencontrant pas, quoique sur le même plan S, S' AE, elles sont parallèles.

On verrait de même que la droite S'S'', SY, est parallèle à $b'e'$. Par conséquent, les droites S'S'', SX, S'S'', SY se coupent d'équerre comme $a'e'$, $b'e'$, et la verticale S, S'S'' est une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse XY. Cette verticale est donc moyenne proportionnelle entre les deux parties SX, SY de l'hypoténuse, et la demi-longueur S'S'' de l'axe déclinant vaut SZ.

222. *Toute corde* QR (P. V, F. 17) *qui passe par le croisement* S *des axes d'une hyperbole s'y trouve partagée en deux parties égales.*

La corde horizontale QR prolonge les projections coniques d'une corde verticale $q'r'$ du cercle g' (214). Les droites qui projettent coniquement les extrémités q', r', vont du sommet S, S' aux points Q, R, et forment un triangle symétrique dont QR est la base, puisqu'elles sont au nombre des génératrices droites du cône projetant, et que toutes ces génératrices font le même angle avec la verticale S, S'S''. Par conséquent, cette verticale a son pied S au milieu de QR.

223. *Toute corde* NS *tirée par le croisement des axes* (P. V, F. 17) *est un diamètre de l'hyperbole* (5).

Traçons la corde BE parallèlement à NS, et joignons E au sommet A. La droite NS coupera AE au milieu, parce qu'elle coupe ainsi AB. Tirons ensuite, d'un point quelconque O de la courbe, deux cordes OQ, OR qui soient respectivement parallèles à AE, BE. La corde QR passera par le milieu S de AB (218); elle y sera divisée en deux parties égales (222), et conséquemment, NS divisera de la même manière OQ, ainsi que toute autre corde parallèle à AE.

224. *Toute droite* UV *qui, tirée par le croisement* S *des axes d'une hyperbole, ne rencontre pas la courbe, est néanmoins un diamètre* (P. V, F. 17).

Traçons la corde AE parallèlement à UV; cette dernière droite coupera la corde BE au milieu, puisqu'elle coupe ainsi AB. Menons par S une autre corde quelconque QR; UV la divisera aussi en deux parties égales (222). Or, QO, RO, parallèles à AE, BE, se rencontrent sur l'hyperbole (218). Conséquemment, RO est une corde que UV divise comme elle divise QR. On verrait de la même manière que UV partage en deux parties égales toute autre corde parallèle à BE. Donc enfin, cette droite UV est un diamètre (5).

225. *Une droite qui ne passe point par le croisement des axes d'une hyperbole ne forme pas un diamètre, et conséquemment ce croisement est le centre de la courbe* (5).

Il suffit de démontrer qu'une pareille droite ne peut diviser en parties égales deux cordes parallèles quelconques. Supposons qu'elle passe par les milieux des cordes parallèles AE, QO (P. V, F. 17). Le diamètre SN, parallèle à BE, passera aussi par ces mêmes milieux (223). Deux droites différentes auraient donc deux points communs, ce qui est impossible.

On arriverait à la même conséquence, si la droite était supposée couper au milieu deux cordes parallèles telles que BE, RO (224).

226. *L'hyperbole n'a que deux axes.*

Si elle en avait un troisième, il passerait par le centre, comme diamètre (225), et serait transverse ou déclinant. Dans le premier cas, les cordes qu'il couperait d'équerre et par le milieu appartiendraient à chaque branche; dans le second, elles iraient d'une branche à l'autre. Une des premières contiendrait nécessairement le sommet A (P. V, F. 17), et serait, par exemple, AE. Le troisième axe, divisant AE, AB en deux parties égales, se trouverait parallèle à BE; l'angle AEB serait droit; l'angle BAE, aigu, et AS > ES''', relation que la projection conique rend évidemment impossible (210).

Parmi les cordes comprises entre les deux branches, une contiendrait le sommet B. Le troisième axe diviserait donc de la même manière AB et BE, par exemple; il serait parallèle à AE; l'angle AEB se trouverait encore droit, et il s'ensuivrait de nouveau la relation impossible AS > ES'''.

227. *Deux diamètres* NS, UV (P. V, F. 17) *sont conjugués, s'ils se trouvent respectivement parallèles à des cordes* BE, AE *tirées des sommets à un même point* E *de l'hyperbole* (35).

Le diamètre NS coupe en effet AE par le milieu, et (223) il divise de la même manière toute autre corde QO parallèle à UV. Ce dernier diamètre coupe BE par le milieu, et (224) il divise de la même manière toute autre corde RO parallèle à NS.

228. *Tout diamètre de l'hyperbole a son conjugué.*

En effet, on peut toujours mener au même point de la courbe, par les sommets, deux cordes dont l'une soit parallèle au diamètre donné, et rien n'empêche de tracer ensuite, par le centre, un diamètre parallèle à l'autre corde. Or ce dernier est conjugué avec le premier (227).

229. *Dans toute paire de diamètres conjugués, l'un est transverse, l'autre déclinant.*

Soient les diamètres conjugués NS, UV respectivement parallèles aux cordes BE, AE (P. V, F. 17). Le premier, coupant par le milieu la corde AE et la corde parallèle BE', coupe aussi les arcs sous-tendus par ces cordes; il a donc deux de ses points sur l'hyperbole, et se trouvant dans le même cas que l'axe AB (221), il doit être appelé *diamètre transverse.*

Le second UV ne saurait rencontrer la courbe à gauche de AE prolongée, ni à droite de BE′ prolongée, puisqu'il ne peut croiser ces cordes et que leurs prolongements n'ont aucun point sur l'hyperbole (211). Il ne saurait non plus couper les arcs AE, BE′; car le second, par exemple, n'est pas rencontré par S*c* (210), et UV, croisant S*c* au centre S, ne peut plus la croiser une seconde fois. Ainsi, le diamètre UV n'a pas de points qui soient communs à l'hyperbole; il est dans le même cas que l'axe S″S‴, et par conséquent, on doit l'appeler *diamètre déclinant.*

230. *L'une ou l'autre des branches de l'hyperbole n'a aucune corde qui soit parallèle à un diamètre transverse.*

Le conjugué de ce diamètre étant déclinant (229) ne peut entrer ni dans l'une, ni dans l'autre branche. Or il devrait y entrer pour diviser en deux parties égales la corde qui serait parallèle au diamètre transverse (35).

231. *Aucune des cordes qui vont d'une branche à l'autre n'est parallèle à un diamètre déclinant.*

Pour aller de la branche de gauche, par exemple, à la branche de droite, la corde devra couper S*c* et le prolongement de S*d* (P. V, F. 17), ou S*d* et le prolongement de S*c* (210). Dans les deux cas, elle formera avec ces droites un triangle où elle se trouvera opposée à l'angle que le diamètre déclinant partage en deux parties (229), et sera coupée par ce diamètre.

Probl. (*a*) : *Trouver le centre d'une hyperbole tracée* (P. V, F. 19).

Solution 1 : Tirez deux cordes parallèles EG, E′G′, l'une dans la branche de gauche, l'autre dans la branche de droite, pour qu'elles soient plus écartées. Marquez les milieux H, H′ de ces cordes; tracez le diamètre HH′, et divisez en deux parties égales la portion II′ comprise entre les deux branches. Le point de division S sera le centre de la courbe (225 et 222).

Solution 2 : S'il n'y a qu'une branche qui soit tracée, il faut tirer deux cordes parallèles EG, KL de cette branche; joindre leurs milieux par une droite indéfinie HI qui sera un diamètre (223); tracer deux autres cordes parallèles KM, EN, et joindre leurs milieux par une droite OS. Le point S où ce second diamètre coupera le premier HI sera le centre cherché (225).

Probl. (*b*) : *Tracer les axes d'une hyperbole donnée.*

Solution 1 : Décrivez du centre S (P. V, F. 19), avec un rayon quelconque, deux petits arcs qui coupent l'une des branches en des points P, Q; abaissez de S une perpendiculaire AB sur la corde PQ; puis menez par S une parallèle CD à cette même corde.

Démonstration : La droite AB est un diamètre, puisqu'elle passe par le centre (223) ; ce diamètre est un axe, puisqu'il coupe d'équerre les cordes parallèles qu'il divise en deux parties égales (5) ; enfin AB est l'axe transverse, puisque cette droite rencontre la courbe (221), et il s'ensuit que CD, perpendiculaire sur AB, forme l'axe déclinant.

Solution 2 : Décrivez du centre S, avec un rayon quelconque, deux arcs qui coupent les deux branches en des points P, R ; abaissez de S une perpendiculaire CD sur la corde PR; puis menez par S une parallèle AB à cette corde.

La démonstration est analogue à la précédente.

Probl. (*c*) : *Tracer deux diamètres conjugués dans une hyperbole donnée.*

Menez par les sommets A, B (P. V, F. 17) deux cordes à un même point quelconque E ; puis tirez par le centre S des parallèles UV, NS à ces cordes. Les diamètres NS, UV seront conjugués (227).

Probl. (*d*) : *Tracer le conjugué d'un diamètre donné* NS (P. V, F. 17).

Tirez, par l'un B des sommets, une corde BE parallèle à NS, et par le centre S, une parallèle UV à la corde qui joint E à l'autre sommet A. Le diamètre UV sera le conjugué de NS (227).

Si c'est un diamètre déclinant UV qui est donné, vous tirerez AE parallèlement à ce diamètre ; puis vous menerez, par le centre S, une parallèle NS à BE.

Observation : Mais ces procédés exigent que l'arc AO soit prolongé fort loin, quand le diamètre donné fait un angle très-aigu avec S*c*. D'autres tracés, exempts de cet inconvénient, seront donnés plus loin (239).

Probl. (*e*) : *Trouver les cordes qu'un diamètre donné* NS *partage en deux parties égales* (P. V, F. 17).

Menez, par l'un B des sommets, une corde BE parallèle à NS ; la corde AE et toutes les cordes parallèles à celle-là seront divisées en deux parties égales par le diamètre donné (223).

S'il s'agit d'un diamètre déclinant UV, vous tracerez la corde AE parallèlement à ce diamètre ; BE et toutes les cordes parallèles à celle-là seront divisées en deux parties égales par le diamètre donné.

Asymptotes.

232. On appelle *asymptotes* (acemptote) les projections horizontales et orthogonales S*c*, S*d* (P. V, F. 17) des génératrices horizontales du cône projetant. Ce nom leur a été donné pour exprimer qu'elles *ne coïncident pas* avec l'hyperbole en des points assignables (210).

Les asymptotes d'une hyperbole sont donc des droites qui, croisées au centre S, se rapprochent constamment des branches de la courbe, sans pouvoir les atteindre ailleurs qu'à l'infini.

On peut dire aussi que les asymptotes forment les limites des diamètres transverses et des diamètres déclinants; car les diamètres compris dans l'angle cSd coupent tous la courbe avant l'infini, comme traces des plans verticaux qui projettent coniquement les cordes verticales du cercle (214), et les diamètres compris dans l'angle que fait cS avec le prolongement de dS, n'ont aucun point commun à l'hyperbole, étant les traces des plans verticaux qui contiennent la verticale du sommet du cône projetant et les différentes polaires verticales du cercle (215), plans dans lesquels ne peut se trouver aucun point de la circonférence. D'ailleurs, Sc, Sd appartiennent aux diamètres transverses, comme traces des plans verticaux qui projettent coniquement les cordes verticales infiniment petites c', d'; et les mêmes droites appartiennent aussi aux diamètres déclinants, comme traces de plans verticaux qui contiennent la verticale $\underline{S, S'S''}$ et les tangentes verticales du cercle, c'est-à-dire les polaires des pôles c', d'.

233. *Chaque asymptote est tangente aux deux branches de l'hyperbole, en des points situés à l'infini.*

Tous les diamètres transverses coupent les deux branches; ils ont donc deux intersections avec l'hyperbole, et au fond chaque asymptote est dans le même cas, puisqu'elle peut être regardée comme un diamètre transverse (222). Or, chacun des points du diamètre horizontal $c'd'$ a deux projections coniques à l'infini, l'une à droite de l'axe déclinant, l'autre à gauche. Comme la droite qui les unit n'est qu'un cercle infiniment grand, ces deux projections coniques se confondent en réalité. Il en est donc ainsi des deux intersections, infiniment éloignées, de l'hyperbole et de chaque asymptote. Mais une sécante devient tangente dès que ses deux intersections se confondent (7). Par conséquent, les asymptotes sont de véritables tangentes de l'hyperbole.

234. *La perpendiculaire* Bc'' *élevée sur l'axe transverse, à l'un des sommets, jusqu'à l'une des asymptotes, égale la demi-longueur* CS *de l'axe déclinant* (P. V, F. 17).

Les angles BSc'', $g'''S'b''$ égalent chacun l'angle que fait l'axe du cône projetant avec ses génératrices. Ils ont donc la même indication. Mais les angles alternes-internes $g'''S'b''$, $S''b''S'$ sont aussi égaux, et $BS = b''S''$. Par conséquent, il y a égalité entre les triangles rectangles SBc'', $b''S''S'$, et

$$Bc'' = S'S'' = CS \text{ (221).}$$

Ainsi, *la circonférence décrite du milieu* S *de l'axe déclinant, avec la demi-longueur* CS *de cet axe pour rayon, vaut celle qui serait placée sur le cône projetant, à une distance du sommet* S' *déterminée par la moitié* SB *de l'axe transverse* (210, problème).

PROBLÈME : *Tracer les asymptotes d'une hyperbole dont les axes AB, CD sont donnés en direction et en longueur* (P. V, F. 17).

Élevez, par l'un B des sommets, une perpendiculaire à l'axe transverse ; puis portez sur cette perpendiculaire, de B en c'' et en d'', la moitié CS de l'axe déclinant. Les droites c''S, d''S seront les asymptotes.

235. *Tout diamètre coupe par le milieu les parallèles à son conjugué comprises entre les asymptotes.*

Soit AH une des cordes que le diamètre transverse ES divise en deux parties égales (P. V, F. 20). Elle se trouve parallèle au conjugué GS (35), et son milieu E l'est encore après qu'on l'a prolongée, de chaque côté, jusqu'aux asymptotes YY', ZZ'.

En effet, ES divisant en deux parties égales toutes les cordes parallèles à AH, divise de la même manière la corde (YZ) des contacts des deux asymptotes (233), car celle-là étant à l'infini ne peut être rencontrée qu'à l'infini par AH et lui est conséquemment parallèle. Or les concourantes SY, SE, SZ divisent les parallèles (YZ), IK de la même manière. Donc, le point E est le milieu de IK comme de AH.

Le même raisonnement s'applique au diamètre GS et à la partie LM de la corde BH qu'il divise en deux parties égales ; il faut seulement considérer la corde (Y'Z) au lieu de (YZ). Ainsi, le milieu N de BH l'est aussi de LM, partie comprise entre les asymptotes.

236. *Les parties d'une corde indéfinie d'hyperbole comprises entre la courbe et les asymptotes sont égales.*

Soient les cordes quelconques et indéfinies OP, IR (P. V, F. 20). Les diamètres qui diviseront en deux parties égales TU, RV, partageront de la même manière OP, IX (235).

Si donc $E'T = E'U$, $E'O = E'P$,

$$E'O - E'T = E'P - E'U, \quad \text{ou} \quad OT = PU.$$

De même, si $N'V = N'R$, $N'I = N'X$,

$$N'V - N'I = N'R - N'X, \quad \text{ou} \quad IV = RX.$$

237. *Il y a égalité entre les deux angles formés par les asymptotes avec chaque axe.*

Toutes les génératrices du cône projetant font des angles égaux avec son axe, puisque ce cône est droit. Ceux des deux génératrices horizontales se projettent orthogonalement, sans altération, sur les angles BSc, BSd compris entre les asymptotes et l'axe transverse (P. V, F. 17). Par conséquent, BSc = BSd, et leurs différences à 90°, S''Sc, S'''Sd, sont aussi égales.

238. *Chaque asymptote divise en deux parties égales les parallèles à l'autre comprises entre les axes.*

Par exemple, l'asymptote ZZ' (P. V, F. 21) coupe la droite CE, parallèle à l'asymptote YY′ et limitée aux axes CD, AB, en un point G tel que CG = GE.

En effet, de l'égalité des angles alternes-internes CES, ESY′, et de celle des angles ESZ′, ESY′ (237), résulte que le triangle EGS est symétrique. Par conséquent, GE = GS. L'égalité des angles correspondants GCS, DSY′, et celle des angles CSZ′, DSY′ rendent le triangle CGS symétrique aussi. Ainsi, CG = GS, et par suite, GE = GC.

239. ***Chaque asymptote divise en deux parties égales les parallèles à l'autre comprises entre deux diamètres conjugués quelconques.***

La position des axes est celle où les diamètres conjugués se coupent d'équerre (221). La position de l'asymptote ZZ′, par exemple (P. V, F. 21), est celle où les diamètres conjugués se confondent, car les deux cordes menées des sommets au point situé à l'infini sur l'arc AH (227) sont parallèles à ZZ′. Ainsi, une paire de diamètres, d'abord dirigés selon les axes, puis pivotant sur le centre S pour se rapprocher de ZZ′, sans cesser d'être conjugués, arrivent au même moment sur cette asymptote. Ils parcourent donc sur CE, parallèle à l'asymptote YY′, des chemins égaux CG, EG dans le même temps (238), et conséquemment leurs vitesses sont égales le long de la droite CE. Il s'ensuit que pour passer de la position des axes à celle des diamètres conjugués SI, SK, où ils arrivent aussi au même moment, ils doivent parcourir sur CE des chemins égaux. CI vaut donc EK, et par suite GI = GK.

Problème : *Trouver le conjugué d'un diamètre donné, sans employer les cordes de l'hyperbole* (231, probl. *d*).

Soit SI ce diamètre (P. V, F. 21). Tirez entre les axes une droite CE parallèle à YY′ l'une des asymptotes, et portez la partie CI de E en K, ou GI de G en K. Le diamètre KS sera le conjugué de SI.

240. L'hyperbole est dite *équilatère*, quand ses deux axes sont égaux.

Les asymptotes d'une hyperbole équilatère se coupent à angle droit.

La perpendiculaire BL à l'axe transverse (P. V, F. 21) vaut la moitié de l'axe déclinant (234). Par conséquent, BL = BS, si l'hyperbole est équilatère; le triangle rectangle LBS est symétrique; l'angle BSL se trouve de 45°, et l'angle Y′SZ′ est de 90° (237).

PROPRIÉTÉS DE L'HYPERBOLE.

241. *Le rectangle formé avec les distances du centre d'une hyperbole à toute corde d'équerre sur l'axe transverse, et à la corde correspondante du cercle qui a pour diamètre la longueur de l'axe déclinant, égale le rectangle des deux demi-axes.*

Soit la demi-corde d'hyperbole EG perpendiculaire à l'axe transverse

AB (P. V, F. 22). La projection horizontale SG de la génératrice qui projette coniquement le point G, coupe en H la projection horizontale Y′Z de la circonférence qui, placée sur le cône projetant, égale celle dont le diamètre est CD, longueur de l'axe déclinant (234). BH est donc la projection horizontale de la demi-corde de cercle horizontale H′ coniquement projetée sur EG (213), et si du point H on mène HI, perpendiculaire à BH, puis IK, parallèle à la même droite, IK vaudra la demi-corde de cercle projetée orthogonalement sur BH, et KS sera l'élévation de l'axe du cône au-dessus de cette même demi-corde; de sorte qu'on aura KS = LH′.

Il est maintenant très-facile de démontrer qu'en effet

$$\text{ES} \times \text{KS} = \text{BS} \times \text{CS}.$$

Les projections verticales S′M, S′G′ de l'axe du cône et de la génératrice projetante du point G, donnent évidemment

$$\text{S'M} : \text{MG'} :: \text{S'L} : \text{LH'}.$$

Or S′M = ES, MG′ = S′S″ = CS, S′L = BS. Par conséquent,

$$\text{ES} : \text{CS} :: \text{BS} : \text{KS}, \quad \text{et} \quad \text{ES} \times \text{KS} = \text{BS} \times \text{CS}.$$

242. *Toute corde d'hyperbole, d'équerre sur l'axe transverse, contient la corde correspondante du cercle qui a pour diamètre la longueur de l'axe déclinant, comme la moitié de cette longueur contient la distance du centre à la corde de cercle.*

Cette proportion est vraie, si le second rapport égale celui des demi-cordes. Il faut donc démontrer (241) que EG : IK :: CS : KS (P. V, F. 22). Or

$$\text{EG} : \text{BH} :: \text{ES} : \text{BS} :: \text{CS} : \text{KS}, \quad \text{et} \quad \text{BH} = \text{IK}.$$

243. *Le quarré numérique de toute demi-corde d'hyperbole, perpendiculaire à l'axe transverse, contient l'excès du quarré de sa distance au centre sur le quarré du demi-axe transverse, comme le quarré du demi-axe déclinant contient celui de l'autre demi-axe*, c'est-à-dire que (P. V, F. 22) $\overline{\text{EG}}^2 : \overline{\text{SE}}^2 - \overline{\text{SB}}^2 :: \overline{\text{SC}}^2 : \overline{\text{SB}}^2$.

Concevons selon EG un plan perpendiculaire à l'axe SE, S′M du cône sur lequel se trouve l'hyperbole; ce plan coupera la surface conique selon une circonférence qui aura OP pour diamètre et qui rencontrera l'hyperbole au point G. Rabattons cette circonférence sur le plan vertical, en la faisant tourner autour de OP; sa demi-corde G′Q sera commune à l'hyperbole et vaudra EG. Par conséquent,

$$\overline{\text{EG}}^2 = \text{G'P} \times \text{G'O}.$$

Or

$$\text{G'P} = \text{PM} + \text{MG'} = \text{EN} + \text{S'S''} = \text{EN} + \text{SC};$$

$$\text{G'O} = \text{MO} - \text{MG'} = \text{EN} - \text{SC};$$

$$\text{G'P} \times \text{G'O} = (\text{EN} + \text{SC})(\text{EN} - \text{SC}) = \overline{\text{EN}}^2 - \overline{\text{SC}}^2 = \overline{\text{EG}}^2;$$

les triangles semblables SEN, SBZ donnent

$EN : BZ :: SE : SB$, ou $\overline{EN}^2 : \overline{BZ}^2 :: \overline{SE}^2 : \overline{SB}^2$; et $BZ = SC$ (234).
Donc,

$$\overline{EN}^2 = \frac{\overline{SC}^2}{\overline{SB}^2}\overline{SE}^2, \quad \text{et} \quad \overline{EG}^2 = \frac{\overline{SC}^2}{\overline{SB}^2}\overline{SE}^2 - \overline{SC}^2.$$

Réduisant au même dénominateur, on obtient

$$\overline{EG}^2 = \frac{\overline{SC}^2 \times \overline{SE}^2 - \overline{SC}^2 \times \overline{SB}^2}{\overline{SB}^2} = \frac{\overline{SC}^2}{\overline{SB}^2}(\overline{SE}^2 - \overline{SB}^2),$$

ce qui revient à la proportion

$$\overline{EG}^2 : \overline{SE}^2 - \overline{SB}^2 :: \overline{SC}^2 : \overline{SB}^2.$$

244. L'hyperbole a deux *foyers* comme l'ellipse (49); ces points F, F′ sont situés sur l'axe transverse (P. V, F. 22), et la distance de chacun d'eux au centre S de l'hyperbole égale l'hypothénuse BC du triangle rectangle formé avec les deux demi-axes BS, CS.

Les distances d'un foyer au sommet le plus voisin ou le plus éloigné égalent les distances correspondantes de l'autre.

En effet, de $FS = F'S$ et de $AS = BS$, résultent ces autres égalités

$$FS - AS = F'S - BS \quad \text{ou} \quad AF = BF',$$
$$FS + BS = F'S + AS \quad \text{ou} \quad BF = AF'.$$

PROBLÈME : *Marquer les foyers d'une hyperbole donnée.*

Solution 1 : Prenez pour rayon la distance de l'un B des sommets à l'une C des extrémités de l'axe déclinant (P. V, F. 22); puis décrivez, du centre S de la courbe, deux arcs qui coupent l'axe transverse. Les intersections F, F′ seront les foyers.

Solution 2 : Elevez à l'un B des sommets, sur l'axe transverse, une perpendiculaire qui coupe l'une SZ des asymptotes, et avec la distance SZ du centre S à l'intersection Z, décrivez une circonférence. Les points F, F′ où elle rencontrera l'axe transverse seront les foyers.

Démonstration : Cette seconde solution revient au fond à la première, car de ce que $BZ = CS$ (234), résulte qu'il y a aussi égalité entre SZ et BC.

245. *Le paramètre* EF *d'une hyperbole* (51) *est une troisième proportionnelle à l'axe transverse* AB *et à l'axe déclinant* CD (P. V, F. 23).

Le principe est vrai, si $AS : CS :: CS : EF$. Or la demi-corde qui, dans le cercle de rayon CS ou AH (234), correspond à EF, est AI, partie de AH déterminée par la droite ES; IL parallèle à AB donne KL = AI; KS est la distance du centre S à la corde du cercle, et (242)

$$KS : CS :: KL : EF, \quad \text{ou bien} \quad KS : KL :: CS : EF.$$

Il reste donc à faire voir que

$$KS : KL :: AS : CS.$$

Le principe 241 donne la proportion

$$KS : CS :: AS : FS.$$

Il s'ensuit

$$\overline{KS}^2 : \overline{CS}^2 :: \overline{AS}^2 : \overline{FS}^2,$$

et comme (244) $\overline{FS}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{CS}^2$,

$$\overline{KS}^2 : \overline{CS}^2 :: \overline{AS}^2 : \overline{AS}^2 + \overline{CS}^2.$$

Donc

$$\overline{KS}^2 : \overline{CS}^2 - \overline{KS}^2 :: \overline{AS}^2 : \overline{CS}^2.$$

Mais puisque CS = LS,

$$\overline{CS}^2 - \overline{KS}^2 = \overline{LS}^2 - \overline{KS}^2 = \overline{KL}^2.$$

Par conséquent,

$$\overline{KS}^2 : \overline{KL}^2 :: \overline{AS}^2 : \overline{CS}^2 \quad \text{et} \quad KS : KL :: AS : CS.$$

246. Les droites tirées des deux foyers au même point de l'hyperbole sont des *rayons vecteurs* de cette courbe (52).

La différence FG — F'G *des rayons vecteurs, pour un point quelconque* G *de l'hyperbole, égale l'axe transverse* AB (P. V, F. 22).

Le principe 243 donne

$$\overline{EG}^2 = \frac{\overline{CS}^2}{\overline{BS}^2}(\overline{ES}^2 - \overline{BS}^2);$$

$$\overline{EF}^2 = (ES + FS)^2 = (ES + BC)^2 = \overline{ES}^2 + 2ES \times BC + \overline{BC}^2$$
$$= \overline{ES}^2 + 2ES \times BC + \overline{BS}^2 + \overline{CS}^2.$$

Par conséquent,

$$\overline{FG}^2 = \overline{EG}^2 + \overline{EF}^2 = \frac{\overline{CS}^2}{\overline{BS}^2}(\overline{ES}^2 - \overline{BS}^2) + \overline{ES}^2 + 2ES \times BC + \overline{BS}^2 + \overline{CS}^2$$

$$= \frac{\overline{CS}^2 \cdot \overline{ES}^2 - \overline{CS}^2 \cdot \overline{BS}^2 + \overline{ES}^2 \cdot \overline{BS}^2 + 2ES \cdot BC \cdot \overline{BS}^2 + \overline{BS}^4 + \overline{CS}^2 \cdot \overline{BS}^2}{\overline{BS}^2}$$

$$= \frac{\overline{ES}^2(\overline{CS}^2 + \overline{BS}^2) + 2ES \times BC \times \overline{BS}^2 + \overline{BS}^4}{\overline{BS}^2}$$

$$= \frac{\overline{ES}^2 \times \overline{BC}^2 + 2ES \times BC \times \overline{BS}^2 + \overline{BS}^4}{\overline{BS}^2} = \frac{(ES \times BC + \overline{BS}^2)^2}{\overline{BS}^2},$$

et

$$FG = \frac{ES \times BC + \overline{BS}^2}{BS}.$$

On a aussi

$$\overline{F'G}^2 = \overline{EG}^2 + \overline{EF'}^2,$$

et

$$\overline{EF'}^2 = (ES - F'S)^2 = (ES - BC)^2 = \overline{ES}^2 - 2ES \times BC + \overline{BC}^2.$$

Ainsi, la valeur de $\overline{F'G}^2$ est la même que celle de $\overline{FG}^2$, au signe près du terme $2ES \times BC \times \overline{BS}^2$. Conséquemment,

$$F'G = \frac{ES \times BC - \overline{BS}^2}{BS},$$

et

$$FG - F'G = \frac{ES \times BC + \overline{BS}^2 - ES \times BC + \overline{BS}^2}{BS} = \frac{2\overline{BS}^2}{BS} = 2BS = AB.$$

247. *La droite* FF′ *des foyers* (P. V, F. 24), *une perpendiculaire* F′H *abaissée de l'un de ces foyers sur l'une* SZ *des asymptotes, et une parallèle* FH *à la même asymptote, forment un triangle rectangle* F′HF *dont le troisième côté* FH *égale l'axe transverse* AB.

Les droites FH, F′I, parallèles à l'asymptote SZ, sont les rayons vecteurs d'un point situé à l'infini, et F(Z) — F′(Z) = AB (246). Mais ZS, abaissée perpendiculairement du point (Z) sur F′H, partage cette droite en deux parties égales, puisqu'elle divise ainsi FF′. Les obliques H(Z), F′(Z) sont donc égales,

$$F(Z) - F'(Z) = F(Z) - H(Z) = FH, \quad \text{et} \quad FH = AB.$$

PROBL. (*a*) : *Tracer les asymptotes d'une hyperbole dont on connaît seulement les sommets* A, B, *et les foyers* F, F′ (P. V, F. 24).

Solution 1 : Elevez en B une perpendiculaire sur l'axe transverse AB, et coupez-la, en deux points E, G, par un arc décrit du centre S, avec le rayon SF′. Les droites SE, SG seront les asymptotes (244, problème).

Solution 2 : De l'un B des sommets, avec un rayon égal à la moitié FS de la droite des foyers, décrivez une demi-circonférence qui coupe en deux points, K, L, l'axe déclinant; puis menez, par le centre S de l'hyperbole, des parallèles à BK, BL. Ces parallèles SY, SZ seront les asymptotes.

Démonstration : En effet, l'angle BSZ = LBS = KBS, ce qui rend égaux les triangles rectangles BSK, EBS. Par conséquent, KS = BE. Or KS est la moitié de l'axe déclinant (244). Donc SZ est l'une des asymptotes (234), et SY est l'autre (237), car l'angle BSY = KBS = BSZ.

Solution 3 : Décrivez, de l'un F des foyers, une demi-circonférence dont le rayon soit l'axe transverse AB ; menez, par l'autre foyer, une tangente F'H à cette courbe ; tirez indéfiniment le rayon FH du contact, et tracez, par le centre S de l'hyperbole, une droite SE parallèlement à FH. Cette droite SE sera l'une des asymptotes (247) : il faudra, pour avoir l'autre, élever en B une perpendiculaire à l'axe transverse, rapporter BE de B en G, et tirer SG (237).

PROBL. (*b*) : *Trouver les sommets d'une hyperbole dont on connaît les asymptotes* SY, SZ, *et les foyers* F, F' (P. V, F. 24).

Solution 1 : Abaissez de l'un F' des foyers une perpendiculaire F'H sur l'une SZ des asymptotes, et menez par l'autre foyer F une parallèle à la même droite. La partie FH de cette parallèle sera l'axe transverse (247). Divisez donc FH en deux parties égales, puis portez la moitié sur la droite des foyers, de S en A et en B.

Solution 2 : Du centre S de l'hyperbole, décrivez, avec le rayon SF', un arc qui coupe l'une SZ des asymptotes ; abaissez de l'intersection E une perpendiculaire EB sur la droite FF' des foyers, et faites SA = SB. Les points A, B seront les sommets (244 et 234).

TRACÉS DE L'HYPERBOLE.

248. L'hyperbole a, comme l'ellipse, un grand nombre de tracés différents, mais nous n'étudierons que ceux dont l'utilité est prouvée par les applications.

PROBL. (*a*) : *Tracer d'un mouvement continu une hyperbole qui ait pour foyers deux points donnés* F, F' (P. V, F. 25).

Il faut une règle dont l'une des extrémités forme crosse ; cette crosse doit être percée d'un trou cylindrique qui ait son axe précisément dans le plan de l'une des longues faces. A l'autre extrémité E est attaché un cordeau plus ou moins long que la règle, et terminé par une boucle.

Deux pointes sont plantées aux foyers : l'une F s'engage dans le trou ; l'autre F', dans la boucle. Après avoir écarté la règle EF de la droite FF' des foyers, de manière à tendre le cordeau, on le force de s'appliquer sur la face EF, au moyen d'une pointe à tracer G, ce qui oblige la règle à se rapprocher de FF', en pivotant sur la pointe F. Pendant ce mouvement, le cordeau forme une ligne brisée EGF' ; la partie EG augmente sans cesse, l'autre F'G diminue, et la pointe G, se rapprochant de FF', trace un arc de courbe HGB.

Arrivé en B, on soulève la règle, pour la faire passer par-dessus la pointe F', puis on la pousse, pour l'éloigner de FF'. Pendant ce second mouvement, la partie BF' du cordeau augmente, ce qui force l'autre E'B à diminuer, et la pointe G, simplement maintenue, à glisser sur la règle en s'écartant de FF'. Cette pointe trace donc un nouvel arc de courbe BI, et l'ensemble HGBI des deux arcs est une branche d'hyperbole, car (246) la différence FG — F'G des rayons vecteurs reste la même pour toutes les positions du point G, puisque la diminution EG de la règle EF est toujours égale à la diminution EG du cordeau EGF'.

Il est visible, du reste, qu'en plaçant la règle du côté de I comme elle a été placée d'abord du côté de H, on peut tracer l'arc IB de la même manière que l'arc HGB. Quant à l'autre branche de l'hyperbole, il faut, pour l'obtenir, engager la pointe F' dans le trou de la crosse, la pointe F dans la boucle du cordeau, et procéder selon ce qui vient d'être prescrit au sujet de la branche HGBI.

On donne ordinairement au cordeau une longueur moindre que celle de la règle, et la figure se rapporte à ce cas. Si au contraire EGF' surpassait EF, le jeu de l'appareil donnerait la branche de gauche, quand la crosse serait en F, et la branche de droite, lorsqu'elle serait en F' : ce serait là toute la différence; mais en rendant les deux longueurs égales, on obtiendrait, pour trace de la pointe G, au lieu d'un arc d'hyperbole, une droite perpendiculaire au milieu de FF', puisque les rayons vecteurs FG, F'G resteraient constamment égaux.

Enfin, il suffit évidemment de faire varier la longueur de la règle ou celle du cordeau, pour tracer diverses hyperboles qui aient toutes leurs foyers aux points donnés F, F'.

PROBL. (*b*) : *Tracer une hyperbole dont on connaît les foyers* F, F' *et l'axe transverse* AB (P. V, F. 25).

La courbe demandée est unique, car les distances du milieu S de AB aux points A, F déterminent l'axe déclinant (244) ou la distance du plan de projection au sommet du cône projetant (221); l'écartement des sommets A, B règle, par suite, l'inclinaison des génératrices du même cône (210), et un cône complètement déterminé ne peut produire sur un plan fixé qu'une seule hyperbole, quel que soit le cercle qu'il y projette.

Solution 1 : Portez l'axe transverse AB sur la règle, à partir de l'axe F du trou de la crosse; appliquez sur le point K, qui en résulte, l'arc de la boucle du cordeau; attachez ce cordeau au point E, en le tenant tendu le long de KE; puis servez-vous de l'appareil comme dans le problème (*a*). La différence des rayons vecteurs sera constamment FK ou AB, comme au commencement du tracé; par conséquent (246), l'hyperbole obtenue aura F, F' pour foyers, et AB pour axe transverse.

Solution 2: Portez AB de F en K'; décrivez de F un arc de cercle, avec un rayon FL plus grand que FB, mais quelconque d'ailleurs, et de l'autre foyer F, décrivez, avec K'L pour rayon, un second arc qui coupe le premier en deux points. Les intersections G, I seront sur l'hyperbole demandée (246), car

$$FG - F'G = FL - K'L = AB, \quad FI - F'I = FL - K'L = AB.$$

Si donc vous augmentez ou diminuez FL, vous obtiendrez autant de points de la branche de droite qu'il en faudra pour que le problème du n° 2 puisse être appliqué.

Les mêmes rayons FL, K'L donnent aussi deux points G', I' de la branche de gauche, si le premier est employé avec le foyer F' pour centre, et le second, avec le foyer F.

Probl. (*c*) : *Tracer une hyperbole dont on connaît les foyers F, F' et un point* I *quelconque* (P. V, F. 25).

Décrivez de F un arc qui ait FI pour rayon et coupe la droite des foyers; portez F'I sur cette même droite, de l'intersection L en K'. La longueur FK' sera celle de l'axe transverse (246), puisqu'elle vaudra FI — F'I, et vous pourrez appliquer le problème (*b*).

Mais il est bon de déterminer les sommets de l'hyperbole. A cet effet, vous chercherez le milieu B de F'K', puis vous porterez FK' de B en A. Ce dernier point sera nécessairement l'un des sommets, si B est l'autre, ou si B se trouve sur l'hyperbole. Or,

$$FB - F'B = FB - BK' = FK'.$$

Probl. (*d*) : *Tracer une hyperbole dont on connaît les sommets* A, B *et un point* E *quelconque* (P. V, F. 17).

Appliquez le problème du n° 221 pour trouver l'axe déclinant CS, celui du n° 244 pour marquer les foyers, et le problème (*b*) précédent pour obtenir la courbe demandée.

Probl. (*e*) : *Tracer une hyperbole dont on connaît le foyer* F, *le sommet* A *et un point quelconque* E *de l'une des branches* (P. V, F. 26).

Portez la droite FE sur son prolongement, de E en G; abaissez de E une perpendiculaire EH sur AF; portez 4 fois AF de G vers E, et à la suite 2 fois FH. Vous obtiendrez ainsi un point I, qui sera situé entre F et G, si les données rendent le problème possible. Portez alors 2 fois AF sur FA et sur FE, de F en a et en a'; puis tirez a'K parallèlement à Ia. Portez 2 fois FH de F en h; puis tirez hL parallèlement à Ia. Portez enfin FL de A en M, FK de M en B, et AF de B en F'. Le point B sera le sommet de l'autre branche; le point F' marquera le foyer correspondant (244), et vous pourrez appliquer le problème (*b*).

Démonstration : On voit d'abord que

$$FI = 2EF - 4AF - 2FH.$$

D'ailleurs, la construction donne les deux proportions,

$$FL : Fa :: Fh : FI, \quad FK : Fa :: Fa' : FI,$$

ou

$$FL : 2AF :: 2FH : FI, \quad FK : 2AF :: 2AF : FI.$$

Par conséquent,

$$FL = \frac{2AF \times 2FH}{FI}, \quad FK = \frac{2AF \times 2AF}{FI},$$

et

$$AB = AM + MB = FL + FK = \frac{2AF \times 2FH}{FI} + \frac{2AF \times 2AF}{FI}.$$

Il s'agit donc de démontrer que cette valeur de AB est effectivement celle de l'axe transverse.

Soit f le vrai second foyer de l'hyperbole demandée; tirons le rayon vecteur fE, puis décrivons de E, avec le rayon vecteur EF, une circonférence qui coupe Ef en N, et fF une seconde fois en O. La différence fN des deux rayons vecteurs vaudra l'axe transverse (246), et les deux sécantes fP, fO donneront

$$fN : fF :: fO : fP.$$

Or, la distance des foyers $fF = fN + 2AF$; $fO = fF + 2FH$, parce que $HO = FH$, ou bien $fO = fN + 2AF + 2FH$; $fP = fN + NP = fN + 2EF$. Conséquemment,

$$fN : fN + 2AF :: fN + 2AF + 2FH : fN + 2EF.$$

Retranchant le premier terme du second, dans chaque rapport, on obtient

$$fN : 2AF :: fN + 2AF + 2FH : 2EF - 2AF - 2FH.$$

La multiplication des extrêmes et celle des moyens donne ensuite

$$fN \cdot 2EF - fN \cdot 2AF - fN \cdot 2FH = 2AF \cdot fN + 2AF \cdot 2AF + 2AF \cdot 2FH.$$

Otant $2AF \times fN$ aux deux parties de l'égalité, on trouve

$$fN \cdot 2EF - fN \cdot 2AF - fN \cdot 2FH - fN \cdot 2AF = 2AF \cdot 2AF + 2AF \cdot 2FH.$$

Mais retrancher deux fois $fN \times 2AF$, c'est au fond retrancher le double de $fN \times 2AF$ ou $2fN \times 2AF$ ou $fN \times 4AF$. La dernière égalité revient donc à cette autre

$$fN \times 2EF - fN \times 4AF - fN \times 2FH = 2AF \times 2AF + 2AF \times 2FH.$$

Comme le produit $fN(2EF - 4AF - 2FH)$ donne évidemment le même résultat que l'ensemble des trois produits de la première partie, nous pouvons écrire

$$fN(2EF - 4AF - 2FH) = 2AF \times 2AF + 2AF \times 2FH,$$

ou

$$fN \times FI = 2AF \times 2AF + 2AF \times 2FH.$$

Divisant des deux côtés par FI, on a enfin

$$fN = \frac{2AF \times 2AF}{FI} + \frac{2AF \times 2FH}{FI}.$$

Probl. (f) : *Tracer une hyperbole dont on connaît les asymptotes et les sommets.*

Cherchez les foyers par la seconde solution du problème du n° 244, puis appliquez le problème (b).

Probl. (*g*) : *Tracer une hyperbole dont on connaît les asymptotes et les foyers.*

Appliquez le problème (*b*) du n° 247, pour trouver les sommets. Vous aurez l'axe transverse et vous pourrez appliquer le problème (*b*) précédent.

Probl. (*h*) : *Tracer une hyperbole dont on connaît les asymptotes* SY, SZ, *et un point quelconque* H (P. V, F. 20).

Tirez par H une droite quelconque IK qui se termine aux deux asymptotes, et portez la partie HK sur l'autre, de I en A. Le point A appartiendra à la même branche que H (236).

La droite quelconque HM, qui coupe SZ et le prolongement de SY, donne un point B de l'autre branche, si l'on prend

$$MB = HL.$$

Les points A, B, employés comme le point donné H, fournissent à leur tour plusieurs points de l'hyperbole ; ces nouveaux points peuvent servir à en déterminer d'autres, et le problème du n° 2 est applicable.

Probl. (*i*) : *Tracer une hyperbole équilatère dont on connaît les sommets* A, B (P. V, F. 21).

Elevez une perpendiculaire CD au milieu de la droite AB des sommets, pour avoir la direction de l'axe déclinant ; tracez les bissectrices SY, SZ des angles ASC, ASD ; ces droites seront les asymptotes (240), et vous pourrez appliquer le problème (*f*).

Probl. (*k*) : *Tracer une hyperbole équilatère dont on connaît les foyers.*

Une perpendiculaire au milieu de la droite des foyers donne la direction de l'axe déclinant. On détermine alors les asymptotes comme dans le problème (*i*), et le problème (*g*) est applicable.

TANGENTES DE L'HYPERBOLE.

249. *Toute tangente* EG *d'une hyperbole* (P. V, F. 27) *est parallèle au conjugué* HS *du diamètre* ES *qui aboutit au contact* E.

Ce principe se démontre absolument comme celui du n° 54.

250. *La corde* EI *des contacts de deux parallèles* EG, IK *tangentes à l'hyperbole est un diamètre* (P. V, F. 27).

La démonstration est la même que celle du n° 55.

251. *Les perpendiculaires élevées sur l'axe transverse, aux sommets, sont tangentes à l'hyperbole.*

Les tangentes aux sommets A, B (P. V, F. 27), étant parallèles à l'axe déclinant CD, conjugué de l'axe transverse AB (249 et 221), coupent nécessairement d'équerre ce dernier.

252. *Toute tangente de l'hyperbole forme des angles égaux avec les deux rayons vecteurs du contact.*

Nous démontrerons ce principe en faisant voir que toute droite EG est tangente (P. V, F. 28), si, passant par un point E de la courbe, elle forme des angles égaux FEG, F′EG avec les rayons vecteurs de ce point.

Rapportons EF sur EF′, de E en H. Le triangle FEH sera symétrique, et EG se trouvera perpendiculaire au milieu de FH. Par conséquent, aucun point I de EG, pris aussi près de E qu'on voudra, ne pourra être sur l'hyperbole.

En effet, de $FI = IH$ suit

$$F'HI - FI = F'HI - IH = F'H = EF' - EF = AB.$$

Mais $F'I < F'HI$. Donc,

$$F'I - FI < AB.$$

253. *Si le centre de l'hyperbole est pris pour origine des coordonnées* (6), *l'abscisse* ST *du pied* T *de la tangente* (P. V, F. 29) *est une troisième proportionnelle à l'abscisse* SP *du contact* E *et à la moitié* SB *de l'axe transverse*, c'est-à-dire que

$$SP : SB :: SB : ST.$$

Tirons les rayons vecteurs FE, F′E du contact, et avec le moindre, décrivons une circonférence qui ait ce contact pour centre. Elle coupera FF′ en F′ et en un second point G qui donnera $GP = F'P$, puisque EP est perpendiculaire sur la corde F′G, et les sécantes FF′, FEK fourniront la proportion

$$FF' : FK :: FL : FG.$$

Or,

$$FG = FP - GP = FA + AB + BP - F'B + BP = AB + 2BP;$$
$$FL = FE - EL = FE - F'E = AB;$$
$$FK = FE + EK = FE + F'E = AB + 2F'E.$$

Donc

$$FF' : AB + 2F'E :: AB : AB + 2BP, \quad SF' : SB + F'E :: SB : SB + BP,$$
$$SF' : SB + F'E - SF' :: SB : BP.$$

Mais

$$SB + F'E - SF' = SB + F'E - SB - F'B = F'E - F'B;$$
$$SF' = SB + F'B.$$

Par conséquent,

$$SB + F'B : F'E - F'B :: SB : BP, \quad SB + F'B : SB + F'E :: SB : SB + BP,$$

et

$$SF' : SB + F'E :: SB : SP.$$

La tangente ET, étant bissectrice de l'angle E du triangle FEF′ (252), donne

$$F'T : FT :: F'E : FE, \quad F'T : FT - F'T :: F'E : FE - F'E,$$

et parce que $FT - F'T = FS + ST - (F'S - ST) = 2ST$,

$$F'T : 2ST :: F'E : AB.$$

Conséquemment,

$$F'T : ST :: F'E : SB, \quad F'T + ST : ST :: SB + F'E : SB,$$

ou

$$SF' : SB + F'E :: ST : SB,$$

et à cause du rapport $SF' : SB + F'E$, que renferme aussi la proportion par laquelle est terminé le paragraphe précédent,

$$ST : SB :: SB : SP.$$

254. On appelle *sous-tangente* la partie PT de l'axe transverse (P. V, F. 29) comprise entre le pied T de la tangente et celui de l'ordonnée EP du contact.

Dans l'hyperbole, la sous-tangente contient la somme du demi-axe transverse et de l'abscisse du contact, comme la différence de ces mêmes longueurs contient la dernière, c'est-à-dire que

$$PT : SP + SB :: SP - SB : SP.$$

En effet, $PT = SP - ST$, et d'après le principe précédent,

$$ST = \frac{\overline{SB}^2}{SP}.$$

Par conséquent,

$$PT = SP - \frac{\overline{SB}^2}{SP} = \frac{\overline{SP}^2 - \overline{SB}^2}{SP} = \frac{(SP + SB)(SP - SB)}{SP},$$

ce qui donne la proportion annoncée.

255. *Les tangentes dont les contacts* E, K (P. V, F. 28) *sont symétriquement placés par rapport à un axe* AB *de l'hyperbole se coupent en un point* G *de cet axe, et sont de même longueur*, considérées de leurs concours au contact.

Faisons tourner la partie KABL de l'hyperbole autour de AB; elle se rabattra exactement sur la partie EABM, en vertu de la symétrie (219); K tombera sur E, et les deux éléments, dont ces points sont les milieux, se confondront. Il en sera donc de même des tangentes EG, KN, prolongements de ces éléments. Alors la seconde coupera l'axe AB au même point G que la première. Mais l'intersection de KN et de AB, étant sur la charnière, n'a pu changer pendant le rabattement. Par conséquent, cette intersection se trouvait en G avant le mouvement, et $GK = GE$.

256. *Les tangentes parallèles* EG, IK *d'une hyperbole* (P. V, F. 27) *coupent chaque axe à la même distance du centre* S *et sont également éloignées de ce centre.*

La corde EI des contacts est un diamètre (250). Si donc on applique la branche de droite sur la branche de gauche, de manière à faire coïncider la partie inférieure de la première avec la partie supérieure de la seconde, SI prendra la direction de SE, I tombera en E, et IK sera sur EG. Par conséquent, SK = SG, SL = SM; la perpendiculaire abaissée de S sur les tangentes, forme deux triangles rectangles égaux SPG, SOK, et SO = SP.

257. *Les tangentes de chaque branche d'une hyperbole coupent toutes l'axe transverse entre le centre et le sommet.*

La tangente au sommet B (P. V, F. 20) coupe l'axe transverse en ce point; la tangente dont le contact se trouve à l'infini sur l'arc BR est l'asymptote SZ′ (233), qui coupe l'axe transverse au centre même. Or toutes les autres tangentes de la même moitié de branche sont les prolongements d'éléments plus inclinés sur l'axe transverse que l'élément B, et moins inclinés que l'élément situé à l'infini, puisque la courbe se rapproche de plus en plus de l'asymptote. Par conséquent, ces mêmes tangentes font avec l'axe transverse des angles moins ouverts que celui de la tangente au sommet B, plus ouverts que celui de l'asymptote SZ′, et pour qu'il en soit ainsi, elles doivent évidemment couper l'axe transverse entre le sommet et le centre.

Le principe 253 fournit une autre démonstration. On tire en effet de la proportion SP : SB :: SB : ST (P. V, F. 29),

$$ST = \frac{SB}{SP} SB;$$

cette égalité montre que si SP = SB, ST = SB aussi, ce qui se rapporte à la tangente au sommet B. Pour tout autre contact, SP surpasse SB; $\frac{SB}{SP}$ est une fraction; on a ST < SB, et le pied T de la tangente tombe entre le centre et le sommet; car, il faut rendre SP infiniment grand, pour que $\frac{SB}{SP}$ se réduise à zéro, et que la tangente passe par le centre S.

258. *Les tangentes d'une branche d'hyperbole se coupent toutes dans l'angle des asymptotes qu'occupe cette branche, et elles coupent celles de l'autre dans les angles supplémentaires.*

Si deux tangentes de la branche TAU (P. V, F. 20) avaient leur concours dans l'angle ZSY′, celle de l'arc AU croiserait l'asymptote SZ entre ce concours et le contact; elle couperait donc la partie SB de l'axe transverse, ce qui est impossible (257).

Si une tangente de la branche TAU et une tangente de la branche BR avaient leur concours dans l'angle YSZ, par exemple, celle de la branche de droite devrait croiser l'asymptote SY′, ou l'asymptote SZ′, entre ce concours et le contact; elle couperait donc la partie SA de l'axe transverse, ce qui serait encore contraire au principe 257.

Il est d'ailleurs visible qu'une tangente de l'arc BR, par exemple, ne peut entrer dans l'angle YSZ après avoir croisé successivement

SY', SZ, comme la droite abc; car l'angle Z'SB, égalant la somme des angles b, c du triangle bSc, est plus grand que abB, tandis que l'asymptote s'incline sur l'axe transverse plus que toute autre tangente.

259. *Toute tangente* EG *de l'hyperbole* (P. V, F. 30) *est parallèle à* HI, *un des côtés du pentagone inscrit* HIKELH *qui a le contact* E *pour sommet opposé à* HI *et dont les quatre autres côtés sont parallèles deux à deux.*

Les points E, K proviennent de points E', K' situés sur l'arc supérieur du cercle vertical O qui a produit l'hyperbole (210); les points I, H, L résultent de points I', H', L' situés sur l'arc inférieur; le pentagone HIKELH est la projection conique d'un pentagone H'I'K'E'L'H' inscrit au cercle O, et la tangente EG est celle d'une tangente E'G' du même cercle. Mais on peut regarder l'élément E' comme une corde. Le pentagone H'I'K'E'L'H' devient alors un hexagone inscrit dont les côtés opposés ont leurs concours en ligne droite (89). Ces côtés opposés, devant être séparés par deux autres, sont E'K' et H'L', K'I' et L'E', I'H' et E' ou E'G', puisque la tangente n'est que le prolongement de l'élément du contact. Or, les deux premiers, ayant pour projections coniques les parallèles EK, HL, concourent en un point extérieur P' du diamètre horizontal (215); les deux suivants, ayant pour projections coniques les parallèles KI, LE, concourent en un point intérieur p' du même diamètre (216). Par conséquent, les deux derniers doivent concourir en un certain point G' de la droite P'p', et il s'ensuit que leurs projections coniques IH, EG sont parallèles (216).

260. *Les tangentes de l'hyperbole qui se coupent d'équerre ont leur intersection sur une circonférence décrite du centre de la courbe, avec un rayon égal à l'un des petits côtés du triangle rectangle dont l'hypothénuse est la moitié de l'axe transverse, et le troisième côté, la moitié de l'axe déclinant.*

Ce principe sera évidemment démontré, si nous faisons voir que la circonférence qui, décrite du centre S de l'hyperbole AB (P. VI, F. 1), passe par l'intersection E de deux tangentes d'équerre quelconques EH, EI, a en effet un rayon SK tel que

$$\overline{SK}^2 = \overline{SB}^2 - \overline{SC}^2.$$

La projection conique de la circonférence KL sur le plan du cercle G', générateur de l'hyperbole AB, est une autre hyperbole qui a K'L' pour axe transverse (210). Le point E répond à un certain point E' de cette hyperbole, et les tangentes E'H', E'I' du cercle G' répondent aux tangentes EH, EI de l'hyperbole AB.

Soient M, N les deux points situés aux intersections de la branche de gauche avec les diamètres HS, IS. Les tangentes MO, NP sont parallèles respectivement aux conjugués de ces diamètres, comme EH, EI (249), et par conséquent, les quatre tangentes de l'hyperbole AB forment un rectangle. Mais EH, MO passent à la même distance du centre S (256), et il en est de même de EI, NP. Ce centre est donc l'intersection des lignes-milieux et des diagonales du rectangle EOQP; les diagonales EQ, OP sont des diamètres de la circonférence KL; le rectangle est inscrit à cette circonférence, et il a pour projection conique le quadrilatère E'O'Q'P'E' inscrit à l'hyperbole K'L', dont les diagonales O'P', E'Q' sont parallèles à l'axe transverse, comme prolongeant les projections coniques des diamètres OP, EQ de la circonférence KL (212).

Menons maintenant, par les points K, L, quatre tangentes à l'hyperbole AB. Celles qui partent de K sont symétriques entre elles et avec celles qui partent de L; toutes quatre passent donc à la même distance du centre S, et par conséquent, elles forment un carré KRLT inscrit à la circonférence KL. Mais les deux tangentes menées de K sont les projections coniques des deux tangentes menées de K' au cercle G'; de même les deux tangentes tirées de L répondent aux droites qui, passant par L', touchent le cercle G'; ces quatre tangentes forment un losange, parce que celles de chaque groupe sont symétriques et que G'K' = G'L'; les opposées ne concourent donc qu'à l'infini, comme parallèles. Or les prolongements des quatre mêmes tangentes doivent donner un quadrilatère inscrit à l'hyperbole K'L'; les opposées ne rencontrent donc cette courbe qu'à l'infini, et sont conséquemment parallèles à l'asymptote située entre elles (232).

Il s'ensuit que la perpendiculaire K'U', abaissée sur l'asymptote G'U', égale le rayon du cercle G', ou la moitié CS de l'axe déclinant qui appartient à l'hyperbole AB (221). Mais la perpendiculaire K'V' à l'axe transverse K'L', comprise entre le sommet et l'asymptote, vaut S'G' ou BS (234); les triangles semblables G'K'V', G'U'K' donnent

$$G'K' : G'V' :: K'U' : K'V', \text{ puis } \overline{G'K'}^2 : \overline{G'V'}^2 :: \overline{K'U'}^2 : \overline{K'V'}^2;$$

et

$$\overline{G'V'}^2 = \overline{G'K'}^2 + \overline{K'V'}^2.$$

Conséquemment,

$$\overline{G'K'}^2 : \overline{G'K'}^2 + \overline{K'V'}^2 :: \overline{K'U'}^2 : \overline{K'V'}^2, \quad \overline{G'K'}^2 : \overline{K'V'}^2 :: \overline{K'U'}^2 : \overline{K'V'}^2 - \overline{K'U'}^2,$$

$$\overline{G'K'}^2 : \overline{BS}^2 :: \overline{CS}^2 : \overline{BS}^2 - \overline{CS}^2.$$

D'un autre côté, il résulte des parallèles BG', LG'',

$$L'G' : G'S' :: L''G'' : G''S', \text{ puis } \overline{L'G'}^2 : \overline{G'S'}^2 :: \overline{L''G''}^2 : \overline{G''S'}^2,$$

ou bien

$$\overline{G'K'}^2 : \overline{BS}^2 :: \overline{CS}^2 : \overline{SK}^2.$$

Comparant cette proportion à la dernière de celles qu'ont fournies les triangles G'K'V', G'U'K', on voit qu'effectivement

$$\overline{SK}^2 = \overline{BS}^2 - \overline{CS}^2.$$

261. *Une hyperbole dont l'axe déclinant surpasse l'axe transverse n'a point de tangentes qui se coupent d'équerre.*

On pourrait se contenter de remarquer qu'alors il n'est plus possible de déterminer le rayon SK de la circonférence sur laquelle doivent se couper les tangentes d'équerre (260), puisque l'hypothénuse BS du triangle rectangle qui le donne se trouve moindre que le côté CS; mais la démonstration suivante met mieux en évidence les causes du fait.

Lorsque le demi-axe déclinant BL (P. V, F. 21) surpasse le demi-axe transverse BS, les angles ESZ′, ESY′, que font les asymptotes avec le dernier, sont plus grands que 45°. Il en est de même, à plus forte raison, des angles EGB, HIB (P. VI, F. 2), formés sur AB par deux tangentes EG, HI de chaque branche (257). Deux des angles du triangle GIK donnent donc en somme plus de 90°, et l'angle EKH des deux tangentes est obtus.

Quant à l'angle HLM, compris entre une tangente HI de la branche de droite et une tangente MN de la branche de gauche, il est nécessairement aigu, puisque les deux autres angles du triangle ILN ont une somme qui excède 90°.

262. *Les seules tangentes de l'hyperbole équilatère qui se coupent à angle droit sont les asymptotes* (240).

D'après le n° 260, le rayon de la circonférence sur laquelle se coupent toutes les paires de tangentes d'équerre est déterminé par l'égalité $\overline{SK}^2 = \overline{BS}^2 - \overline{CS}^2$. Or les deux axes d'une hyperbole équilatère sont égaux. Conséquemment, BS = CS, SK = 0, et la circonférence se réduit à son centre, point où se croisent les asymptotes.

263. *Le contact* E *d'une tangente* (P. VI, F. 3) *est le milieu de la partie* HK *comprise entre les deux asymptotes* SK, SL.

La tangente HK est une corde dont les deux intersections se sont confondues pour former le contact E. Les parties de cette corde, comprises entre l'hyperbole et les asymptotes, ont donc le point E pour extrémité commune, et par suite (236), EH = EK.

264. *La droite des contacts* E, G *de deux tangentes quelconques d'une hyperbole* (P. VI, F. 3) *est parallèle aux droites* HI, KL, *qui joignent les intersections correspondantes de ces tangentes* HK, IL *avec les asymptotes* SK, SL.

Puisque les deux parties EH, EK de la première tangente sont égales (263), ainsi que les deux parties GI, GL de la seconde, les concourantes HK, IL se trouvent divisées en parties proportionnelles par les droites HI, EG, KL, et ces trois droites sont en conséquence parallèles. On voit de même qu'il y a parallélisme entre les droites HI′, EG′, KL′ que détermine la tangente I′L′ de l'autre branche.

265. *La corde des contacts de deux tangentes quelconques d'une*

hyperbole coupe au milieu la partie qu'interceptent ces tangentes sur chaque asymptote.

Soient les tangentes HK, IL (P. VI, F. 3). La partie de l'asymptote SK qu'elles interceptent est IK, et le milieu M de cette partie se trouve précisément sur le prolongement de la corde EG des contacts.

En effet, les parallèles EG, HI (264) coupent les concourantes HK, IK en parties proportionnelles, et comme HE = EK (263), le point M du prolongement de GE donne MI = MK.

On voit de même que NH = NL, et que OH = OL′.

Tracés des tangentes de l'hyperbole.

266. Probl. (*a*) : *Mener une tangente à l'hyperbole, par un point donné sur cette courbe.*

Solution 1 : Tirez, par le point donné E (P. V, F. 27), un diamètre ES ; tracez, par le sommet B, une corde BQ qui soit parallèle à ES et aille d'une branche à l'autre ; joignez l'autre sommet A au point Q ; puis menez, par E, une parallèle à AQ. Cette parallèle EP sera tangente à l'hyperbole (249), car elle se trouvera parallèle au conjugué HS de ES (227).

Mais, ce procédé exige que la courbe soit prolongée fort loin, quand le point donné n'est pas très-voisin de l'axe transverse.

Solution 2 : Abaissez du point donné E (F. 29) une perpendiculaire EP sur l'axe transverse ; cherchez une troisième proportionnelle à l'abscisse SP du contact et au demi-axe transverse SB (253) ; portez-la sur cet axe, du centre S en T. La droite ET sera la tangente demandée.

Solution 3 : Abaissez du point donné E (F. 29) une perpendiculaire EP sur l'axe transverse ; cherchez la sous-tangente, quatrième proportionnelle à SP, BP, SP + SB (254), et portez-la sur l'axe transverse, de P en T. La droite ET sera la tangente demandée.

Solution 4 : Tirez, par le point donné E (F. 30), une corde EK de la branche sur laquelle se trouve ce point, et une corde EL entre les deux branches, de manière que les droites LH, KI, parallèles à ces cordes, donnent des points H, I assez écartés pour rendre exact le tracé de la droite HI qui les unit. La parallèle EG de HI sera la tangente demandée, puisque, dans le pentagone inscrit EKIHLE, HI est le côté opposé au sommet E (259).

Solution 5 : Tracez les rayons vecteurs EF, EF′ du point donné E (F. 28), puis la bissectrice de l'angle FEF′ qu'ils forment ; cette bissectrice EG sera tangente au point E de l'hyperbole (252).

Solution 6 : Menez, par le point donné E (P. VI, F. 3), une parallèle EP à l'asymptote la plus voisine SK, jusqu'à l'autre asymptote SL ; portez sur cette dernière, de l'intersection P en H, la distance PS de la même intersection au centre S ; puis tirez EH ; cette droite sera tangente en E (263), car EH = EK comme PH = PS.

Solution 7 : Soit G′ le point donné. Vous élèverez sur l'axe transverse, au sommet B de la même branche, une perpendiculaire BQ, qui sera tangente en ce même sommet (251); puis, ayant marqué les intersections Q, R de l'une des asymptotes avec cette tangente et la corde des contacts BG′, vous porterez de R en L′ la distance RQ de ces deux intersections. La droite L′G′ sera la tangente demandée (265).

PROBL. (*b*) : *Mener une tangente à l'hyperbole, par un point* E *donné hors de cette courbe* (P. VI, F. 4).

Décrivez de E une circonférence, avec un rayon égal à la distance EF de ce point au foyer de la branche sur laquelle doit se trouver le contact; coupez cette circonférence en deux points G, H, par un arc décrit de l'autre foyer F′, avec l'axe transverse AB pour rayon; puis, abaissez de E des perpendiculaires sur les cordes FG, FH; ces perpendiculaires EI, EK seront tangentes à la courbe.

Ainsi, le problème a deux solutions, et deux tangentes peuvent toujours être menées à l'hyperbole d'un point extérieur. Elles appartiennent à la même branche, si le point donné est dans l'un des angles par lesquels les asymptotes embrassent la courbe; mais l'une va toucher la branche de droite, et l'autre, la branche de gauche, quand le point donné se trouve dans les angles supplémentaires des précédents (258).

Démonstration : La droite EI, par exemple, est effectivement tangente à l'hyperbole, si le point I, déterminé par le prolongement de F′G, appartient à cette courbe, car elle forme des angles égaux avec FI et F′I (252). Or, $F'I - IG = F'G = AB$, et comme les obliques IF, IG sont de même longueur, on a aussi $F'I - FI = AB$ (246).

PROBL. (*c*) : *Tracer, parallèlement à une droite donnée, une tangente à l'hyperbole.*

Solution 1 : Soit RT la droite donnée (P. V, F. 27). Tirez, par l'un A des sommets, une corde AQ parallèle à RT; puis, par le centre S, un diamètre parallèle à la corde qui joint le point Q à l'autre sommet B, et des parallèles à AQ, par les extrémités E, I du diamètre. Ces parallèles EM, IL seront tangentes à la courbe (249), car elles se trouveront parallèles au conjugué du diamètre EI (227).

Solution 2 : Soit OP la droite donnée (F. 28). Abaissez, du foyer F de la branche où doit être le contact, une perpendiculaire FH sur OP; décrivez, de l'autre foyer F′, avec l'axe transverse AB pour rayon, un arc qui coupe cette perpendiculaire; joignez le même foyer F′ à l'intersection H la plus voisine de F, en prolongeant la droite jusqu'à l'hyperbole; puis, par le point E ainsi trouvé sur la courbe, menez une parallèle à OP; cette parallèle EG sera tangente en E.

Démonstration : En effet, EG se trouve perpendiculaire à FH, et comme les obliques EF, EH sont égales, valant chacune F'E — AB (246), les angles GEF, GEF' ont la même indication (252).

Probl. (*d*) : *Tracer, perpendiculairement à une droite donnée, une tangente à l'hyperbole.*

Solution 1 : Par le foyer F de la branche où doit être le contact (P. V, F. 28), menez une parallèle FH à la droite donnée QR; décrivez, de l'autre foyer F', avec l'axe transverse AB pour rayon, un arc qui coupe cette parallèle; joignez le même foyer F' à l'intersection H la plus voisine de F, en prolongeant la droite jusqu'à l'hyperbole; puis, du point E ainsi trouvé sur la courbe, abaissez une perpendiculaire sur QR ou sur FH. Cette perpendiculaire EG sera tangente en E.

La démonstration est la même que celle de la solution 2 du problème précédent.

Solution 2 : Menez, parallèlement à la droite donnée XY (P. VI, F. 1), une tangente EI à l'hyperbole (probl. *c*); décrivez de l'extrémité C de l'axe déclinant, avec la moitié BS de l'axe transverse pour rayon, un arc qui coupe cette même moitié en L, et du centre S, avec un rayon égal à la distance de ce centre à l'intersection L, un autre arc qui coupe la tangente EI en deux points. Si, par ces points E, O, vous élevez des perpendiculaires sur EI, vous aurez deux droites EH, OM qui satisferont aux conditions.

Démonstration : D'abord EH, OM sont d'équerre sur XY comme sur EI; ensuite, elles touchent l'hyperbole, parce que (260) leurs intersections avec la tangente EI se trouvent sur une circonférence dont le rayon

$$SL = \sqrt{(\overline{BS}^2 - \overline{CS}^2)}.$$

Observation : La première solution doit être préférée à la seconde, lorsque les foyers peuvent être marqués, car celle-ci, ne donnant point les contacts, met dans la nécessité de faire un autre tracé pour les déterminer.

Probl. (*e*) : *Trouver le contact d'une droite donnée* EG *tangente à l'hyperbole* (P. V, F. 27).

Solution 1 : Menez, par le sommet A de la branche touchée, une corde AQ parallèle à la tangente, et par le centre S, un diamètre parallèle à la corde qui joint l'extrémité Q de AQ à l'autre sommet B. Le point E où ce diamètre coupera la droite donnée EG sera le contact (249), attendu que la tangente se trouvera parallèle au conjugué de ES (227).

Solution 2 : Du foyer F de la branche touchée (F. 28), abaissez une perpendiculaire FT sur la tangente, et prolongez-la de manière que la partie TH = FT; puis joignez l'autre foyer F' à l'extrémité H du prolongement. L'intersection E de F'H et de la tangente EG sera le contact demandé, car le point H appartient nécessairement au rayon vecteur mené du foyer F' à ce contact (252).

NORMALES DE L'HYPERBOLE.

267. *Toute normale* EU *de l'hyperbole* (P. V, F. 28) *fait des angles égaux avec l'un* EF *des rayons vecteurs du point d'incidence* E *où elle coupe la courbe, et le prolongement* EV *de l'autre* EF'.

Soit menée la tangente EG du point E. L'angle

$$FEU = GEU - FEG = 90° - FEG,$$

puisque la normale et la tangente du même point sont d'équerre (4). Pour la même raison, l'angle

$$UEV = 90° - VEX.$$

Or, $VEX = F'EG = FEG$ (252). Par conséquent,

$$UEV = 90° - FEG = FEU.$$

268. *Aucune des normales d'une hyperbole ne coupe l'axe transverse entre les foyers.*

Une droite EY qui, partie d'un point E de la courbe (P. V, F. 28), rencontrerait l'axe transverse entre F, F', diviserait en deux parties l'angle FEF' des rayons vecteurs, et si elle était normale, on aurait (267) $VEY = FEY$, ce qui est impossible, puisque VEY égalerait toujours $FEY + FEV$.

269. *Les deux normales des sommets passent seules par le centre de l'hyperbole.*

Comme les tangentes aux sommets sont perpendiculaires à l'axe transverse (251), les normales des mêmes points se confondent avec cet axe, et leurs prolongements passent par le centre. Mais, pour tout autre point, la tangente se trouve inclinée sur l'axe transverse, et la normale le croise; si donc elle passait par le centre, le croisement se ferait entre les foyers, ce que ne permet pas le principe 268.

270. *Les normales de deux points symétriquement placés par rapport à un axe se coupent sur cet axe et sont égales, prises du concours à la courbe.*

Cela résulte de ce que le rabattement d'une branche sur l'autre, ou d'une moitié de branche sur la seconde moitié, fait coïncider les points symétriques, leurs tangentes et leurs normales, sans déplacer l'intersection de la normale tournante avec l'axe pris pour charnière.

271. On appelle *sous-normale* la partie NP de l'axe transverse, (P. V, F. 29) comprise entre le pied de la normale EN et celui de l'ordonnée EP du point d'incidence.

Dans l'hyperbole, la sous-normale contient l'abscisse de l'incidence, comme le quarré numérique du demi-axe déclinant contient celui du demi-axe transverse, de sorte que $NP : SP :: \overline{SC}^2 : \overline{SB}^2$.

Le triangle rectangle NET, formé par la normale et la tangente ET, donne

$$NP : PE :: PE : PT \quad \text{ou} \quad NP = \frac{\overline{PE}^2}{PT}.$$

Or (243)

$$\overline{PE}^2 = \frac{\overline{SC}^2}{\overline{SB}^2}(\overline{SP}^2 - \overline{SB}^2), \quad \text{et (254)} \quad PT = \frac{\overline{SP}^2 - \overline{SB}^2}{SP}.$$

Conséquemment,

$$NP = \frac{\overline{SC}^2}{\overline{SB}^2}(\overline{SP}^2 - \overline{SB}^2) : \frac{\overline{SP}^2 - \overline{SB}^2}{SP} = \frac{\overline{SC}^2}{\overline{SB}^2} SP,$$

ce qui revient à la proportion annoncée.

272. *Dans l'hyperbole équilatère, la partie* SE *de l'axe transverse, comprise entre le centre et la normale* EG (P. VI, F. 5), *est coupée au milieu par la perpendiculaire* GH *abaissée du point d'incidence* G.

La tangente IK, comprise entre les asymptotes, a son milieu au contact G, puisque GI = GK (263). Ainsi, GL, parallèle à IS, divise en deux parties égales la portion SK d'asymptote. Mais l'asymptote IS est perpendiculaire à SK (240). Donc GL est aussi perpendiculaire sur SK; les obliques GK, GS sont égales; le triangle KGS est symétrique; l'angle GKS = GSK, et l'angle extérieur IGS = 2GSK. D'ailleurs,

$$KSH = GSK + GSH, \quad GSH = KSH - GSK = 45^\circ - GSK.$$

Or il résulte des triangles rectangles et semblables EGM, GHM, que l'angle

$$\begin{aligned} GEH = HGM = 90^\circ - GMH &= 45^\circ + KSH - GMH \\ &= 45^\circ + GSK + GSH - GMH = 45^\circ + GSK + GSH - (GSH + IGS) \\ &= 45^\circ + GSK - IGS = 45^\circ + GSK - 2GSK = 45^\circ - GSK. \end{aligned}$$

Conséquemment,

$$GEH = GSH;$$

le triangle EGS est symétrique; les obliques égales GE, GS se trouvent également éloignées de la perpendiculaire GH, et enfin, le point H forme le milieu de ES.

273. *Dans l'hyperbole équilatère, la partie de normale* GE, *comprise entre l'incidence et l'axe transverse* (P. VI, F. 5), *égale la distance* GS *de cette incidence au centre.*

La démonstration précédente établit en effet que les obliques EG, GS sont égales.

274. *La partie de normale* CE, *comprise entre les axes d'une hyperbole équilatère, est coupée au milieu par la courbe* (P. VI, F. 5).

La droite GN, parallèle à l'axe transverse, égale SH, et par suite EH (272), et comme les angles N, CGN sont égaux aux angles H, GEH, le triangle CNG égale le triangle EHG, d'où suit que CG = EG.

Tracés des normales de l'hyperbole.

273. Probl. (*a*) : *Tracer une normale de l'hyperbole, par un point* E *donné sur la courbe* (P. V, F. 28).

Solution 1 : Menez une tangente EG par le point donné ; puis élevez, au même point, une perpendiculaire EU sur cette droite (4).

Solution 2 : Tirez les rayons vecteurs EF, EF′ du point donné ; puis tracez la bissectrice EU de l'angle FEV, ou de l'angle F′EZ, formé par l'un de ces rayons et le prolongement de l'autre (267).

Solution 3 : Abaissez, du point donné E (F. 29), une perpendiculaire EP sur l'axe transverse ; cherchez une quatrième proportionnelle X à SB, SC, SP, et une quatrième proportionnelle à SB, SC, X ; puis portez cette dernière sur l'axe transverse, de P en N. EN sera la normale demandée.

Démonstration : Puisque SB : SC :: SP : X,

$$X = \frac{SC}{SB} SP.$$

Puisque SB : SC :: X : PN,

$$PN = \frac{SC}{SB} X = \frac{SC}{SB} \times \frac{SC}{SB} SP = \frac{\overline{SC}^2}{\overline{SB}^2} SP.$$

La distance PN égale donc la sous-normale (271), et par conséquent EN est bien normale en E.

Probl. (*b*) : *Tracer une normale de l'hyperbole, par un point* E *donné entre les branches* (P. VI, F. 6).

Décrivez une circonférence dont le centre soit le point donné E, et le rayon, la distance de ce point au foyer F de la branche sur laquelle doit se faire l'incidence ; décrivez ensuite un arc GH, de l'autre foyer F′, avec l'axe transverse AB pour rayon ; tirez, par F′, plusieurs sécantes du cercle E ; marquez les milieux I, I′, I″, etc., des parties de sécantes qui excèdent les rayons de GH, et joignez ces milieux par une courbe II′I″...A ; le point K où elle coupera l'hyperbole sera précisément le point d'incidence de la normale ; de sorte qu'en joignant E à K vous aurez la droite demandée.

Démonstration : La courbe auxiliaire II′I″...A est le lieu du milieu de l'excès de toute sécante sur le rayon correspondant de l'arc GH, car F′A — FA = AB = F′H, F′A — AH = F′H, et par suite

$$FA = AH.$$

Si donc l'incidence K de la normale EK forme le milieu de l'excès LM de la sécante F′KM sur F′L, cette incidence se trouvera effectivement sur la courbe auxiliaire.

D'abord KL = FK, car F'K — FK = AB = F'L et F'K — KL = F'L. Ensuite, l'angle EKM = EKF (267); EM = EF; par conséquent, les triangles EKM, EKF sont égaux, et

$$KM = KF = KL.$$

Probl. (*c*) : *Tracer une normale de l'hyperbole, par un point* E' *donné dans l'espace que renferme l'une des branches* (P. VI, F. 6).

Appliquez la solution du problème précédent.

Démonstration : L'égalité de KM et de KF, qui vient d'être démontrée, rend égaux les triangles KNM, KNF, formés par la corde FM du cercle E. La normale EE' coupe donc cette corde d'équerre et au milieu. Il s'ensuit que la circonférence décrite de E', avec E'F, passe par M; que F'KM est une sécante de cette circonférence, et que la courbe auxiliaire, déduite des sécantes de la même circonférence, coupe LM en deux parties égales. On ferait voir d'ailleurs, comme tout-à-l'heure, que l'incidence K est le milieu de LM.

Probl. (*d*) : *Tracer une normale de l'hyperbole équilatère, par un point* G *donné sur la courbe* (P. VI, F. 5).

Solution 1 : Abaissez, du point donné G, une perpendiculaire GH sur l'axe transverse; portez sur le même axe, de H en E, la distance SH du centre au pied de cette perpendiculaire; la droite EG sera la normale demandée (272).

Solution 2 : Décrivez du point donné G, avec un rayon égal à la distance GS de ce point au centre, un arc qui coupe une seconde fois l'axe transverse; puis joignez la seconde intersection E au point G. La droite EG sera normale à l'hyperbole équilatère (273).

Solution 3 : Menez, du point donné G, une perpendiculaire GH et une parallèle GN à l'axe transverse; portez GH sur l'axe déclinant, de N en C, et tirez CG; cette droite sera normale à la courbe (274).

Observation : Il convient d'employer à la fois la troisième solution et l'une des deux premières, quand le point donné se trouve très-voisin d'un sommet. La normale est alors déterminée par les points C, E, plus écartés que G et C ou E, et le tracé de cette droite s'en trouve plus exact.

Applications : I. Tout corps élastique qui, parti du foyer F d'une hyperbole (P. V, F. 28), va heurter un point E de la branche à laquelle appartient ce foyer, se réfléchit selon une droite EV dont le prolongement passe par l'autre foyer F'.

Effectivement, les corps élastiques rebondissent en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence, et ces angles sont ceux que les deux directions forment avec la normale du point choqué. Si donc EU est la normale de l'hyperbole pour le point E, le corps parti de F doit rejaillir selon la droite qui fait avec EU un angle égal à l'angle d'incidence FEU. Or le prolongement EV du rayon vecteur F'E coupe précisément la normale EU sous un angle VEU égal à FEU (267); par conséquent, c'est bien selon EV qu'aura lieu le renvoi du corps élastique.

Ainsi, les réflexions que l'hyperbole fait éprouver à des rayons lumineux, ou calorifiques, ou sonores, émanés d'un foyer, s'effectuent selon des droites divergentes.

II. L'hyperbole est la vraie courbe des cheminées, c'est-à-dire que l'âtre doit être formé d'une portion de cylindre vertical et creux qui ait pour base un arc EAG d'hyperpole (P. VI, F. 7).

Il faut, en effet, pour qu'une cheminée soit bonne, que tous ceux qui s'y chauffent reçoivent également la chaleur du foyer et qu'ils en reçoivent tout ce que les parois n'absorbent pas. Or le cylindre hyperbolique remplit seul ces conditions.

Supposons le feu concentré au foyer F de l'hyperbole. Tous les rayons calorifiques directs divergeront en couvrant l'angle EFG, et chacune des personnes qui se trouveront dans cet angle, en recevra une égale portion. Les rayons réfléchis divergeront aussi (Appl. I) en couvrant l'angle formé par les concourantes HE, IG; il n'y en aura pas deux qui se croiseront; aucun ne se trouvera arrêté par les parois de l'âtre, et par conséquent, la cheminée répandra au dehors uniformément toute la chaleur qui ne sera pas absorbée par la matière du cylindre.

Il n'en serait plus de même, si l'arc d'hyperbole était remplacé par un arc de cercle qui contînt les trois points E, A, G. En quelque point de AK que fût placé le foyer, les rayons réfléchis convergeraient avec cette droite; plusieurs se croiseraient dans les angle HEK, IGK, et aucun ne se ferait sentir dans le voisinage de EH, GI.

Le trapèze de Rumfort serait encore plus défectueux, quand même ses côtés concourants EL, GM, tangents aux points E, G de l'arc d'hyperbole, donneraient les mêmes rayons extrêmes EH, GI; car, non-seulement plusieurs des rayons réfléchis par les faces EL, GM de l'âtre convergeraient avec AK, mais encore ces faces arrêteraient une partie de la chaleur renvoyée par AL, AM, et elles en arrêteraient d'autant plus que le fond LM serait plus grand ou plus rapproché du foyer F.

Ainsi, l'intensité et l'uniformité de la réflexion du calorique exigent que l'âtre d'une cheminée soit un cylindre hyperbolique. Nous avons fait voir dans la Géométrie élémentaire, applications des cylindres, qu'un tuyau circulaire est à préférer au tuyau prismatique, sous le rapport de la force du tirage et de la facilité du ramonage. Une cheminée parfaite doit donc être composée de deux cylindres creux superposés; mais il importe que ces cylindres ne produisent pas une arête en se rachetant, car les coudes ralentissent la marche des gaz. On devra donc raccorder les deux parties du canal au moyen d'une surface développable, de manière à former une espèce de hotte renversée, analogue à celle des cheminées de laboratoire ou de forge.

Quant au tracé de l'arc EAG d'hyperbole, on l'exécute en appliquant le problème *e* du n° 248, car la largeur EG de la cheminée est connue; le sommet A et le foyer F sont sur une perpendiculaire au milieu de EG, le premier à une distance de K qui égale la profondeur, le second à une distance de A que détermine l'épaisseur ordinaire des bûches. Mais ce n'est pas sur l'emplacement de la cheminée que se feront les opérations : le mur de fond LM en rendrait impossible une partie. Il faut faire une épure sur une aire plane et libre, puis rapporter la courbe entre EG et LM.

COMBINAISONS DE L'HYPERBOLE ET DE LA CIRCONFÉRENCE.

De toutes les combinaisons de l'hyperbole et de la circonférence, deux seulement offrent de l'intérêt : ce sont celle où les deux courbes se trouvent sur la même surface conique, et celle où elles ont la même courbure.

Hyperbole et cercle de plans différents.

276. *Pour qu'une hyperbole et un cercle, situés dans des plans perpendiculaires, appartiennent à la même surface conique, il faut que le rapport du demi-axe déclinant au rayon, égale celui du demi-axe transverse à la distance du centre de l'hyperbole au plan du cercle.*

Il est clair en effet que, si SC (P. V, F, 17) ou Bc″ : b′g′ :: SB ou S′g‴ : S′g′ ou Sg, distance du centre au plan vertical du cercle, l'hyperbole sera la projection conique de ce cercle sur le plan horizontal S″b″, par lequel est coupé le cône dont le sommet est S, S′, et la base, le cercle cd, a′b′ (210). Les points de la branche LBM seront donc tous sur des génératrices droites de la nappe conique cSd, a′S′b′; les points de la branche EAI se trouveront sur des génératrices droites de l'autre nappe; par conséquent, l'hyperbole formera une courbe de la surface conique et il en sera de même de la circonférence cd, a′b′.

277. *Toute surface conique circulaire est coupée selon une hyperbole, par un plan qui rencontre une partie des génératrices droites sur une nappe, et les autres sur la nappe opposée.*

Chaque point de la section se trouve sur le plan et sur une génératrice droite; cette génératrice contient un point d'une circonférence quelconque de la surface, de sorte que le premier est la projection conique du second sur le plan coupant, et que la section entière forme la projection conique de la même circonférence. Or une telle projection donne toujours une hyperbole (209).

Hyperbole et cercles de même courbure.

278. *Une circonférence ne peut couper l'hyperbole en plus de quatre points.*

Supposons une circonférence qui entre au point E dans la branche de gauche (P. VI, F. 8), en sort au point G, entre au point H dans celle de droite et en sort au point I. Si elle pouvait avoir un cinquième point commun à l'hyperbole, il serait nécessairement, comme K, par exemple, entre l'intersection H et l'une des asymptotes, ou comme O, entre les intersections H, I d'une même branche. Dans le premier cas, la droite HK prolongée donnerait HL = MN (236), KL = MN, et HL = KL, ce qui est impossible. Dans le second cas, la droite HO donnerait HL = MN, OL = MN et HL = OL, ce qui est encore impossible.

On ferait voir de la même manière, qu'une circonférence ne peut couper une même branche en plus de quatre points.

279. *L'hyperbole n'a pas de cercle osculateur pour ses sommets.*

Un cercle osculateur devant être tangent et sécant au même point, ne peut plus avoir qu'une autre intersection avec la courbe (16 et 278). Or tout cercle qui touche l'hyperbole à l'un des sommets a son centre sur l'axe transverse (251). Si donc il coupait la courbe à son contact et en un second point, il la couperait encore au point symétrique de ce dernier.

280. *Le cercle de même courbure que l'hyperbole à l'un des sommets a son centre sur l'axe transverse, au point où concourent les deux normales infiniment voisines de cet axe.*

C'est un contact de seconde espèce (15) que possède le cercle qui, pour le sommet A (P. VI, F. 8), remplace le cercle osculateur (16). Il résulte donc d'un cercle P tangent en A et sécant en deux points symétriques Q, R, dont les intersections se rapprochent également du contact à mesure que le rayon diminue. Or, le centre P se trouve, pour toutes les positions, ou pour toutes les longueurs de rayon, au concours de deux droites symétriques QP, RP, issues des deux intersections, et quand ces intersections sont près de se réunir au contact A, les deux droites, se confondant presque avec le prolongement AP de l'axe AB, deviennent des normales.

281. *Le rayon de courbure pour chaque sommet d'une hyperbole égale le demi-paramètre.*

Ce rayon, d'après le principe précédent, égale l'une des normales infiniment voisines de l'axe transverse, et cette normale se confond avec la sous-normale. Nous aurons donc le rayon de courbure pour chaque sommet, en cherchant la valeur qu'a la sous-normale, quand ce point devient l'incidence. Or en général (271), la sous-normale $NP = \frac{\overline{SC}^2}{\overline{SB}^2}SP$ (P. V, F. 29); lorsque l'incidence se fait au sommet B, $SP = SB$; par conséquent, dans ce cas,

$$NP = \frac{\overline{SC}^2}{\overline{SB}^2}SB = \frac{\overline{SC}^2}{SB}, \quad \text{ou bien} \quad SB : SC :: SC : NP,$$

ce qui signifie que la sous-normale est une troisième proportionnelle au demi-axe transverse et au demi-axe déclinant, comme le demi-paramètre (245).

Problème : *Trouver le rayon et le centre de courbure d'un sommet* B *d'hyperbole* (P. V, F. 29).

Marquez le foyer F'; élevez en ce point une perpendiculaire à l'axe transverse; prolongez-la jusqu'à sa rencontre H avec la courbe, et portez F'H de B en I, sur le même axe. Le point I sera le centre de courbure de l'hyperbole à son sommet B, et IB, le rayon de courbure.

282. *Tous les cercles tangents au même point* E *d'une hyperbole* (P. VI, F. 9), *et sécants en outre, interceptent sur cette courbe des arcs dont les cordes* GH, IK *sont parallèles.*

Tous les cercles tangents au même point E ont en ce point la même tangente EL, et leurs centres M, N, etc., sont sur la normale EM. Parmi ces cercles il en est un qui, au lieu de couper l'hyperbole, la touche une seconde fois en un certain point O; son centre est l'intersection P de EM et de l'axe déclinant, puisque la normale PO doit égaler PE, et les contacts E, O se trouvent symétriquement placés par rapport au même axe (270).

Tirons la tangente OL commune au cercle P et à l'hyperbole (255); menons par le point G une parallèle GH' à OL; puis faisons glisser le centre M le long de ME, en diminuant constamment le rayon MG. Lorsque G sera sur O, le cercle M se confondra avec le cercle P, et H se trouvera aussi sur O. Mais la corde GH' de l'hyperbole aura la position tangentielle OL, et son extrémité H' se confondra avec le contact O, comme H. Ce contact serait donc dû à la réunion des trois points G, H, H' de l'hyperbole, ce qui ne peut être, puisque cette courbe ne saurait avoir plus de quatre points de communs avec le cercle P (278), et que le contact E en renferme déjà deux (15). Par conséquent, il est impossible de mener par G, parallèlement à OL, une corde d'hyperbole qui diffère de GH, et GH, IK sont parallèles entre elles.

On pourrait aussi donner du même principe une démonstration analogue à celle qui a été employée pour l'ellipse (142).

Problème : *Déterminer le centre et le rayon de courbure pour un point quelconque* E *de l'hyperbole, autre que les sommets* (P. VI, F. 9).

Solution 1 : Tracez la normale EM du point donné; d'un point Q pris à volonté sur cette droite, décrivez un cercle de rayon QE qui coupe l'hyperbole en deux points R, T; tirez la corde EU, parallèlement à RT; puis élevez une perpendiculaire au milieu de EU; le point V où elle rencontrera la normale formera le centre du cercle osculateur pour le point E, et VE sera le rayon de courbure cherché.

Démonstration: En effet, V est le centre d'un cercle qui coupe l'hyperbole en U et la touche en E. Mais à cause du parallélisme des cordes EU, RT, le cercle V fait partie des cercles tangents en E et sécants en deux points. Donc, au contact E il y a aussi une intersection; le cercle V est osculateur (16), et le point V forme le centre de courbure de l'élément hyperbolique E (20).

Solution 2: Tracez la normale EM du point donné; de son intersection P avec l'axe déclinant, décrivez une circonférence qui ait PE pour rayon; elle touchera l'autre branche en un point symétrique de E (270), et vous trouverez ce point O en tirant EO parallèlement à l'axe transverse. Joignez ensuite le contact O à l'intersection L de la tangente EL et de l'axe transverse; OL sera une tangente (255) parallèle aux cordes des arcs interceptés sur l'hyperbole par les cercles tangents en E et sécants en deux autres points (282). Si donc vous menez par E une corde EU parallèle à OL, vous pourrez achever comme dans la première solution.

Mesurages de l'hyperbole.

283. *L'hyperbole n'est pas rectifiable* (21), *et la superficie plane qu'elle limite n'est pas quarrable.*

La Géométrie ne fournit aucun moyen de mesurer exactement un arc d'hyperbole. Quant à la courbe entière, on ne saurait en trouver la longueur, même approximativement, puisque l'une et l'autre branche sont infinies.

On n'a pas non plus de formules propres à déterminer l'aire de la surface plane comprise entre un arc d'hyperbole et la corde de cet arc, ou entre les deux branches et deux cordes tirées de l'une à l'autre.

Probl. (*a*): *Mesurer la longueur d'un arc d'hyperbole.*
Employez un des moyens du n° 21.

Probl. (*b*): *Mesurer la superficie d'un segment d'hyperbole et celle d'une partie de l'espace compris entre les branches.*
Appliquez l'une des solutions du n° 22.

HYPERBOLOÏDES.

284. On a nommé *hyperboloïdes* les deux corps indéfinis que terminent les surfaces courbes engendrées par la révolution d'une hyperbole autour de ses axes.

Le mouvement circulaire produit l'*hyperboloïde à deux nappes*, lorsqu'il se fait autour de l'axe transverse, et l'*hyperboloïde à une nappe*, quand il a lieu autour de l'axe déclinant. On aura une idée de la première forme, en se représentant deux clôches de même axe dont les fonds se regardent et se trouvent séparés par un intervalle libre. Là seconde forme est celle d'une corbeille ronde qui s'évase du milieu au bord supérieur et au bord inférieur. Il s'ensuit que, si l'axe de révolution est vertical, chaque hyperboloïde a pour projection verticale l'hyperbole génératrice, et que, si chaque corps est limité par deux plans horizontaux, également éloignés du centre de la courbe, l'hyperboloïde à deux nappes se projette horizontalement selon un seul cercle E (P. VI, F. 10), tandis que la projection horizontale de l'hyperboloïde à une nappe se compose de deux cercles concentriques (F. 11), dont le plus petit a un diamètre égal à l'axe transverse AB.

285. *Tout plan méridien d'un hyperboloïde en coupe la surface courbe selon l'hyperbole génératrice.*

La démonstration est la même que celle du n° 164.

286. *L'hyperboloïde à deux nappes possède deux pôles* P, P' (P. VI, F. 10), *et avec ces pôles se confondent les sommets de toutes les hyperboles méridiennes.*

La démonstration est analogue à celle du n° 165.

287. *Toutes les hyperboles méridiennes d'un hyperboloïde à deux nappes ont leurs foyers aux mêmes points* F, F' *de l'axe de révolution* (P. VI, F. 10); *ces deux points sont les* FOYERS *de la surface courbe.*

Puisque l'axe de révolution PP' est l'axe transverse de chaque hyperbole méridienne, et que tous les petits axes CD sont égaux, la détermination des foyers d'une courbe doit donner les mêmes points F, F' que celle des foyers de toute autre (244).

PROBLÈME : *Tracer la branche d'hyperbole propre à engendrer une calotte d'hyperboloïde* EPG *donnée et terminée par une circonférence* (P. VI, F. 12).

Prenez la longueur de l'axe de révolution PH, soit à l'aide d'un compas à curseur, soit au moyen d'un plan horizontal E*h*, d'une règle horizontale P*p*, et d'un fil aplomb *ph*; prenez aussi la longueur du plus grand diamètre EG, soit à l'aide du même compas, soit en traçant, avec une pointe, l'intersection circulaire de la calotte et du plan horizontal E*h*; tirez E'G' égale à EG, et au milieu, une perpendiculaire H'A égale à HP. Cette dernière droite donnera la direction de l'axe transverse; la branche d'hyperbole demandée aura son sommet au point A, et E', G' en seront deux points symétriques.

Pour avoir deux autres points symétriques, il faudra, au moyen d'un compas courbe, décrire, du pôle P, une circonférence IK sur l'hyperboloïde; marquer arbitrairement trois points de cette courbe; former, sur un tableau, un triangle, avec les distances de ces points; déterminer le rayon du cercle circonscrit au triangle; tracer, sur le même tableau, un triangle rectangle qui ait, pour l'un de ses petits côtés, ce rayon, évidemment égal à IL, et pour hypothénuse, la distance IP du pôle à la circonférence IK; porter, de A en L', le troisième côté, évidemment égal à PL; élever au point

L' une perpendiculaire sur AH', et prendre enfin les demi-cordes L'I', L'K' égales au rayon du cercle IK.

Il est clair qu'en répétant les mêmes opérations, après avoir décrit de P d'autres circonférences parallèles à IK, on trouvera autant de couples de points symétriques qu'il en faudra pour que la branche d'hyperbole E'I'A'K'G' puisse être facilement tracée à vue.

APPLICATIONS : I. Le réflecteur le plus convenable pour porter une vive lumière sur une surface opposée de grandes dimensions, est une des nappes de l'hyperboloïde qui en a deux.

Supposons qu'on ait à éclairer un tableau rectangulaire dont la diagonale soit AB (P. VI, F. 13) ; que la lampe doive être placée en F, sur la droite FG perpendiculaire au milieu de AB, et qu'on veuille terminer le réflecteur par une circonférence qui ait son centre au point C de la même perpendiculaire et dont les diamètres soient des droites DE d'équerre sur CG. Il faudra tirer les droites AD, BE, qui se couperont nécessairement en un point F' de GFC ; prendre F, F' pour les foyers d'une hyperbole assujettie à passer par D, E ; décrire l'arc DPE de cette courbe d'après le problème *c* (248) ; découper la figure DPED, pour en faire une *cherche ;* amboutir une feuille de fer blanc de manière à former une calotte dans laquelle puisse tourner la cherche, en pivotant sur CP et en s'appliquant par tous ses points sur la concavité ; enfin, placer cette calotte dans la position de son profil DPED. Elle formera ainsi un réflecteur qui sera une portion d'hyperboloïde à deux nappes (284), et qui renverra sur le tableau AB, en tronc de cône ADPEB, le cône de lumière DFE qu'il recevra de la lampe.

Effectivement, tous les plans menés par PG couperont la calotte selon des arcs d'hyperbole égaux à DPE (285), dont les foyers seront en F, F' (287), et tous les rayons lumineux issus de F, dans chaque plan, se réfléchiront en éventail, selon des droites dont les prolongements passeront par F' (Appl. I, page 176). Il est du reste évident que les angles compris entre les rayons d'un éventail, égaleront les angles compris entre les rayons correspndants de tout autre, et que la lumière sera uniforme sur chaque circonférence tracée autour de G dans le tableau AB.

On voit aussi qu'il n'y aurait aucune perte de rayons réfléchis, si le tableau était circulaire et d'un diamètre égal à AB. Or, si l'on employait un réflecteur ellipsoïdal, les rayons réfléchis n'éclaireraient qu'un tout petit cercle autour du point G, ou, pour qu'ils éclairassent tout le tableau circulaire AB, il faudrait soit que ce tableau fût placé fort au-delà du second foyer de l'ellipsoïde, soit qu'il se trouvât très-voisin du premier F ; encore devrait-il être moindre que le cercle DE, dans ce dernier cas.

Un réflecteur sphérique aurait les mêmes inconvénients que le précédent, et d'autres qui lui sont particuliers. (Voyez la Géométrie.) Un réflecteur plan causerait une forte perte de rayons réfléchis, s'il était un peu grand, et n'en donnerait qu'une faible quantité, s'il était assez petit pour les envoyer tous sur le tableau. Enfin, un réflecteur qui rendrait les rayons parallèles devrait être aussi grand que le tableau, pour le bien éclairer.

On peut être obligé de placer la lampe F plus haut que le milieu du tableau. Il faut alors incliner le réflecteur hyperboloïde de façon à faire aboutir l'axe PF un peu au-dessus de G, ou, plus exactement, de façon que deux rayons réfléchis extrêmes passent par A et B. Il en serait encore de même dans le cas où le tableau aurait une position inclinée A'B.

II. C'est aussi en hyperboloïde que doivent être faits les réflecteurs des reverbères destinés à l'éclairage des places publiques.

Soit G (P. VI, F. 14) le point où l'axe vertical du reverbère perce le sol, et HI la longueur à éclairer sur le côté de la place auquel est fixée la potence. Ayant levé l'angle HGI, nous le rapporterons sur un carton, afin de diviser l'espace qu'il laisse autour de son sommet, en deux ou trois angles égaux, selon qu'il faudra deux ou trois becs de lampe; puis nous marquerons arbitrairement, sur un côté G'H' de ces angles, un point E, et sur la bissectrice, deux points A, F, le premier à une distance de G' moindre que G'E, le second à une distance du même point supérieure ou tout au moins égale à G'E. L'arc d'hyperbole qui aura A pour sommet, F pour foyer, et passera par E, pourra être tracé au moyen de la solution du problème *e* (248), et le segment EAE' découpé sera la cherche qu'on devra employer pour former les réflecteurs en amboutissant des feuilles métalliques. Ces réflecteurs seront disposés autour de l'axe vertical G du reverbère, de manière que leurs bords se touchent, que ceux des extrêmes soient sur les plans verticaux GH, GI, et que les rayons réfléchis les plus élevés aient une direction horizontale. Enfin, on placera les becs de lampe aux foyers F, F', F''. Alors la place se trouvera éclairée le plus uniformément possible, sans qu'il y ait perte de lumière réfléchie.

288. *La surface courbe de l'hyperboloïde à une nappe n'a ni pôles, ni foyers, et les sommets de ses hyperboles méridiennes se trouvent sur son plus petit cercle, qu'on appelle* GORGE.

La position des sommets résulte de ce que les axes transverses AB des hyperboles méridiennes (P. VI, F. 11) sont les diamètres de la gorge (284). La surface courbe n'a pas de foyers, parce que ceux des hyperboles méridiennes, placés sur les diamètres correspondants de la gorge, ne peuvent se confondre en deux points uniques; elle est dépourvue de pôles, attendu que l'axe de révolution E'E'' ne la rencontre pas.

289. *Tout plan perpendiculaire à l'axe de révolution coupe l'un et l'autre hyperboloïde selon un cercle.*

Ce principe se démontre comme celui du n° 168.

APPLICATIONS : Le tourneur peut former l'un et l'autre hyperboloïde en dégrossissant un corps selon des cercles parallèles. Pour façonner une moitié d'hyperboloïde à deux nappes, il emploie, comme guide pg (P. VI, F. 10), la moitié PG d'une branche de l'hyperbole génératrice; il la place de manière que l'axe transverse pe soit parallèle à la ligne PE' des pointes du tour, et maintenant l'outil perpendiculaire à cette ligne, il le porte à droite ou à gauche, pour faire un autre cercle, dès que cet outil déborde pg d'une longueur égale à pP ou à gG.

Le guide gag' (F. 11) nécessaire à la formation de l'hyperboloïde à une nappe est l'une des branches G'AG'' de l'hyperbole génératrice, et son axe transverse aA doit être perpendiculaire à la ligne E'E'' des pointes du tour.

290. *Tout plan méridien d'un hyperboloïde est un plan de symétrie.*

Même démonstration qu'au n° 169.

291. *Le plan qui coupe d'équerre et par le milieu l'axe de révolution, est un plan de symétrie pour chaque hyperboloïde.*

La démonstration est analogue à celle du n° 170.

292. *Si un plan oblique à l'axe d'un hyperboloïde coupe deux fois, sur la même nappe, toutes les hyperboles méridiennes, l'intersection est une ellipse.*

Supposons vertical l'axe du corps. Parmi tous les plans méridiens verticaux, il y en aura un qui coupera selon une ligne de plus grande pente le plan sécant incliné, et qui, pour cette raison, lui sera perpendiculaire. Prenons-le pour plan de projection, afin de pouvoir représenter le plan sécant par une seule droite EG (P. VI, F. 15 et 16). Les cercles horizontaux de l'hyperboloïde se projetteront selon des droites HI, KL, etc., perpendiculaires à l'axe; les croisements de ces droites avec EG seront les projections de demi-cordes M, N, etc., communes aux cercles et à l'intersection du plan sécant, et si l'on a

$$M^2 : N^2 :: ME \times MG : NE \times NG,$$

cette intersection est effectivement une ellipse dont EG forme le grand axe (47). Or, $M^2 = MH \times MI$, $N^2 = NK \times NL$. Par conséquent,

$$M^2 : N^2 :: MH \times MI : NK \times NL.$$

Il reste donc à démontrer que

$$MH \times MI : NK \times NL :: ME \times MG : NE \times NG,$$

ou qu'en général *dans toute projection conique du cercle, les cordes parallèles* HI, KL, *projections de cordes parallèles de ce cercle, sont coupées par une autre corde quelconque* EG *de manière que les produits* MH × MI, NK × NL, *des deux parties formées sur les premières, se contiennent comme les produits* ME × MG, NE × NG, *des deux parties correspondantes de la transversale.*

Cherchons d'abord la relation d'une droite ab et de sa projection conique AB (F. 17). Si Sc, SC sont les perpendiculaires abaissées du sommet S du cône projetant sur ab, AB, les triangles abS, ABS, qui ont un angle commun, donnent la proportion

$$ab \times Sc : AB \times SC :: Sa \times Sb : SA \times SB,$$

et par suite,

$$AB = ab\,\frac{Sc \times SA \times SB}{SC \times Sa \times Sb}.$$

Nommons maintenant hmi, knl, $enmg$, les cordes du cercle projetées sur HMI, KNL, ENMG (F. 15 et 16), et p, p', p'', P, P′, P″, les perpendiculaires respectives abaissées sur ces six droites du sommet S du cône projetant. Nous aurons

$$MH = mh\,\frac{p \times SM \times SH}{P \times Sm \times Sh}, \quad MI = mi\,\frac{p \times SM \times SI}{P \times Sm \times Si},$$

et

$$MH \times MI = mh \times mi\,\frac{p^2 \times \overline{SM}^2 \times SH \times SI}{P^2 \times \overline{Sm}^2 \times Sh \times Si}.$$

Par conséquent,

$$NK \times NL = nk \times nl\,\frac{p'^2 \times \overline{SN}^2 \times SK \times SL}{P'^2 \times \overline{Sn}^2 \times Sk \times Sl},$$

$$ME \times MG = me \times mg\,\frac{p''^2 \times \overline{SM}^2 \times SE \times SG}{P''^2 \times \overline{Sm}^2 \times Se \times Sg},$$

$$NE \times NG = ne \times ng\,\frac{p''^2 \times \overline{SN}^2 \times SE \times SG}{P''^2 \times \overline{Sn}^2 \times Se \times Sg},$$

et il faut faire voir que

$$mh \times mi\,\frac{p^2 \times \overline{SM}^2 \times SH \times SI}{P^2 \times \overline{Sm}^2 \times Sh \times Si} : nk \times nl\,\frac{p'^2 \times \overline{SN}^2 \times SK \times SL}{P'^2 \times \overline{Sn}^2 \times Sk \times Sl}$$

$$:: me \times mg\,\frac{p''^2 \times \overline{SM}^2 \times SE \times SG}{P''^2 \times \overline{Sm}^2 \times Se \times Sg} : ne \times ng\,\frac{p''^2 \times \overline{SN}^2 \times SE \times SG}{P''^2 \times \overline{Sn}^2 \times Se \times Sg}.$$

Or, le second rapport se réduit à

$$me \times mg\,\frac{\overline{SM}^2}{\overline{Sm}^2} : ne \times ng\,\frac{\overline{SN}^2}{\overline{Sn}^2};$$

les cordes du cercle, se coupant en parties réciproquement proportionnelles, donnent

$$mh \times mi = me \times mg, \quad nk \times nl = ne \times ng.$$

La proportion devient donc

$$\frac{p^2\times SH\times SI}{P^2\times Sh\times Si} : \frac{p'^2\times SK\times SL}{P'^2\times Sk\times Sl} :: 1 : 1.$$

Mais $\frac{p\times SH\times SI}{P\times Sh\times Si}=\frac{HI}{hi}$, $\frac{p'\times SK\times SL}{P'\times Sk\times Sl}=\frac{KL}{kl}$. Ainsi la démonstration sera complète, s'il est vrai que

$$\frac{p\times HI}{P\times hi} : \frac{p'\times KL}{P'\times kl} :: 1 : 1.$$

Or (213), HI, hi sont, dans le triangle HSI, des droites parallèles, respectivement situées aux distances P, p du sommet S; KL, kl sont, dans le triangle KSL, des droites parallèles, respectivement situées aux distances P′, p' du sommet S. Conséquemment,

$$HI : hi :: P : p, \quad KL : kl :: P' : p',$$

$$p\times HI = P\times hi, \quad p'\times KL = P'\times kl, \quad \frac{p\times HI}{P\times hi}=1,$$

et

$$\frac{p'\times KL}{P'\times kl}=1.$$

293. *Tout plan sécant parallèle à l'axe d'un hyperboloïde coupe la surface selon une hyperbole.*

En vertu d'une des propriétés de l'hyperbole (243),

$$\overline{HI}^2 : \overline{OS}^2-\overline{AS}^2 :: \overline{CS}^2 : \overline{AS}^2 \quad \text{(P. VI, F. 18)};$$

$$\overline{KL}^2 : \overline{PS}^2-\overline{AS}^2 :: \overline{CS}^2 : \overline{AS}^2.$$

Donc,

$$\overline{HI}^2 : \overline{KL}^2 :: \overline{OS}^2-\overline{AS}^2 : \overline{PS}^2-\overline{AS}^2,$$

ou

$$\overline{HI}^2 : \overline{KL}^2 :: (OS+AS)(OS-AS) : (PS+AS)(PS-AS),$$

ou encore

$$\overline{HI}^2 : \overline{KL}^2 :: OB\times OA : PA\times PB,$$

relation analogue à celle du n° 47.

Regardons maintenant l'hyperbole de la figure 18 et celle de la figure 19 comme sections méridiennes verticales des deux espèces d'hyperboloïdes, et soit EG, parallèle à l'axe de révolution, la trace d'un plan d'équerre à chacune de ces sections. Les croisements M, N, etc., seront les projections verticales de demi-cordes communes à l'intersection du plan sécant et aux cercles horizontaux HI, KL, etc., cordes qui se trouvent évidemment perpendiculaires à la fois sur les diamètres HI, KL, etc., et sur MN. Ainsi, la coupe de EG est une hyperbole, qui a EG pour axe transverse, si

$$M^2 : N^2 :: ME\times MG : NE\times NG.$$

Or, $M^2 = MH \times MI$, $N^2 = NK \times NL$, et d'après la démonstration du numéro précédent,

$$MH \times MI : NK \times NL :: ME \times MG : NE \times NG,$$

pour la figure 18, puisque HI, KL, perpendiculaires à l'axe AB de l'hyperbole méridienne, sont projections coniques de cordes parallèles du cercle qui a produit cette hyperbole (213). La même proportion a lieu aussi pour la figure 19, car HSI, KSL sont des triangles semblables à hSi, kSl, quoique différemment placés (210), et hi, kl forment, dans le cercle (212), des diamètres que la corde eg coupe extérieurement aux points m, n; de sorte qu'on a

$$mh \times mi = me \times mg, \quad nk \times nl = ne \times ng.$$

Observation : Des moyens analogues montreraient que les sections des deux hyperboloïdes seraient des hyperboles, symétriques seulement par rapport aux axes transverses, si le plan EG, étant oblique sur l'axe de révolution, coupait toujours les deux nappes (F. 18), ou ne coupait encore qu'une branche de l'une des hyperboles méridiennes (F. 19).

294. *La surface de l'hyperboloïde à une nappe est coupée selon deux droites par tout plan qui, parallèle à l'axe de révolution, contient une tangente de la gorge.*

Soit HI la trace du plan (P. VI, F. 11). Il coupe la circonférence inférieure G'K' de l'hyperboloïde en deux points dont les projections sont H et H', I et I'; ses intersections avec la circonférence supérieure G''K'' ont pour projections H et H'', I et I''. Joignons le point H, H' au point I, I'', par une droite HI, H'I''; il faut démontrer que cette droite du plan est tout entière sur la surface courbe de l'hyperboloïde, ou qu'elle contient une des deux intersections du plan vertical HI avec chacune des diverses circonférences de la même surface.

La circonférence LMNO, L''N'' est rencontrée par le plan aux points M, M'', et O, O''; pour que la droite HI, H'I'' renferme le premier de ces deux points, sa projection verticale doit passer par M''. Voyons donc si

$$I'I'' : M'M'' :: I'H' : M'H' \quad \text{ou si} \quad K'K'' : N'N'' :: I'H' : M'H'.$$

Le principe 243 donne

$$\overline{K'K'''}^2 : \overline{SK'''}^2 - \overline{SB}^2 :: \overline{SC}^2 : \overline{SB}^2, \quad \overline{nN'''}^2 : \overline{SN'''}^2 - \overline{SB}^2 :: \overline{SC}^2 : \overline{SB}^2,$$

et par suite

$$\overline{K'K'''}^2 : \overline{nN'''}^2 :: \overline{SK'''}^2 - \overline{SB}^2 : \overline{SN'''}^2 - \overline{SB}^2,$$

ou

$$\overline{K'K''}^2 : \overline{nN''}^2 :: \overline{SK'''}^2 - \overline{SB}^2 : \overline{SN''}^2 - \overline{SB}^2.$$

Mais

$$\overline{SK'''}^2 - \overline{SB}^2 = (SK''' + SB)(SK''' - SB) = GP \times PK = \overline{PQ}^2;$$

$$\overline{SN'''}^2 - \overline{SB}^2 = (SN''' + SB)(SN''' - SB) = LP \times PN = \overline{PR}^2.$$

Ainsi,

$$K'K'' : nN'' :: PQ : PR :: TH : TO :: HI : OM,$$

car $PQ = TH$, $PR = TO$, et le contact T est le milieu des cordes HI, OM. Conséquemment,

$$K'K'' : K'K'' - nN'' :: HI : HI - OM, \quad K'K'' : 2nN' :: HI : 2MI,$$

$$K'K'' : nN' :: HI : MI, \quad K'K'' : K'K'' - nN' :: HI : HI - MI,$$

$$K'K'' : N'N'' :: HI : HM.$$

Or, à cause des parallèles HH', MM', II',

$$HI : HM :: I'H' : M'H'.$$

Donc enfin,

$$I'I'' : M'M'' :: I'H' : M'H';$$

la droite HI, H'I'' passe par le point M, M'', et par une des deux intersections du plan avec toute autre circonférence de l'hyperboloïde.

On démontrerait de la même manière que la droite HI, H''I' est tout entière sur la surface courbe. Ainsi, cette surface est *réglée* dans deux sens différents, en chaque point.

295. *La surface courbe de l'hyperboloïde à une nappe peut être engendrée par les révolutions successives ou simultanées de deux droites autour d'un axe; mais il faut 1° qu'elles ne le rencontrent pas, 2° qu'elles soient toujours égales et également inclinées sur un plan perpendiculaire à cet axe, 3° que l'inclinaison et la longueur de chacune restent les mêmes pendant tout le mouvement.*

Faisons tourner le plan vertical HI (P. VI, F. 11) autour de l'axe vertical E, E'E'', de manière qu'il prenne constamment une tangente de la gorge; il coupera la surface courbe selon deux droites croisées, dans chacune de ses positions (294). Ces deux droites ne rencontreront pas l'axe, puisque leurs plus courtes distances à cette ligne égaleront toujours le rayon ET de la gorge; elles seront également inclinées sur le plan d'un des cercles GIKH de la surface, parce qu'elles formeront les hypothénuses de deux triangles rectangles égaux dont les deux autres côtés égaleront HI, I'I''; enfin chacune aura la même inclinaison et la même longueur dans toutes les positions du plan vertical HI, attendu qu'elle sera partout l'hypothénuse d'un des triangles rectangles qui viennent d'être indiqués.

Donc réciproquement, si l'on fait tourner une des droites autour de l'axe E, E'E'', de manière qu'elle en soit toujours à la même distance et qu'elle s'incline toujours également, cette droite engendrera la surface courbe de l'hyperboloïde à une nappe.

296. *Le quarré numérique de la génératrice droite d'un hyperboloïde à une nappe, considérée de la gorge à un des cercles parallèles, égale le quarré de la distance des centres, augmenté de la différence des quarrés des rayons.*

La génératrice $\underline{\mathrm{HI},\ \mathrm{H'I''}}$ (P. VI, F. 11) rencontre la gorge au point $\underline{\mathrm{T},\ \mathrm{T'''}}$, et le cercle parallèle $\underline{\mathrm{GIKH},\ \mathrm{G'K'}}$ au point $\underline{\mathrm{H},\ \mathrm{H'}}$. Représentons par x la distance de ces deux points; le triangle rectangle formé par x, HT et la ligne projetante du point $\underline{\mathrm{T},\ \mathrm{T'''}}$, donne

$$x^2 = \overline{\mathrm{T'T'''}}^2 + \overline{\mathrm{HT}}^2.$$

Mais le triangle ETH est rectangle aussi, puisque HI touche le petit cercle E en T. Par conséquent,

$$\overline{\mathrm{HT}}^2 = \overline{\mathrm{EH}}^2 - \overline{\mathrm{ET}}^2, \quad \text{et} \quad x^2 = \overline{\mathrm{T'T'''}}^2 + \left(\overline{\mathrm{EH}}^2 - \overline{\mathrm{ET}}^2\right).$$

Or $\mathrm{T'T'''} = \mathrm{E'S}$, distance des centres; EH, ET sont les rayons des deux cercles.

Applications : I. On fait des vases en terre qui ont la forme de l'hyperboloïde à une nappe, mais dont le cercle inférieur L'n (P. VI, F. 11) est plus petit que le cercle supérieur G''K''. Ils sont façonnés sur le tour du potier, au moyen d'un *gabarit gal'z*, planchette mince dont un des bords présente un arc *gal'* d'hyperbole. Ce gabarit est placé de manière que l'axe transverse Aa soit horizontal, et que la distance du sommet a à l'axe vertical du tour égale le rayon AS de la gorge. Dans cette position, le bord hyperbolique enlève, pendant la rotation de la masse de terre placée sur le plateau du tour, tout ce qui excède l'hyperboloïde G''AL'nBK''.

II. L'industrie produit aussi des vases métalliques hyperboloïdes, en coulant la matière liquide dans des moules de sable, formés sur un modèle en bois ou en laiton G''AL'nBK''. Afin que le modèle puisse être *dépouillé*, c'est-à-dire séparé du sable qui l'entoure, chaque moule se fait de deux parties dont le joint est un plan diamétral GK. On sépare ces parties pour opérer le dépouillement, puis on les remet en contact pour faire la coulée dans le creux hyperboloïde qui reste entre elles.

III. Certaines tables de jardin, en piédouche à claire-voie, présentent deux plateaux circulaires inégaux G''K'', L'n, liés par des tringles cylindriques croisées, qui forment une surface d'hyperboloïde. Pour placer convenablement ces tringles, il faut tracer une circonférence concentrique à chaque plateau et peu écartée du bord; établir les plateaux parallèlement, de manière que les faces qui portent les circonférences tracées se regardent, et que l'écartement des faces planes extérieures égale la hauteur de la table ; puis fixer les tringles sur les deux circonférences tracées, après avoir donné à toutes la même longueur, et en croisant celles qui s'inclinent dans un sens, par celles qui s'inclinent en sens opposé, aux points mêmes où les premières rencontrent la gorge.

La longueur de chaque tringle a deux parties, qu'on doit calculer séparément, pour les ajouter ensuite : l'une s'étend de la circonférence inférieure à la gorge AB, dont la position et le rayon se fixent arbitrairement ; l'autre est comprise entre la gorge et la circonférence supérieure. Le quarré numérique de la première égale celui de la distance *zy* du centre de la circonférence inférieure au centre de la gorge, augmenté de la différence des quarrés des rayons de ces deux cercles (296). Le quarré numérique de la seconde égale celui de la distance *gy* du centre de la circonférence supérieure au centre de la gorge, augmenté de la différence des quarrés des rayons de ces deux cercles.

IV. Les vanniers font des corbeilles qui ressemblent aux tables hyperboloïdes. Ils lient à une baguette droite, un cercle d'osier destiné à former le pied de la corbeille, puis la volette circulaire du fond, puis le cercle d'osier du bord. Le rayon de la volette est moindre que celui du pied, et il en est de même de ce dernier relativement au rayon du bord. Les trois centres doivent être en ligne droite, et il faut que la baguette soit inclinée sur les plans parallèles des cercles. Les choses ainsi disposées, l'ouvrier attache à ces cercles d'autres baguettes égales en longueur et en grosseur à la première, de manière que des arcs égaux les séparent sur la plus grande circonférence ; puis, aux points où elles sont unies à la volette, il en fixe encore d'autres qui égalent les premières et les croisent, en s'attachant aussi aux deux cercles extrêmes.

Mesurages des hyperboloïdes.

297. *La surface courbe d'un segment d'hyperboloïde terminé par deux plans d'équerre sur l'axe, vaut approximativement la somme des surfaces courbes des troncs de cône dont les bases, très-rapprochées, sont des cercles du corps.*

Il n'est pas plus possible d'obtenir exactement la surface courbe d'un pareil segment que la superficie limitée par un arc d'hyperbole (283).

PROBL. (*a*) : *Mesurer la surface courbe d'un segment* EPG *d'hyperboloïde à deux nappes, terminé par un seul cercle* EG (P. VI, F. 12).

Solution 1 : Tracez la courbe génératrice, d'après le problème du n° 287, et achevez comme dans la solution du problème *a* (205).

Solution 2 : Tracez sur le segment plusieurs courbes méridiennes, au moyen d'une ficelle appliquée sur le pôle P et successivement sur divers points de la circonférence EG; partagez ces courbes en arcs assez petits pour qu'ils puissent être regardés comme des lignes droites, et tels que chaque arc d'une courbe égale l'arc correspondant de toute autre; les points de division situés à la même distance de P appartiendront à une même circonférence d'équerre sur l'axe PH. Mesurez chaque circonférence, en entourant le corps d'une ficelle qui passe par tous les points de cette courbe; mesurez aussi chaque arc d'hyperbole compris entre deux circonférences consécutives, et calculez les surfaces courbes des divers troncs de cône dont les cercles forment les bases; la somme de ces surfaces vous donnera celle du segment.

Observation : La première circonférence MN doit être très-voisine du pôle P, attendu que la partie MPN de l'hyperbole EPG est celle qui a les plus grandes courbures. Il est d'ailleurs visible que la surface courbe de la calotte MPN devra être mesurée comme celle d'un cône.

PROBL. (*b*) : ***Mesurer la surface courbe d'un segment*** **G''AL'nBK''** ***d'hyperboloïde à une nappe, terminé par deux cercles égaux ou inégaux*** **G''K'', L'n** (P. VI, F. 11).

Solution 1 : Prenez, avec un compas à curseur, le diamètre AB de la gorge, et tirez une droite *ab* de même longueur (F. 20); mesurez le rayon E''K'' du grand cercle, et portez-le sur *ab*, du milieu *s* en un point *k'''*; élevez à ce point une perpendiculaire sur *ab*, et avec la plus courte distance de la circonférence G''K'' à celle de la gorge, décrivez de *b* un arc qui coupe la perpendiculaire. L'intersection *k''* sera un point de l'hyperbole qui, ayant *a* et *b* pour sommets, pourrait engendrer l'hyperboloïde. Tracez cette courbe, en appliquant le problème *d* (248); décrivez de *a*, avec la plus courte distance de la circonférence L'*n* à celle de la gorge, un arc qui coupe l'arc inférieur de la branche de gauche; menez enfin, par l'intersection *l'* et par *k''*, des parallèles à *ab*; vous aurez la coupe méridienne *g''al'n'bk''* du segment d'hyperboloïde, et vous pourrez imiter ce qui a été fait pour l'ellipsoïde, dans le problème *a* (205).

Si les deux bases étaient égales, le rayon *al'* serait évidemment de même longueur que le rayon *bk''*.

Solution 2: Posez le segment sur un plan horizontal, par l'une de ses bases circulaires; plantez une tige verticale au centre E'' du cercle supérieur, et à l'aide d'un fil aplomb, marquez trois points G'', A, L' de l'arc d'hyperbole selon lequel la surface courbe est coupée par un des plans verticaux qui contiennent l'axe E'E''. Vous pourrez tracer cet arc en appliquant une règle flexible d'abord de G'' en A, puis de A en L'. Tracez de la même manière plusieurs autres arcs méridiens, et achevez comme dans la seconde solution du problème précédent.

298. *Le volume d'un segment d'hyperboloïde à deux nappes,*

terminé par un seul cercle, est un multiple de celui du cylindre circulaire qui aurait pour rayon la distance du pôle à la base du segment, pour hauteur le demi-paramètre de l'hyperbole génératrice, et le multiplicateur de ce cylindre égale le quotient de la somme faite avec le triple du demi-axe transverse de la même hyperbole, plus la distance du pôle à la base, divisée par la première partie de cette somme.

Ainsi, le volume du segment EPG (P. VI, F. 12) vaut

$$\pi\overline{AH'}^2 \times FO \times \frac{3AS + AH'}{3AS}.$$

Partageons AH′ en un très-grand nombre n de parties égales, et menons, par les points de division, des perpendiculaires à l'axe. Deux perpendiculaires consécutives QR, I′K′ pourront être regardées comme égales; le tronc de cône correspondant du segment EPG sera sensiblement un cylindre, et il aura pour volume, à fort peu près,

$$\pi\overline{QT}^2 \times TL' = \pi\overline{QT}^2 \times \frac{AH'}{n}.$$

Or (243)

$$\overline{QT}^2 : \overline{ST}^2 - \overline{AS}^2 :: \overline{CS}^2 : \overline{AS}^2, \quad \text{ou} \quad \overline{QT}^2 = \frac{\overline{CS}^2}{\overline{AS}^2}(\overline{ST}^2 - \overline{AS}^2).$$

Par conséquent, le tronc de cône dont le cercle IK forme la grande base, dans le segment EPG, vaut

$$\pi\frac{\overline{CS}^2}{\overline{AS}^2}(\overline{ST}^2 - \overline{AS}^2)\frac{AH'}{n}.$$

Mais $\overline{ST}^2 = (AS + AT)^2 = \overline{AS}^2 + 2AS \times AT + \overline{AT}^2$. Le volume du tronc de cône est donc aussi

$$\pi\frac{\overline{CS}^2}{\overline{AS}^2}(2AS \times AT + \overline{AT}^2)\frac{AH'}{n}.$$

Servons-nous de la dernière expression comme d'une formule, à l'effet de trouver les volumes des divers troncs de cône dont la hauteur est $\frac{AH'}{n}$.

Pour le premier, celui dont la petite base se réduit au pôle P, $AT = 0$, et conséquemment son volume est nul.

Pour le 2ᵉ, $AT = \frac{AH'}{n}$, et la formule donne

$$\pi\frac{\overline{CS}^2}{\overline{AS}^2}\left(2AS\frac{\overline{AH'}^2}{n^2} + \frac{\overline{AH'}^3}{n^3}\right).$$

Pour le 3^e, $AT = 2\frac{AH'}{n}$, et la formule donne

$$\pi\frac{\overline{CS}^2}{\overline{AS}^2}\left(4\,AS\frac{\overline{AH'}^2}{n^2}+4\frac{\overline{AH'}^3}{n^3}\right).$$

Pour le 4^e, $AT = 3\frac{AH'}{n}$, et la formule donne

$$\pi\frac{\overline{CS}^2}{\overline{AS}^2}\left(6\,AS\frac{\overline{AH'}^2}{n^2}+9\frac{\overline{AH'}^3}{n^3}\right).$$

....

Pour le n^e ou dernier, $AT = (n-1)\frac{AH'}{n}$, et la formule donne

$$\pi\frac{\overline{CS}^2}{\overline{AS}^2}\left(2(n-1)\,AS\frac{\overline{AH'}^2}{n^2}+(n-1)^2\frac{\overline{AH'}^3}{n^3}\right).$$

Donc, la somme de tous les troncs de cône ou le segment

$$EPG = \pi\frac{\overline{CS}^2}{\overline{AS}^2}\left\{\begin{array}{l}[0+2+4+6+\ldots.+2(n-1)]\,AS\frac{\overline{AH'}^2}{n^2}\\ +[0+1+4+9+\ldots.+(n-1)^2]\frac{\overline{AH'}^3}{n^3}\end{array}\right\}.$$

Or $0+2+4+6+\ldots.+2(n-1)$ est la somme des termes d'une progression par différence, qui a n termes, et cette somme vaut

$$[0+2(n-1)]\frac{n}{2} = n^2-n.$$

Au lieu de $0+1+4+9+\ldots.+(n-1)^2$, on peut prendre seulement $1+4+9+\ldots.+(n-1)^2$, somme des quarrés des nombres $1, 2, 3, \ldots. (n-1)$; cette somme est évidemment la même que celle de sphères qui, disposées en pyramide quadrangulaire et régulière, forment $n-1$ tranches, et l'on sait* que cette somme de sphères égale

$$\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}\times\frac{2(n-1)+1}{3}=\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}\times\frac{2n-2+1}{3}$$

$$=\frac{n^2-2n+1+n-1}{2}\times\frac{2n-1}{3}=\frac{n^2-n}{2}\times\frac{2n-1}{3}$$

$$=\frac{2n^3-2n^2-n^2+n}{2.3}=\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}.$$

---

* Voyez notre Géométrie appliquée à l'industrie, 3^e édit., p. 476.

Donc

$$\text{EPG} = \pi\frac{\overline{\text{CS}}^2}{\overline{\text{AS}}^2}\left((n^2-n)\,\text{AS}\,\frac{\overline{\text{AH}'}^2}{n^2}+\left(\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right)\frac{\overline{\text{AH}'}^3}{n^3}\right)$$

$$=\pi\frac{\overline{\text{CS}}^2}{\overline{\text{AS}}^2}\left(\text{AS}\times\overline{\text{AH}'}^2-\text{AS}\frac{\overline{\text{AH}'}^2}{n}+\frac{\overline{\text{AH}'}^3}{3}-\frac{\overline{\text{AH}'}^3}{2n}+\frac{\overline{\text{AH}'}^3}{6n^2}\right).$$

Mais le nombre n des parties de AH′, étant arbitraire, peut être supposé plus grand qu'aucun des nombres assignables ; alors les trois termes dans lesquels il est diviseur deviennent infiniment petits, et peuvent être négligés. S'il en résulte pour EPG un léger accroissement, en raison de ce que les deux plus grands termes supprimés ont le signe —, cet accroissement atténue la diminution que la formule a fait éprouver au segment d'hyperboloïde, en rendant nul le premier tronc de cône, qui réellement ne l'est pas. Ainsi

$$\text{EPG} = \pi\frac{\overline{\text{CS}}^2}{\overline{\text{AS}}^2}\left(\text{AS}\times\overline{\text{AH}'}^2+\frac{\overline{\text{AH}'}^3}{3}\right)=\pi\frac{\overline{\text{CS}}^2}{\text{AS}}\left(\frac{3\text{AS}\times\overline{\text{AH}'}^2+\overline{\text{AH}'}^3}{3\text{AS}}\right)$$

$$=\pi\,\overline{\text{AH}'}^2\times\frac{\overline{\text{CS}}^2}{\text{AS}}\times\frac{3\,\text{AS}+\text{AH}'}{3\text{AS}},$$

et comme (245) $\frac{\overline{\text{CS}}^2}{\text{AS}}=\text{FO}$, on a enfin

$$\text{EPG} = \pi\,\overline{\text{AH}'}^2\times\text{FO}\times\frac{3\text{AS}+\text{AH}'}{3\text{AS}}.$$

PROBLÈME : *Mesurer le volume d'un segment* EPG *d'hyperboloïde à deux nappes* (P. VI, F. 12), *terminé par un seul cercle.*

Tracez la branche d'hyperbole E′AG′ propre à engendrer le segment (287, probl.) ; déterminez le centre S, en appliquant le problème *a* (231) ; cherchez la longueur SC du demi-axe déclinant (221, probl.) ; marquez le foyer F (244) ; tirez le demi-paramètre FO ; mesurez, en mètres, AH′, FO, AS ; multipliez 3,1416 par le quarré numérique de la première longueur, et le produit par celle de FO ; triplez AS ; ajoutez AH′ au résultat ; multipliez par la somme le produit qu'a donné FO, et divisez le nouveau produit par le triple de AS. Le quotient sera en mètres cubes le volume du segment EPG.

299. *Le volume d'un segment d'hyperboloïde à une nappe, terminé par deux cercles, égale celui du cylindre circulaire qui aurait pour rayon le demi-axe transverse de l'hyperbole génératrice, et pour hauteur la somme des distances du plan de la gorge aux plans des bases du segment, augmentée du quotient de la somme des cubes numériques des mêmes distances, divisée par le triple quarré du demi-axe déclinant.*

Soit EGBHIAE (P. VI, F. 21) la coupe méridienne d'un segment d'hyperboloïde à une nappe, terminé par deux cercles inégaux dont les diamètres égalent les cordes EG, HI de l'hyperbole génératrice; le volume de ce segment,

$$V = \pi\overline{AS}^2\left(KS + LS + \frac{\overline{KS}^3 + \overline{LS}^3}{3\overline{CS}^2}\right).$$

Partageons la distance KS en un très-grand nombre n de parties égales, et menons, par les points de division, des perpendiculaires à l'axe déclinant CD. Deux perpendiculaires consécutives MN, OP pourront être regardées comme égales; le tronc de cône correspondant du segment sera sensiblement un cylindre, et il aura pour volume, à fort peu près,

$$\pi\overline{MQ}^2 \times QR = \pi\overline{MQ}^2 \times \frac{KS}{n}.$$

Or (243) la perpendiculaire abaissée de M sur l'axe transverse donne

$$\overline{MT}^2 : \overline{ST}^2 - \overline{AS}^2 :: \overline{CS}^2 : \overline{AS}^2, \quad \overline{ST}^2 - \overline{AS}^2 = \frac{\overline{AS}^2 \times \overline{MT}^2}{\overline{CS}^2},$$

$$\overline{ST}^2 = \overline{AS}^2 + \frac{\overline{AS}^2 \cdot \overline{MT}^2}{\overline{CS}^2} = \frac{\overline{AS}^2 \cdot \overline{CS}^2 + \overline{AS}^2 \cdot \overline{MT}^2}{\overline{CS}^2} = \frac{\overline{AS}^2}{\overline{CS}^2}(\overline{CS}^2 + \overline{MT}^2),$$

et parce que $ST = MQ$, $MT = QS$, on a

$$\overline{MQ}^2 = \frac{\overline{AS}^2}{\overline{CS}^2}(\overline{CS}^2 + \overline{QS}^2).$$

La substitution de cette valeur dans celle du tronc de cône la change en cette autre:

$$\pi\frac{\overline{AS}^2}{\overline{CS}^2}(\overline{CS}^2 + \overline{QS}^2)\frac{KS}{n},$$

expression que nous pouvons employer, comme formule, à la détermination des divers troncs de cône dont la hauteur est $\frac{KS}{n}$.

Pour celui dont la gorge AB est la petite base, ou pour le premier, $QS = 0$, et la formule donne

$$\pi\frac{\overline{AS}^2}{\overline{CS}^2} \times \overline{CS}^2 \times \frac{KS}{n}.$$

Pour le 2ᵉ, $QS = \frac{KS}{n}$, et la formule donne

$$\pi\frac{\overline{AS}^2}{\overline{CS}^2}\left(\overline{CS}^2 \times \frac{KS}{n} + \frac{\overline{KS}^3}{n^3}\right).$$

Pour le 3^e, $QS = 2\frac{KS}{n}$, et la formule donne

$$\pi\frac{\overline{AS}^2}{\overline{CS}^2}\left(\overline{CS}^2 \times \frac{KS}{n} + 4\frac{\overline{KS}^3}{n^3}\right).$$

Pour le 4^e, $QS = 3\frac{KS}{n}$; et la formule donne

$$\pi\frac{\overline{AS}^2}{\overline{CS}^2}\left(\overline{CS}^2 \times \frac{KS}{n} + 9\frac{\overline{KS}^3}{n^3}\right).$$

....

Pour le n^e, $QS = (n-1)\frac{KS}{n}$, et la formule donne

$$\pi\frac{\overline{AS}^2}{\overline{CS}^2}\left(\overline{CS}^2 \times \frac{KS}{n} + (n-1)^2\frac{\overline{KS}^3}{n^3}\right).$$

Donc le segment d'hyperboloïde qui correspond au segment d'hyperbole ABGE, a un volume

$$V' = \pi\frac{\overline{AS}^2}{\overline{CS}^2}\left(n\overline{CS}^2 \times \frac{KS}{n} + [1+4+9+\ldots\ldots+(n-1)^2]\frac{\overline{KS}^3}{n^3}\right).$$

Mais nous avons vu (298) que $1+4+9+\ldots\ldots+(n-1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$. Par conséquent,

$$V' = \pi\frac{\overline{AS}^2}{\overline{CS}^2}\left(\overline{CS}^2 \times KS + \frac{\overline{KS}^3}{3} - \frac{\overline{KS}^3}{2n} + \frac{\overline{KS}^3}{6n^2}\right).$$

Supposant n plus grand qu'aucun nombre assignable, et négligeant les termes où il est diviseur, que cette hypothèse rend infiniment petits, on obtient

$$V' = \pi\frac{\overline{AS}^2}{\overline{CS}^2}\left(\overline{CS}^2 \times KS + \frac{\overline{KS}^3}{3}\right) = \pi\overline{AS}^2\left(KS + \frac{\overline{KS}^3}{3\overline{CS}^2}\right).$$

Nous trouverions de la même manière, pour le volume du segment d'hyperboloïde qui correspond au segment d'hyperbole ABHI,

$$V'' = \pi\overline{AS}^2\left(LS + \frac{\overline{LS}^3}{3\overline{CS}^2}\right).$$

Donc enfin, le volume du segment d'hyperboloïde qui correspond au segment d'hyperbole EGBHIAE, ou

$$V = V' + V'' = \pi\overline{AS}^2\left(KS + LS + \frac{\overline{KS}^3 + \overline{LS}^3}{3\overline{CS}^2}\right).$$

Problème : *Mesurer le volume d'un segment* G''K''BnL'AG'' *d'hyperboloïde à une nappe* (P. VI, F. 11), *terminé par deux cercles* G''K'', L'n.

Tracez la coupe méridienne $g''k''bn'l'ag''$ du segment (F. 20), comme dans le problème b (297); mesurez en mètres se'', se', sc, sa; faites la somme des cubes numériques des deux premières longueurs; divisez-la par le triple du quarré numérique de la troisième; ajoutez le quotient à la somme des deux premières, et multipliez le total par le quarré numérique de la quatrième, puis le produit par 3,1416. La seconde multiplication vous donnera en mètres cubes le volume du segment d'hyperboloïde.

PARABOLE.

300. Le mot *parabole* a la même signification que celui d'hyperbole (209). Aussi en a-t-on fait le nom de certaines projections de la circonférence dans lesquelles cette courbe est encore *jetée au-delà* de ses bornes. Mais la différence des deux noms en suppose une dans les lignes qui les portent. Les paraboles diffèrent effectivement beaucoup des hyperboles, bien que les unes soient des projections coniques du cercle comme les autres, et cela provient de ce que le plan sur lequel on projette, quand il s'agit d'obtenir les premières, est parallèle à une seule des génératrices droites du cône, au lieu de l'être à deux comme pour les hyperboles; de sorte qu'il ne coupe pas les deux nappes, ainsi qu'il le fait dans le cas de ces dernières courbes, et qu'il ne rencontre pas toutes les génératrices d'une nappe, comme dans le cas des ellipses (128).

Il n'y a pas de différence essentielle entre la parabole produite par une projection conique droite et celle qui résulte d'une projection conique oblique; il n'y en a pas non plus entre les courbes que donnent des positions différentes du plan de projection, relativement au plan diamétral où se trouve la génératrice parallèle. Nous pourrons donc supposer droit le cône projetant, et rendre perpendiculaires les deux plans, tout en partant de la définition générale suivante.

301. *La parabole est la projection conique d'une circonférence sur un plan parallèle à l'une des droites projetantes.*

Soient $a'b'$ la projection verticale d'un cercle (P. VI, F. 22); Sg, parallèle à la ligne de terre S''g'', et S'g', perpendiculaire à $a'b'$, les projections orthogonales de l'axe du cône projetant; S, S' celles du sommet; Sg, S'b', parallèle à S''g'', celles de la génératrice parallèle au plan horizontal qui doit recevoir la projection conique.

La génératrice la plus voisine de la verticale S, S'S'' est la droite Sg, S'a', qui aboutit à l'extrémité inférieure du diamètre $a'b'$ et se trouve dans le même plan vertical que Sg, S'b'. Le point A où elle perce le plan de projection est donc le point de la parabole qui s'écarte le moins de SS″.

Rabattons le cercle sur le plan vertical Sg, en le faisant tourner autour de sa trace $a'b'$. L'horizontale e' devient la corde $h'i'$, qui est d'équerre sur $a'b'$, et aux extrémités de laquelle aboutissent deux génératrices égales dont l'angle a pour bissectrice Se, S$'e'$. Si nous portons $e'h'$ de e en h et en i, sur une perpendiculaire à Se; Sh, Si seront les projections horizontales de ces génératrices, et EE′, perpendiculaire à la ligne de terre, marquera sur Sh, Si les projections coniques H, I des points h', i' de la circonférence. Celles des autres points s'obtiendront évidemment de la même manière.

Or, à mesure que e' s'avance vers le centre g', la corde $h'i'$ augmente, ce qui fait ouvrir l'angle hSi, et E′ s'éloigne de a'. La corde HI de la parabole croît donc par deux raisons.

Cependant, l'angle hSi a une limite qu'il ne peut dépasser: c'est l'ouverture qu'il prend lorsque ses côtés deviennent tangents à l'ellipse projection cylindrique du cercle sur le plan horizontal, ce qui arrive avant que e' ne parvienne au centre g'. Plus ensuite e' se rapproche de b', plus l'angle hSi est petit. Mais la distance a'E′ augmente bien plus rapidement que hSi ne diminue, car elle passe d'une certaine valeur à l'infini, tandis que l'angle passe seulement de sa valeur correspondante à zéro. Ainsi, quand e', se trouvant très-près de b', rend fort petit l'angle hSi, la distance a'E′ se trouve extrêmement grande, et il en est de même de la corde HI. La parabole s'étend donc jusqu'à l'infini, en s'écartant sans cesse de la droite Sg, des deux côtés; la projection conique de b' est un point (B) de Sg qu'on ne saurait assigner, et celle de l'élément circulaire correspondant est infiniment grande. Quant à celle du centre g', elle se fait aussi sur Sg, mais en un point G qui n'a rien de remarquable.

Concluons donc que *la parabole est une courbe infiniment grande et ouverte qui n'a qu'une branche.*

Problème : *Déterminer un cercle dont une parabole donnée* HAI *soit la projection conique* (P. VI, F. 22).

L'arc HAI ne suffit pas pour indiquer la courbe complètement; puisqu'elle s'étend à l'infini, il faut encore des données qui permettent de la continuer autant qu'on le juge à propos. Ces données nécessaires sont, comme nous le verrons plus loin, la projection horizontale g du centre de la circonférence qui a produit la parabole, et la trace Ag du plan perpendiculaire à celui de la courbe, où se trouvaient à la fois ce centre et le sommet du cône projetant.

Tracez une droite $a'g''$ parallèlement à Ag; abaissez sur cette droite les perpendiculaires Aa', gg''; portez $g''a'$ de g'' en b''; d'un point quelconque K′, pris sur le prolongement de $a'b''$, décrivez avec K′a' un arc qui coupe la perpendiculaire $b''b'''$ élevée sur $a'b''$; de l'intersection b''' et de a', avec le même rayon K′a', décrivez deux autres arcs qui se croisent; joignez leur intersection s' aux points a', b''' et tirez enfin $a'b'''$. Cette dernière droite sera le diamètre d'un cercle perpendiculaire au plan vertical $s''K'$, que le cône $a's'b'''$ projettera sur la parabole HAI donnée.

Démonstration: D'après la construction, le quadrilatère $a'K'b'''s'$ forme un losange; le cône est droit; la génératrice sb, $s'b'''$ se trouve horizontale, comme le côté $a'K'$ du losange; la génératrice sA, $s'a'$ perce le plan horizontal de la parabole au point A, le plus rapproché de la verticale s, $s's''$; le centre g''' du cercle $a'b'''$, situé au milieu de son diamètre, appartient à la verticale gg' qui divise $a'b''$ en deux parties égales, et ce centre se projette horizontalement sur g, comme celui du cercle $a'b'$ qui a produit la courbe.

Reste à faire voir qu'une génératrice du cône s, s' qui rencontre une génératrice du cône S, S' la coupe précisément sur le plan horizontal. Considérons, par exemple, la génératrice SL, $S'g''$ qui perce le plan de la courbe en L. Ce point appartient à la trace horizontale d'un plan mené par SL, $S'g''$ et par s, s'; un tel plan coupe nécessairement le cône s, s' selon une génératrice droite projetée verticalement sur $s'g''$, et cette génératrice est celle qui rencontre SL, $S'g''$. Or le point où elle perce le plan horizontal doit former l'intersection de gg'' et de la trace horizontale du plan des deux génératrices, c'est-à-dire le point L.

Ainsi, toutes les génératrices du cône s, s' percent le plan horizontal sur la parabole donnée, et par conséquent cette courbe est aussi bien la projection conique du cercle $a'b'''$ que celle du cercle $a'b'$.

502. *Aucune droite ne peut couper la parabole en plus de deux points.*

Toute droite qui coupe la parabole est la projection conique d'une sécante du cercle auquel est due la courbe. Si donc elle pouvait avoir trois intersections, la sécante en aurait aussi trois avec la circonférence, ce qui est impossible.

Applications : I. La séparation de l'ombre et de la lumière que porte sur un plan horizontal un fallot à verre rond, est une parabole lorsque la flamme se trouve de niveau avec le point le plus élevé du verre. Les rayons lumineux forment en effet un cône dont la génératrice supérieure est horizontale et parallèle au plan.

Plusieurs verres ronds produiraient autant de paraboles; mais quand bien même deux de ces courbes, dues à des verres parallèles, se trouveraient opposées comme les branches d'une hyperbole, elles n'en constitueraient pas moins des paraboles distinctes et indépendantes l'une de l'autre.

II. Si l'air n'existait pas, ou s'il n'opposait pas du tout de résistance aux corps qui s'y meuvent, ceux qu'on lance selon des directions non verticales parcourraient chacun une parabole. Une bombe, par exemple, jetée sous l'angle de 45°, suivrait en montant l'arc HA (P. VI, F. 22) et en descendant l'arc AI, de sorte que le point A se trouverait le plus élevé de l'ascension. Il en serait de même d'un boulet, d'une balle, d'une pierre; mais le point culminant de la courbe ne serait plus en A, dans le cas où la direction du corps, au départ, ne formerait pas un angle de 45° avec l'horizontale.

Malgré l'obstacle que l'air oppose sans cesse aux mobiles, il y a bien des circonstances où l'on peut, sans s'exposer à de grandes erreurs, regarder comme une vraie parabole, la *trajectoire* d'un corps lancé dans l'atmosphère, c'est-à-dire la courbe selon laquelle il y exécute son mouvement.

CORDES DE LA PARABOLE.

303. On appelle *sommet* de la parabole le point A (P. VI, F. 22) où cette courbe se trouve le moins écartée de la trace SS″ du plan vertical mené par le sommet S, S′ du cône projetant, perpendiculairement à la ligne de terre.

Le point *g* ou F, projection horizontale et orthogonale des centres de toutes les circonférences dont la parabole est la projection conique (301, probl.), forme le *foyer* de cette courbe.

Les cordes perpendiculaires à la droite AF, *qui joint le sommet au foyer d'une parabole, sont les projections coniques de cordes du cercle perpendiculaires au diamètre* a′b′ *projeté sur cette droite.*

Ces cordes du cercle, étant dans un plan d'équerre sur le plan vertical de projection, et perpendiculaires à l'intersection des deux plans, se trouvent horizontales. Leurs projections coniques leur sont donc parallèles, ce qui les rend perpendiculaires à la ligne de terre et à la droite AF.

304. *Les cordes parallèles d'une parabole sont les projections coniques de cordes qui, dans le cercle projeté sur la courbe, concourent sur la tangente menée par le point dont la projection conique est à l'infini.*

Les cordes EH, IK et la tangente LM, parallèles entre elles (P. VI, F. 23), concourent à l'infini; elles se rencontrent donc sur la projection conique de l'élément *b′*, laquelle est une droite infiniment grande, située à l'infini (301) et perpendiculaire à la droite qui joint le sommet A au foyer F (303). Mais la tangente au point *b′* du cercle a la même projection conique que l'élément du contact. Par conséquent, les cordes *eh*, *ik* et la tangente *lm*, dont EH, IK, LM sont les projections coniques, doivent concourir sur la tangente *b′l*.

DIAMÈTRES DE LA PARABOLE.

305. *La droite qui joint le sommet* A *au foyer* F *d'une parabole* (P. VI, F. 22), *est un axe de la courbe* (5).

La corde HI, perpendiculaire à AF, est la projection conique d'une corde hi, el qui, dans le cercle projeté sur la parabole, se trouve perpendiculaire au diamètre $a'b'$, et ces deux cordes sont parallèles (303). Par conséquent, hi, el est divisée en deux parties égales par les plans verticaux HhS, FS, IiS; HI doit être divisée de la même manière par ces plans, et la droite AF coupe HI au milieu.

Un pareil raisonnement ferait voir que AF partage en deux parties égales toute autre corde parallèle à HI.

Donc, *la droite qui joint le sommet au foyer d'une parabole divise la courbe en deux parties égales, symétriquement placées relativement à cette droite.*

306. *La parabole n'a qu'un seul axe.*

Si elle en avait un autre que la droite AF, qui joint le sommet au foyer et divise EO en deux parties égales (P. VI, F. 23), les cordes EH, IK qu'il couperait d'équerre et au milieu, n'étant pas parallèles à EO, seraient nécessairement obliques sur AF, puisque les parallèles à cette droite, concourant avec elle au point (B) situé à l'infini, ne rencontrent la courbe qu'une fois (301). Ainsi le second axe serait lui-même oblique sur le premier; il le couperait en un certain point N; ce point se trouverait au milieu de EH, comme G au milieu de EO perpendiculaire à AF (305); HO devrait être parallèle à GN, et l'on aurait GO = FH, ce qui est impossible (301).

307. *Toute parallèle* MP *à l'axe* AF *d'une parabole est un diamètre* (P. VI, F. 23).

Le seul point A où cette parallèle coupe la courbe se nomme l'*origine* du diamètre.

Tirons la droite AM et doublons-la; puis, par le point Q qui en résulte, menons une parallèle QR à MP, jusqu'à la rencontre de la parabole. La corde AR sera divisée par MP en deux parties égales, comme AQ. Reste donc à faire voir que MP divise de la même manière toute corde EH parallèle à AR (5).

Traçons les cordes HA, ER; prolongeons-les jusqu'à ce qu'elles se coupent, et joignons leur concours T au milieu U de AR. La droite TU passera aussi par le milieu de EH, et même par le croisement des diagonales du trapèze AREH. Or les cordes parallèles AR, EH sont dues à deux cordes ar, eh du cercle g' projeté sur la parabole; celles-ci concourent en un point l de la tangente lb' (304); elles forment un quadrilatère inscrit $areh$; les sommets de ce quadrilatère, le concours t des côtés opposés ha, er, et le croisement des diagonales ont pour projections coniques les choses correspondantes du trapèze AREH, et par conséquent TU est la projection conique de la droite tu qui joint t au croisement des diagonales ae, hr. Mais, d'après le principe 67, applicable au cercle comme à l'ellipse, tu doit passer par les contacts des tangentes issues du concours l des côtés opposés ar, he. La droite TU est donc la projection conique de tub'; elle contient le point (B), se trouve parallèle à AF, et se confond avec MUP. Conséquemment enfin, MUP coupe au milieu toute corde parallèle à AR.

Il résulte évidemment de la démonstration précédente que

1° *L'axe et ses parallèles sont les seuls diamètres de la parabole;*

2° *Les diamètres de la parabole sont les projections coniques de cordes qui, dans le cercle projeté sur cette courbe, se terminent toutes au point* b' *dont la projection conique est à l'infini.*

308. *La parabole n'a ni centre, ni diamètres conjugués.*

C'est le croisément des diamètres qui constitue le centre d'une courbe (5). Or ceux de la parabole, étant tous parallèles (307), concourent seulement à l'infini.

Pour être conjugués, deux diamètres doivent se couper réciproquement au milieu (35); et il n'en peut être ainsi de droites qui ne se croisent point.

Probl. (*a*): *Trouver un des diamètres d'une parabole tracée.*

Tirez deux cordes parallèles AR, EH (P. VI, F. 23), aussi éloignées l'une de l'autre qu'il vous sera possible; marquez les milieux U, P de ces cordes; la droite MUP qui les joindra sera un diamètre, car elle divisera en deux parties égales toute autre corde parallèle à AR (307).

Probl. (*b*): *Tracer l'axe d'une parabole donnée.*

Cherchez un diamètre MP (P. VI, F. 23); tirez une corde EO qui lui soit perpendiculaire, et par le milieu G de cette corde, menez une parallèle à MP. Cette parallèle AG sera un diamètre (307), et l'axe demandé, puisque les cordes qu'elle divisera en deux parties égales seront coupées d'équerre (305).

Probl. (*c*): *Marquer le sommet d'une parabole donnée.*

Tracez l'axe AG (P. VI, F. 23). Le point A où il rencontrera la courbe sera le sommet (303).

Probl. (*d*): *Trouver les cordes de parabole qu'un diamètre donné MP partage en deux parties égales* (P. VI, F. 23).

Solution 1: Joignez le sommet à l'origine M du diamètre; portez AM sur son prolongement, de M en Q; menez par Q une parallèle à MP. Le point R, où cette parallèle rencontrera la parabole, déterminera une corde AR que MP divisera en deux parties égales, et toute autre corde parallèle à celle-là sera divisée de la même manière par le diamètre donné (307).

Solution 2: D'un point quelconque du diamètre donné HL (F. 24), abaissez une perpendiculaire sur l'axe, pour avoir la distance des deux parallèles (307); portez cette distance LM sur le même axe, à partir du foyer F, à droite ou à gauche de ce point. Vous marquerez ainsi un point V ou V', que vous joindrez à l'extrémité inférieure ou supérieure du paramètre IK (309); et toutes les cordes EO, RS, tirées parallèlement à IV ou à KV', seront divisées en deux parties égales par le diamètre HL (315).

PROPRIÉTÉS DE LA PARABOLE.

309. La corde LM qui, perpendiculaire à l'axe AF d'une parabole (P. VI, F. 22), passe par le foyer F, forme le *paramètre* de cette courbe.

Lorsque la parabole a son sommet sur le cercle dont elle forme la projection conique droite, le demi-paramètre est l'un des petits côtés d'un triangle rectangle qui a pour hypothénuse le diamètre de ce cercle, et pour troisième côté la distance du plan de la parabole au sommet du cône projetant.

Ce principe sera démontré, si nous faisons voir que $FL = a'b''$; car, dans le triangle rectangle $a'b''b'$, l'hypothénuse $a'b'$ est le diamètre du cercle projeté sur la parabole qui a son sommet en a', et le côté $b'b''$ égale la distance $S''S'$ du plan de cette courbe au sommet du cône projetant.

Abaissons de b'' une perpendiculaire $b''n'$ sur $a'b'$; elle donnera la relation

$$\overline{a'b''}^2 = a'b' \times a'n'.$$

Menons, par g'', une parallèle à $a'b'$, qui se termine aux génératrices $S'a'$, $S'b'$; cette parallèle $\alpha\beta$ sera le diamètre d'un autre cercle du cône, et ce cercle aura LM au nombre de ses cordes horizontales. Par conséquent,

$$\overline{FL}^2 = \alpha g'' \times g''\beta.$$

Il faut donc qu'on ait

$$a'b' \times a'n' = \alpha g'' \times g''\beta \quad \text{ou bien} \quad a'b' : g''\beta :: \alpha g'' : a'n',$$

et parce que $g''\beta = a'b'$, il reste à démontrer que $\alpha g'' = a'n'$.

La droite $\alpha g''$ vaut la moitié de sa parallèle $b''\gamma$. Dans le losange $S'a'G'b'$, l'angle $S'a'b' = G'a'b'$, ce qui rend égaux les arcs $a'b''$, $a'o'$. Ainsi, $b''n'$ passe par o', et attendu que n' est le milieu de $b''o'$, $a'n'$ vaut aussi la moitié de sa parallèle $b''\gamma$.

310. *Le demi-paramètre* FL *de la parabole est double de sa distance* AF *au sommet* (P. VI, F. 22), *et aucune autre demi-corde parallèle ne jouit de cette propriété.*

L'ordonnée $FL = a'b''$ (309); $a'b''$ est double de $a'g''$, et $a'g'' = AF$.

Si une autre ordonnée EH était double aussi de sa distance AE au sommet, les trois points A, H, L de la parabole seraient en ligne droite, ce qui est impossible (302).

311. *Les quarrés numériques de deux demi-cordes perpendicu-*

laires à l'axe d'une parabole sont proportionnels aux distances de ces droites au sommet, de sorte que (P. VI, F. 25)

$$\overline{EH}^2 : \overline{IK}^2 :: AE : AI.$$

Les droites $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, tirées par les points E', I', entre les génératrices S'a', S'b' du cône projetant, parallèlement au diamètre a'b' du cercle projeté sur la parabole, sont aussi des diamètres du cône, et EH, IK se trouvent au nombre des demi-cordes perpendiculaires à ces diamètres, dans les cercles correspondants. Ainsi,

$$\overline{EH}^2 = E'\alpha . E'\beta, \quad \overline{IK}^2 = I'\gamma . I'\delta, \quad \overline{EH}^2 : \overline{IK}^2 :: E'\alpha . E'\beta : I'\gamma . I'\delta,$$

et parce que $E'\beta = I'\delta$,

$$\overline{EH}^2 : \overline{IK}^2 :: E'\alpha : I'\gamma.$$

Or

$$E'\alpha : I'\gamma :: a'E' : a'I' :: AE : AI.$$

Conséquemment,

$$\overline{EH}^2 : \overline{IK}^2 :: AE : AI.$$

312. *Toute demi-corde perpendiculaire à l'axe d'une parabole est moyenne proportionnelle entre sa distance au sommet et le paramètre* (309), c'est-à-dire que (P. VI, F. 25)

$$AE : EH :: EH : GL.$$

Le principe précédent donne

$$\overline{EH}^2 : \overline{FG}^2 :: AE : AF \quad \text{ou} \quad \overline{EH}^2 = AE\frac{\overline{FG}^2}{AF}.$$

Mais $FG = \frac{GL}{2}$ (305), $AF = \frac{FG}{2} = \frac{GL}{4}$ (310). Donc

$$\overline{EH}^2 = AE\frac{\frac{1}{4}\overline{GL}^2}{\frac{1}{4}GL} = AE \times GL \quad \text{ou} \quad AE : EH :: EH : GL.$$

Problème : *Trouver le foyer d'une parabole tracée.*

Solution 1 : Prenez, sur le prolongement de l'axe, une longueur quelconque AV (P. VI, F. 23); élevez en V une perpendiculaire à cet axe; portez-y deux fois AV, à partir de V; joignez au sommet A le point X ainsi obtenu; puis, de la seconde intersection Y de AX et de la parabole, abaissez une perpendiculaire sur l'axe; le point F où elle le coupera sera le foyer cherché.

Démonstration : Les deux triangles semblables AVX, AFY rendent FY double de AF, puisque VX est double de AV. Par conséquent, l'ordonnée FY est le demi-paramètre de la parabole (310), et le pied F de cette ordonnée est le foyer (309).

Solution 2 : Tirez une demi-corde EH perpendiculaire à l'axe (F. 25); cherchez une troisième proportionnelle à AE, EH, pour avoir le paramètre de la parabole (312); portez la moitié de sa longueur de A en M, sur une parallèle à EH; puis tracez ML parallèlement à l'axe, et LF parallèlement à AM.

313. *Si des perpendiculaires sont abaissées sur un diamètre, des extrémités de l'une des cordes qu'il partage en deux parties égales, chacune de ces perpendiculaires est moyenne proportionnelle entre le paramètre et la distance du milieu de la corde à l'origine du diamètre.*

Soient EO (P. VI, F. 24) une des cordes que le diamètre HL coupe par le milieu, et EL perpendiculaire sur HL. On doit avoir

$$IK : EL :: EL : GH.$$

Le principe 312 donne

$$\overline{EM}^2 = IK \times AM.$$

Mais $EM = EL + LM = EL + HN$; $AM = AN + MN = AN + HL$. Par conséquent,

$$\overline{EL}^2 + 2EL \times HN + \overline{HN}^2 = IK \times AN + IK \times HL,$$

et comme $\overline{HN}^2 = IK \times AN$,

$$\overline{EL}^2 + 2EL \times HN = IK \times HL.$$

De la relation $EG = GO$, résulte l'égalité des triangles rectangles ELG, OPG, puis celle des droites GL et GP, EL et OP;

$OQ = OP - PQ = EL - HN$; $AQ = AN + NQ = AN + HP$; $\overline{OQ}^2 = IK \cdot AQ$. Ainsi,

$$\overline{EL}^2 - 2EL \times HN + \overline{HN}^2 = IK \times AN + IK \times HP,$$

et

$$\overline{EL}^2 - 2EL \times HN = IK \times HP.$$

Ajoutant cette équation à celle qui a pour second membre $IK \times HL$, on obtient

$$2\overline{EL}^2 = IK(HL + HP).$$

Or $HL = GH + GL = GH + GP$; $HP = GH - GP$. Conséquemment,

$$HL + HP = GH + GP + GH - GP = 2GH;$$

$$2\overline{EL}^2 = IK \times 2GH, \quad \text{et} \quad \overline{EL}^2 = IK \times GH,$$

ce qui revient à la proportion annoncée.

314. *Les quarrés numériques des moitiés de deux cordes parallèles quelconques de parabole* EO, RS (P. VI, F. 24) *sont proportionnels aux distances correspondantes* GH, TH, *comprises entre les pieds* G, T *de ces demi-cordes et l'origine* H *du diamètre qui les limite.*

La proportion $\overline{EG}^2 : \overline{RT}^2 :: GH : TH$ est effectivement vraie.

En vertu du principe précédent, $\overline{EL}^2 = IK \times GH$, $\overline{RU}^2 = IK \times TH$, et il s'ensuit

$$\overline{EL}^2 : \overline{RU}^2 :: GH : TH.$$

Mais les triangles semblables ELG, RUT donnent

$$EL : RU :: EG : RT \quad \text{ou} \quad \overline{EL}^2 : \overline{RU}^2 :: \overline{EG}^2 : \overline{RT}^2.$$

Par conséquent,

$$\overline{EG}^2 : \overline{RT}^2 :: GH : TH.$$

315. *La distance* HN *d'un diamètre à l'axe de la parabole* (P. VI, F. 24) *égale la partie* FV *de cet axe, comprise entre le foyer et une droite* IV *menée de l'une des extrémités du paramètre, parallèlement aux cordes que le diamètre coupe au milieu.*

Le principe 313 fournit la relation

$$\overline{EL}^2 = IK \times GH.$$

D'ailleurs (312), $\overline{EM}^2 = IK \times AM$; $EM = EL + LM = EL + HN$; $AM = AN + GH + GL$; et par suite,

$$\overline{EL}^2 + 2EL \times HN + \overline{HN}^2 = IK \times AN + IK \times GH + IK \times GL.$$

Donc, puisque $\overline{HN}^2 = IK \times AN$,

$$2EL \times HN = IK \times GL, \quad \text{ou bien} \quad EL \times HN = FI \times GL,$$

ce qui donne

$$EL : GL :: FI : HN.$$

Mais, à cause de la similitude des triangles ELG, IFV,

$$EL : GL :: FI : FV. \quad \text{Conséquemment,} \quad HN = FV.$$

316. *Le diamètre* EG (P. VI, F. 26), *qui partage une corde* HI *en deux parties égales, est coupé en deux points* K, L *également éloignés de son origine* E, *par deux droites* HK, IL *tirées des extrémités de cette corde au même point* M *de l'arc* HEMI *qu'elle sous-tend.*

D'abord, la corde MN, parallèle à HI, est aussi divisée en deux parties égales à son intersection O avec le diamètre. Conséquemment, la sécante HN passe par L, et la seconde diagonale IN du trapèze HIMN croise la première au point K de EG.

Ensuite, le principe 314 donne la proportion

$$\overline{GI}^2 : \overline{MO}^2 :: EG : EO,$$

et puisque du parallélisme des deux cordes résulte cette autre proportion:

$$GI : MO :: GL : OL \quad \text{ou} \quad \overline{GI}^2 : \overline{MO}^2 :: \overline{GL}^2 : \overline{OL}^2,$$

on a

$$EG : EO :: \overline{GL}^2 : \overline{OL}^2,$$

puis successivement,

$$EG : EG-EO :: \overline{GL}^2 : \overline{GL}^2-\overline{OL}^2, \quad EG : OG :: \overline{GL}^2 : (GL+OL)(GL-OL),$$
$$EG : 1 :: \overline{GL}^2 : GL+OL, \quad EG : GL :: GL : GL+OL,$$
$$EG : GL-EG :: GL : OL, \quad EG : EL :: GL : OL.$$

Mais, parce que les triangles GHK, OKM sont semblables, et que $GH = GI$,

$$GI : MO :: GK : KO, \quad \overline{GI}^2 : \overline{MO}^2 :: \overline{GK}^2 : \overline{KO}^2,$$
$$EG : EO :: \overline{GK}^2 : \overline{KO}^2, \quad EG : OG :: \overline{GK}^2 : (GK+KO)(GK-KO),$$
$$EG : 1 :: \overline{GK}^2 : GK-KO, \quad EG : GK :: GK : GK-KO,$$
$$EG : EK :: GK : GK-(GK-KO), \quad EG : EK :: GK : KO.$$

D'ailleurs, d'après les proportions précédentes:

$$GI : MO :: GL : OL, \quad GI : MO :: GK : KO,$$

il y a égalité entre les rapports $GL : OL$, $GK : KO$. Par conséquent,

$$EG : EL :: EG : EK, \quad \text{et} \quad EL = EK.$$

517. *Si l'une E des extrémités d'une corde perpendiculaire à l'axe AG de la parabole* (P. VI, F. 27) *est jointe, par des droites, aux origines de diamètres équidistants, parmi lesquels se trouve l'axe, la portion de cet axe comprise entre la corde et le sommet est divisée en parties égales.*

Soient les diamètres AG, HI, KL, MN qui divisent leur perpendiculaire GO en quatre parties égales. Nous aurons à démontrer que les droites EA, EH, EK, EM, EO divisent de la même manière la portion d'axe AG. D'abord, AP est le quart de AG. En effet,

$$AP = AG - GP,$$

et HQ, parallèle à EO, donne $GP = 4PQ$, puisque $EG = GO = 4GI = 4HQ$. Donc

$$AP = AG - 4PQ.$$

Mais $PQ = AG - AQ - GP = AG - AQ - 4PQ$, ou bien $5PQ = AG - AQ$ et $PQ = \frac{1}{5}(AG - AQ)$. En conséquence,

$$AP = AG - \tfrac{4}{5}(AG - AQ).$$

D'ailleurs (312 et 310), $4AF \times AQ = \overline{HQ}^2 = \dfrac{\overline{EG}^2}{16} = \dfrac{4AF \times AG}{16}$, et il en résulte $AQ = \dfrac{AG}{16}$. Ainsi,

$$AP = AG - \frac{4}{5}\left(AG - \frac{AG}{16}\right) = AG - \frac{4}{5}\,\frac{15AG}{16} = AG - \frac{3}{4}AG = \frac{1}{4}AG.$$

Des raisonnements analogues feraient voir que $AR = \frac{1}{2}AG$ et que $AS = \frac{3}{4}AG$.

318. On appelle *directrice* une perpendiculaire CD à l'axe de la parabole (P. VI, F. 28), dont la distance DF au foyer F est divisée en deux parties égales par le sommet A. Son nom lui vient de ce que, dans le tracé continu de la courbe, elle sert à diriger l'instrument le plus usité.

Tout point de la parabole est également éloigné du foyer et de la directrice.

D'abord, le principe est vrai pour le sommet A, puisque ce point est le milieu de la distance DF qui sépare le foyer et la directrice. Il est vrai aussi pour les extrémités I, K du paramètre, attendu (310) que $FI = 2AF = DF = HI$.

Pour tout autre point E, le rayon vecteur EF est l'hypothénuse d'un triangle rectangle EGF formé par l'axe et la demi-corde EG, de sorte que

$$\overline{EF}^2 = \overline{EG}^2 + \overline{FG}^2.$$

Or (312), $\overline{EG}^2 = IK \times AG = 4AF \times AG$, car $IK = 2FI = 4AF$; $AG = DG - DA = DG - AF$. Par conséquent,

$$\overline{EG}^2 = 4AF(DG - AF) = 4AF \times DG - 4\overline{AF}^2.$$

De plus,

$$FG = DG - DF = DG - 2AF, \text{ et } \overline{FG}^2 = \overline{DG}^2 - 4AF \times DG + 4\overline{AF}^2.$$

On a donc

$$\overline{EF}^2 = 4AF \times DG - 4\overline{AF}^2 + \overline{DG}^2 - 4AF \times DG + 4\overline{AF}^2 = \overline{DG}^2,$$

puis $EF = DG = CE$.

La démonstration serait la même pour un point E′ situé entre A et K. Seulement, FG′ vaudrait DF — DG′, ce qui ne changerait rien aux signes du quarré.

319. *Pour qu'une parabole soit coupée par une branche d'hyperbole de même sommet, de même axe et de même sens, il faut que la moitié de l'axe déclinant se trouve moindre que l'ordonnée de la parabole située à une distance du sommet égale au quart de l'axe transverse.*

Soient la parabole EHAH′E′ (P. VI, F. 29) et la branche d'hyperbole EIAI′E′ qui, ayant leurs sommets en A, et la droite AG pour axe de symétrie commun, se coupent aux points symétriques E, E′. Considérant l'ordonnée EG comme appartenant à l'hyperbole, on a (243)

$$\overline{EG}^2 = \frac{\overline{CS}^2(\overline{GS}^2 - \overline{AS}^2)}{\overline{AS}^2} = \frac{\overline{CS}^2((AG + AS)^2 - \overline{AS}^2)}{\overline{AS}^2}.$$

La même ordonnée considérée dans la parabole donne (312)

$$\overline{EG}^2 = 2FH \times AG.$$

Ainsi,

$$\frac{\overline{CS}^2 \times \overline{AG}^2 + 2\overline{CS}^2 \times AS \times AG}{\overline{AS}^2} = 2FH \times AG.$$

Cette égalité forme la relation qui doit exister entre les demi-axes AS, CS de l'hyperbole et le paramètre HH' ou 2FH de la parabole, pour que les points dont l'abscisse est AG soient communs aux deux courbes, et elle fait connaître la valeur de cette abscisse. On y satisfait en prenant, par exemple, $AG = 0$, puisqu'elle devient $0 = 0$; cela montre que l'extrémité A de l'axe peut toujours appartenir aux deux courbes, chose tout-à-fait évidente.

Divisant les deux membres par AG, afin de supprimer dans la relation ce qui se rapporte à la communauté du sommet, on obtient

$\overline{CS}^2 \cdot AG + 2\overline{CS}^2 \cdot AS = 2FH \cdot \overline{AS}^2$, $\overline{CS}^2 \cdot AG = 2FH \cdot \overline{AS}^2 - 2\overline{CS}^2 \cdot AS$,

et

$$AG = \frac{(2FH \times AS - 2\overline{CS}^2)\,AS}{\overline{CS}^2},$$

pour l'unique valeur de l'abscisse relative aux autres points communs. Il s'ensuit d'abord que ces points sont symétriques, et au nombre de deux seulement. D'ailleurs, ils forment des intersections, et non des contacts, car si AG croît ou décroît, l'ordonnée EG de l'hyperbole, dont la valeur contient le quarré de cette abscisse, croît ou décroît plus que l'ordonnée EG de la parabole, dont la valeur renferme seulement la première puissance de AG; ce qui montre que, de A en E, l'hyperbole passe entre l'axe AG et la parabole, tandis qu'au contraire la parabole, au-delà de E, passe entre l'axe et l'hyperbole.

Mais, pour qu'il y ait effectivement intersection, il faut

$$2\overline{CS}^2 < 2FH \times AS.$$

Supposons $2\overline{CS}^2 = 2FH \times AS$; AG devient nulle, et le sommet A est le seul point commun. Supposons $2\overline{CS}^2 > 2FH \times AS$; la valeur de AG sera négative; on aura $(AG + AS)^2 < \overline{AS}^2$, et les deux ordonnées EG deviendront imaginaires, c'est-à-dire que le sommet A se trouvera encore le seul point commun.

Or, de $2\overline{CS}^2 < 2FH \times AS$, résulte $\overline{CS}^2 < 2FH \times \frac{AS}{2}$. Prenons $AK = \frac{AS}{2} = \frac{AB}{4}$; nous aurons (312), pour l'ordonnée correspondante de la parabole, $\overline{KL}^2 = 2FH \times \frac{AS}{2}$. Donc enfin, les deux courbes se coupent dans le seul cas de $\overline{CS}^2 < \overline{KL}^2$ ou de $CS < KL$.

320. *Une parabole est toujours moins évasée qu'une hyperbole.* Plaçons les deux courbes l'une sur l'autre, de manière que l'axe de la parabole se confonde avec l'axe transverse, et que son sommet soit sur celui de la branche qui s'ouvre dans le même sens. Si la moitié de l'axe déclinant est moindre que l'ordonnée de la parabole relative à une abscisse égale au quart de l'axe transverse, la branche d'hyperbole, d'abord embrassée par la parabole, la coupe bientôt (319), et par conséquent elle s'évase davantage. Mais, lorsque l'inégalité indiquée n'a pas lieu, le sommet est le seul point commun, et la courbe qui s'évase le plus embrasse l'autre totalement, de ce sommet jusqu'à l'infini.

On a, dans ce cas (P. VI, F. 29),

$$2\overline{CS}^2 \overset{=}{>} 2FH \times AS, \quad FH \overset{=}{<} \frac{\overline{CS}^2}{AS},$$

et comme l'ordonnée quelconque y de la parabole (312) est liée à son abscisse x par la relation $y^2 = 2FH \times x$, nécessairement

$$y^2 \overset{=}{<} \frac{2\overline{CS}^2}{AS} \times x.$$

Or, l'ordonnée qui, dans l'hyperbole, a son pied au même point de l'axe commun, donne (319)

$$y'^2 = \frac{\overline{CS}^2\left[(x+AS)^2 - \overline{AS}^2\right]}{\overline{AS}^2} = \frac{2\overline{CS}^2}{AS} \times \frac{(x+AS)^2 - \overline{AS}^2}{2AS}$$

$$= \frac{2\overline{CS}^2}{AS} \times \frac{x^2 + 2x \times AS}{2AS} = \frac{2\overline{CS}^2}{AS}\left(\frac{x^2}{2AS} + x\right),$$

et quelle que soit la grandeur de x, relativement à celle de AS, $\frac{x^2}{2AS} + x$ surpasse toujours x. Donc aussi $y'^2 > y^2$, $y' > y$, ce qui signifie bien que l'hyperbole embrasse totalement la parabole, quand elle ne la coupe pas.

TRACÉS DE LA PARABOLE.

321. « Nous ne donnerons ici que les tracés fondés sur les propriétés qui découlent de la définition de la parabole. Il en est deux autres, tout aussi importants pour le moins, auxquels les propriétés des tangentes servent de base; mais on ne peut les exposer qu'après l'étude de ces droites. »

Probl. (*a*) : *Tracer, d'un mouvement continu, une parabole dont la directrice* CD *et le foyer* F *sont donnés* (P. VI, F. 30).

Fixez une règle de manière qu'une des longues arêtes couvre CD; appliquez contre cette règle le plus petit côté d'une équerre EDG; attachez un fil au sommet G et faites une petite boucle à l'autre bout, de façon que la longueur totale égale le côté EG, quand le fil est tendu à l'aide d'une pointe introduite dans la boucle; plantez cette même pointe au foyer F; coiffez-la de la boucle, puis faites glisser l'équerre le long de la règle, jusqu'à ce que le fil forme une droite FG; le point G sera sur la parabole demandée (318), car FG $=$ EG.

Il faut alors pousser l'équerre de D vers C, sans cesser de l'appuyer contre la règle, et en même temps maintenir le fil tendu, au moyen d'une pointe à tracer H qu'on presse contre le côté E′G′. Une partie G′H de ce fil s'applique sur E′G′; l'autre FH $=$ E′H, et par conséquent, la pointe H trace un arc de parabole.

Lorsque le côté EG de l'équerre couvre l'axe, c'est-à-dire la perpendiculaire abaissée de F sur CD, la pointe H marque le sommet A, à égales distances du foyer et de la directrice.

Pour tracer l'arc AG″, symétrique de AG, on donne à l'équerre une position CE″G″, telle que la totalité du fil forme encore une droite FG″, et l'on agit en cheminant vers l'axe AF, comme en allant de la position DEG au même axe.

Remarque: Il est évident que le tracé qui vient d'être décrit donne seulement un arc limité de la parabole, et que la grandeur de cet arc, ou plutôt celle de sa corde GG″ dépend du côté EG de l'équerre, ainsi que de la distance du foyer à la directrice.

PROBL. (*b*): *Tracer, par points, une parabole dont la directrice* CD *et le foyer* F *sont donnés* (P. VI, F. 30).

Une perpendiculaire abaissée de F sur CD forme l'axe, et le milieu A de la partie FI est le sommet (318).

Tirez des parallèles à CD, en différents points K, K′, K″..... de AF et de son prolongement; puis coupez ces parallèles, deux fois chacune, par des arcs décrits du foyer F, avec les distances respectives IK, IK′, IK″,.... Les points L et L′, M et M′, G et G″, ainsi obtenus, appartiendront à la parabole demandée, et vous pourrez appliquer une des solutions indiquées dans le problème du n° 2.

PROBL. (*c*): *Tracer une parabole dont on connaît l'axe, le sommet et un autre point quelconque.*

Solution 1: Abaissez, du point donné E (P. VI, F. 28), une perpendiculaire EG sur l'axe AG; cherchez une troisième proportionnelle à AG, EG, pour avoir le paramètre (312); prenez le quart de cette droite, puis portez-la sur l'axe, de A en F; le point F sera le foyer (310). Faites AD égale à AF; menez par D une parallèle à EG; cette parallèle CD sera la directrice, et vous pourrez appliquer la solution du problème (*b*) ou celle du problème (*a*).

Solution 2: Abaissez, du point donné E (P. VI, F. 27), une perpendiculaire EG sur l'axe AG, et prolongez-la jusqu'à ce que GO $=$ EG. L'extrémité O sera un point de la parabole et le symétrique de E (305). Divisez la demi-corde GO en un certain nombre de parties égales, quatre par exemple; tirez, par les points de division I, L, N, des parallèles à l'axe; partagez AG en un même nombre de parties égales, puis joignez le point donné E aux nouveaux points de division P, R, S. Les intersections des parallèles à l'axe, HI, KL, MN, et des droites EP, ER, ES marqueront les origines d'autant de diamètres (317), c'est-à-dire des points de la parabole demandée.

Portez ensuite les parties de GO sur EG; tracez des parallèles à l'axe, par les points de division de cette autre demi-corde, et joignez O aux points P, R, S; vous obtiendrez des points de l'arc AE, symétriques de H, K, M.

On pourrait aussi mener, par H, K, M, des parallèles à EO jusqu'à l'axe, et les doubler; les extrémités T, U, V des prolongements donneraient les points symétriques de H, K, M.

Application : La *trompe sur le coin* est une voûte conique, faite pour soutenir un coin formé par deux murs, quand la partie inférieure doit être supprimée. Le plan de naissance présente un angle rentrant ABC (P. VII, F. 1), et de chaque côté un angle droit saillant BAD, BCE. La voûte couvre le quadrilatère ABCF, en s'appuyant sur les piédroits AB, BC; de sorte que les plans extérieurs des murs de face DF, EF la coupent selon deux arcs de courbe qui se projettent horizontalement sur AF, CF. Enfin, le sommet de la surface conique est au sommet B de l'angle rentrant; elle a pour axe la bissectrice BF de cet angle, et pour génératrices horizontales AB, BC.

Ordinairement, le coin DFE est droit. Alors, les plans verticaux DF, EF sont respectivement parallèles aux génératrices BC, AB, et par conséquent, ils coupent la surface conique selon deux arcs de parabole (301). Dans ce cas donc, l'appareilleur doit, pour former les parements de tête des voussoirs, tracer, sur son épure, une demi-parabole qui ait son sommet en A, son axe sur l'horizontale AF, et un de ses points à l'intersection de l'arête verticale F du coin avec la génératrice culminante, dont BF est la projection horizontale.

Si le coin se trouve obtus, l'angle rentrant ABC devient aigu; les plans DF, EF prolongés rencontrent respectivement les génératrices BC, AB, et toutes les autres, sur la même nappe conique; conséquemment (127), les arcs d'intersection appartiennent chacun à une ellipse, dont on connaît le grand axe et un point, celui qui se projette en F. Ainsi, dans ce cas, l'appareilleur doit faire une application du problème *c* (53).

Enfin, le coin peut être aigu. Alors, l'angle rentrant ABC devient obtus; les plans DF, EF rencontrent respectivement les génératrices BC, AB sur la nappe conique opposée à la voûte; les arcs d'intersection appartiennent chacun à une hyperbole (277), dont les sommets et un point sont donnés par l'épure, et le trait exige une application du problème *d* (248).

Probl. (*d*): *Tracer l'arc de parabole que doit sous-tendre une* *corde donnée* HI (P. VI, F. 26), *connaissant l'origine* E *du diamètre qui coupe cette corde au milieu.*

Tirez le diamètre EG et prolongez-le à l'opposite de la corde; marquez-y deux points K, L également éloignés de E, mais à des distances moindres que EG; puis tracez les droites IK, IL, HK, HL. Le point M, intersection de la seconde avec la troisième, et le point N, intersection de la première avec la quatrième, appartiendront à l'arc demandé (316).

Répétant la même opération, en prenant chaque fois deux distances égales, différentes des précédentes, mais toujours moindres que EG, vous obtiendrez autant d'extrémités de cordes parallèles à HI, comme MN, qu'il vous en faudra pour tracer à vue l'arc de parabole.

Probl. (*e*) : *Tracer une parabole dont on connaît le paramètre.*

Tirez une droite indéfinie, pour figurer l'axe; marquez-y le sommet de la courbe, en un point quelconque A (P. VII, F. 2); portez sur l'axe, de chaque côté du sommet, le quart du paramètre donné; F, l'un des points qui en résulteront, sera le foyer (310), et si par l'autre D vous élevez une perpendiciculaire à DF, vous aurez la directrice (318), ce qui vous permettra d'employer la solution du problème *b*.

Applications : I. C'est à l'aide du tracé de deux paraboles dont les paramètres sont connus, qu'on résout le fameux problème de la *duplication du cube,* dans lequel il s'agit de trouver l'arête que doit avoir un cube pour être double d'un autre.

On trace d'abord une parabole EAG dont le paramètre EG égale l'arête du cube donné (P. VII, F. 3), puis une seconde parabole E'AG' de même sommet, qui ait pour axe une perpendiculaire à l'axe AF de la première, et pour paramètre E'G' le double de EG. Les deux courbes se coupent au sommet commun et en un autre point H. Abaissant, de cette seconde intersection, une perpendiculaire HI sur l'axe AF, on obtient l'arête cherchée.

L'ordonnée HI de la première parabole satisfait effectivement aux conditions, si $\overline{HI}^3 = 2\overline{EG}^3$, car les cubes se contiennent comme les cubes numériques de leurs arêtes. Or (312),

$$\overline{HI}^2 = EG \times AI, \qquad AI = \frac{\overline{HI}^2}{EG} \quad \text{et} \quad \overline{AI}^2 = \frac{\overline{HI}^4}{\overline{EG}^2}.$$

D'un autre côté, AI = HI', ordonnée de la seconde parabole, et

$$\overline{AI}^2 = \overline{HI'}^2 = E'G' \times AI' = 2EG \times HI.$$

Conséquemment,

$$\frac{\overline{HI}^4}{\overline{EG}^2} = 2EG \times HI, \qquad \text{ce qui donne} \qquad \overline{HI}^3 = 2\overline{EG}^3.$$

II. *La trisection de l'angle*, autre célèbre problème qui consiste à trouver, par des procédés purement géométriques, le tiers d'un angle donné, la trisection de l'angle est encore une application du tracé des paraboles dont les paramètres sont connus.

Soient l'angle BCD (P. VII, F. 4) et l'arc BD décrit du sommet, entre les côtés, avec un rayon quelconque BC. La perpendiculaire BE, abaissée de l'extrémité d'un rayon sur l'autre, est, en trigonométrie, le *sinus* (sinusse) de l'angle BCD, pour le rayon BC, et la distance EC, du pied de ce sinus au sommet C, est le *cosinus* (co-sinusse) du même angle, pour le même rayon. Or, il est visible que si l'on parvient à trouver le cosinus CE′ du tiers de BCD, pour le rayon BC, il suffira d'élever, au point E′, une perpendiculaire sur CD, jusqu'à l'arc BD, pour marquer un point B′ de cet arc, tel que $B'D = \frac{1}{3}BD$, ou tel que $B'CD = \frac{1}{3}BCD$. Ainsi, la trisection d'un angle se trouve réduite à la recherche du cosinus du tiers de cet angle.

Traçons une parabole GAH (P. VII, F. 5), avec un paramètre arbitraire GH; cherchons une quatrième proportionnelle à 2GH, BC, $\frac{3}{4}$BC et portons-la sur l'axe AF, à partir du sommet A; au point I ainsi marqué, élevons une perpendiculaire sur AF; portons, de I en A′, sur cette perpendiculaire, une troisième proportionnelle à CE, $\frac{3}{4}$BC; prenons A′ pour le sommet d'une parabole dont l'axe soit A′I, et le paramètre G′H′, une quatrième proportionnelle à GH, CE et à la troisième proportionnelle de GH, $\frac{1}{2}$BC. Cette seconde parabole coupera la première en A et en trois autres points K, L, M; abaissons enfin de M, le plus éloigné de A′, une perpendiculaire sur AF; la distance MN sera précisément le cosinus du tiers de l'angle BCD, pour le rayon BC.

La construction donne d'abord

$$2GH : BC :: \tfrac{3}{4}BC : AI \quad \text{et} \quad AI = \frac{\frac{3}{4}\overline{BC}^2}{2GH};$$

$$CE : \tfrac{3}{4}BC :: \tfrac{3}{4}BC : A'I \quad \text{et} \quad A'I = \frac{\frac{9}{16}\overline{BC}^2}{CE};$$

$$GH : \tfrac{1}{2}BC :: \tfrac{1}{2}BC : x \quad \text{et} \quad x = \frac{\frac{1}{4}\overline{BC}^2}{GH};$$

$$GH : CE :: x : G'H' \quad \text{et} \quad G'H' = \frac{CE}{GH}x = \frac{\frac{1}{4}\overline{BC}^2 \times CE}{\overline{GH}^2}.$$

Or (312), puisque MN est ordonnée de la parabole GAH,

$$\overline{MN}^2 = GH \times AN \quad \text{ou} \quad AN = \frac{\overline{MN}^2}{GH},$$

et comme $OM = AN - AI$,

$$OM = \frac{\overline{MN}^2}{GH} - \frac{\frac{3}{4}\overline{BC}^2}{2GH}.$$

D'ailleurs, $\overline{OM}^2 = G'H' \times A'O$, OM étant ordonnée de la parabole G'A'H'. Donc

$$\left(\frac{\overline{MN}^2}{GH} - \frac{\frac{3}{4}\overline{BC}^2}{2GH}\right)^2 = G'H'(A'I + IO) = G'H'(A'I + MN)$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\overline{BC}^2 \times CE}{\overline{GH}^2}\left(\frac{\frac{9}{16}\overline{BC}^2}{CE} + MN\right),$$

$$\frac{\overline{MN}^4}{\overline{GH}^2} - \frac{\frac{3}{4}\overline{BC}^2 \times \overline{MN}^2}{\overline{GH}^2} + \frac{\frac{9}{16}\overline{BC}^4}{4\overline{GH}^2} = \frac{\frac{9}{16}\overline{BC}^4}{4\overline{GH}^2} + \frac{\frac{1}{4}\overline{BC}^2 \times CE \times MN}{\overline{GH}^2},$$

$$\overline{MN}^3 - \tfrac{3}{4}\overline{BC}^2 \times MN = \tfrac{1}{4}\overline{BC}^2 \times CE, \quad \text{et} \quad CE = \frac{4\overline{MN}^3 - 3\overline{BC}^2 \times MN}{\overline{BC}^2},$$

relation établie par la trigonométrie entre le cosinus CE d'un angle, pour le rayon BC, et le cosinus du tiers de cet angle, pour le même rayon.

Quant au passage de la parabole G'A'H' par le sommet A de l'autre, il a lieu effectivement, si $\overline{AI}^2 = G'H' \times A'I$. Or

$$\overline{AI}^2 = \left(\frac{\frac{3}{4}\overline{BC}^2}{2GH}\right)^2 = \frac{\frac{9}{16}\overline{BC}^4}{4\overline{GH}^2},$$

et

$$G'H' \times A'I = \frac{\frac{1}{4}\overline{BC}^2 \times CE}{\overline{GH}^2} \times \frac{\frac{9}{16}\overline{BC}^2}{CE} = \frac{\frac{9}{16}\overline{BC}^4}{4\overline{GH}^2}.$$

TANGENTES DE LA PARABOLE.

322. *Toute tangente de la parabole est parallèle aux cordes que le diamètre du contact divise en deux parties égales.*

La tangente LM (P. VI, F. 23) prolonge l'élément M de la courbe, et cet élément est parallèle aux cordes EH, AR, si, comme elles, il se trouve coupé au milieu par le diamètre MP. Or, dans toutes les positions parallèles à EH que peut prendre la corde AR entre U et M, son milieu est sur le diamètre MP. Il y est donc aussi et se confond avec M, quand les deux parties AU, RU sont devenues tellement petites qu'elles se confondent elles-mêmes avec ce point, c'est-à-dire lorsque la corde AR se trouve réduite à l'élément M.

Une autre démonstration peut se déduire de celle du principe 307. D'après cette dernière, en effet, la tangente LM est la projection conique de la tangente *lm* du cercle *g'*, laquelle concourt sur la tangente *lb'* avec les sécantes *eh*, *ar* dont EH, AR sont les projections coniques. Par conséquent, LM doit être parallèle aux cordes EH, AR que le diamètre MP coupe par le milieu.

323. *La parabole n'a point de tangentes qui soient parallèles entre elles.*

Si elle en avait, les cordes parallèles à l'une ne seraient pas divisées en deux parties égales par le diamètre du contact de l'autre, et pourtant elles se trouveraient parallèles à cette autre. Il y aurait donc contradiction formelle au principe précédent.

324. *La tangente au sommet d'une parabole est la seule qui soit d'équerre sur l'axe.*

D'abord, la tangente au sommet A (P. VI, F. 24) est d'équerre sur l'axe, puisqu'en vertu du principe 322, elle se trouve parallèle aux cordes que cet axe partage en deux parties égales (305). Ensuite, cette même tangente est la seule qui coupe l'axe à angle droit; car si toute autre, celle du point H par exemple, faisait un pareil angle avec AM, le diamètre HL du contact diviserait la corde parallèle IK en deux parties égales, comme AM, ce qui est impossible.

325. *La parabole n'a point de tangente parallèle à l'axe.*

Tous les diamètres étant parallèles à l'axe (307), il n'y en a aucun qui puisse couper au milieu des cordes parallèles à cet axe. Or, d'après le principe 322, le diamètre du contact devrait diviser de telles cordes en deux parties égales.

On peut dire aussi que les cordes parallèles à l'axe, étant infiniment grandes (308), n'ont point de milieux assignables, ou bien que s'il existait pour un certain point une tangente parallèle à l'axe, celle du point symétrique le serait aussi, ce qui est impossible (323).

Applications : I. La parabole donne beaucoup de solidité aux voûtes dont elle forme le cintre : il convient donc de l'employer pour les arcades et les berceaux surhaussés qui ont une forte charge à supporter. On place alors verticalement l'axe de la courbe. Mais il faut que les piédroits soient capables d'une grande résistance horizontale, car la surface concave du cylindre parabolique, ne pouvant être tangente à leurs faces verticales internes, exerce nécessairement une énorme poussée contre ces faces.

II. Les consoles et les corbeaux, encastrés dans des murs et destinés à soutenir des poutres ou des balcons, doivent avoir, pour profil longitudinal, une moitié de parabole, afin que le support offre partout la même résistance au poids qui agit à l'extrémité A (P. VII, F. 6). La courbe a son sommet sur cette extrémité ; la direction du poids se trouve tangente ; l'axe est l'horizontale AB, et chaque ordonnée égale la racine quarrée d'une quatrième proportionnelle à la longueur AB, à l'abscisse de cette ordonnée, et au quarré de la plus grande épaisseur BC (311). Mais cette épaisseur doit être préalablement déterminée d'après les formules relatives à la résistance des solides, qui la font dépendre de la charge et de la longueur AB; car il faut, avant tout, que le support ne puisse se rompre à l'entrée de son encastrement. Quand cette condition est remplie, il est suffisamment fort dans toutes ses sections parallèles au mur, sans avoir le moindre excès de matière.

La demi-parabole peut être au-dessus de son axe, comme on le voit en A'C', lorsque le support est simplement destiné à soutenir un poids placé à l'extrémité A'. Une parabole entière C''A''D'', convient même aussi dans ce cas; mais alors la racine quarrée de la quatrième proportionnelle donne le double de l'ordonnée relative à l'abscisse employée.

326. *Toute tangente de la parabole est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du contact et le prolongement du diamètre qui a le même point pour origine.*

Le principe sera évidemment démontré, si nous faisons voir que la bissectrice de l'angle FEC (P. VII, F. 2), compris entre le rayon vecteur EF et le prolongement du diamètre EG, touche la courbe en E.

Joignons le foyer au point C, intersection de GE et de la directrice. Nous formerons ainsi un triangle symétrique CEF (318); la bissectrice EH de l'angle FEC sera perpendiculaire au milieu de la base CF, et tout point I pris sur cette bissectrice, aussi près qu'on voudra de E, se trouvera à égales distances de C et de F. Mais la droite IC, nécessairement oblique par rapport à la directrice, est plus longue que la perpendiculaire IK abaissée sur CD. Par conséquent, IK est plus courte que FI; le point I se trouve entre la parabole et la directrice; la bissectrice EH n'a que le point E de commun avec la courbe, ou enfin cette bissectrice est tangente en E.

327. *La distance* FL *du foyer au pied d'une tangente* EL *de la parabole* (P. VII, F. 2) *égale le rayon vecteur* EF *du contact.*

Le triangle EFL est effectivement symétrique, car l'angle ELF = CEL, et ce dernier vaut FEL (326).

328. *Toute tangente* EG *de la parabole* (P. VII, F. 7) *est parallèle à un des côtés* HI *du pentagone inscrit* HKELIH *qui a le contact* E *pour sommet opposé à* HI *et dont les quatre autres côtés sont parallèles deux à deux.*

Le pentagone et l'élément E, confondu avec la tangente EG, constituent un hexagone inscrit HKEELIH, dont les côtés opposés sont: HK et EL, parallèles séparées par KE, EE; KE et LI, parallèles séparées par EE, EL; EE et HI, séparés par EL, LI et par EK, KH. Cet hexagone est la projection conique d'un hexagone inscrit au cercle projeté sur la parabole.

Or, les cordes parallèles EK, LI proviennent de cordes du cercle qui concourent sur la tangente au point dont la projection conique est à l'infini (304); les cordes parallèles EL, HK sont dues à des cordes du cercle qui concourent sur la même tangente, et dans la circonférence comme dans l'ellipse, les concours des côtés opposés de l'hexagone inscrit sont trois points en ligne droite. Donc, les côtés dont EE, HI sont les projections coniques concourent aussi sur la tangente au point du cercle qui se projette à l'infini, et par conséquent HI et l'élément EE ou la tangente EG sont parallèles.

329. *L'ordonnée* EM *du contact de toute tangente à la parabole* (P. VII, F. 2) *est moyenne proportionnelle entre la sous-tangente* LM *et le demi-paramètre* FN (309).

Tirons la droite NO parallèlement à la tangente EL; elle sera aussi parallèle aux cordes que le diamètre EG divise en deux parties égales (322), et (315) l'on aura EM = OF. Mais le parallélisme des ordonnées EM, FN donne la proportion LM : OF :: EM : FN. Par conséquent, LM : EM :: EM : FN.

330. *Le sommet* A *de la parabole* (P. VII, F. 2) *est le milieu d'une sous-tangente quelconque* LM.

Il suit du principe précédent que $LM = \frac{\overline{EM}^2}{FN}$. Or (310 et 312),

$FN = 2AF$; $\overline{EM}^2 = 4AF \times AM$. Conséquemment,

$$LM = \frac{4AF \times AM}{2AF} = 2AM, \quad LA + AM = 2AM, \quad \text{et} \quad LA = AM.$$

331. *Les tangentes de deux points symétriques* E, E' (P. VII, F. 2) *se coupent sur l'axe* DM *de la parabole et font des angles égaux avec cette droite.*

Les contacts E, E', étant symétriques, ont même abscisse AM, et même sous-tangente LM (330). Par conséquent, EQ, E'L coupent l'axe, l'une et l'autre, à l'extrémité L de cette sous-tangente.

L'égalité des angles ELM, E'LM provient de celle des triangles rectangles auxquels ils appartiennent.

332. *La tangente à l'une des extrémités du paramètre* NP (P. VII, F. 2) *passe par l'intersection* D *de la directrice avec l'axe, et coupe cet axe sous un angle de* 45°.

La sous-tangente vaut alors 2AF (330), comme DF (318); par suite, le point D limite cette sous-tangente, et (310) le triangle rectangle DFN, dont la tangente est l'hypothénuse, se trouve symétrique, ce qui rend l'angle FDN de 45°.

333. *La corde des contacts de deux tangentes concourantes est une de celles que divise en deux parties égales le diamètre qui passe par le concours.*

Faisons tourner les cordes *tah*, *tre* du cercle *g'* (P. VI, F. 23) autour de leur intersection *t*, jusqu'à ce qu'elles deviennent tangentes. Les cordes *leh*, *lra* tourneront en même temps autour de leur intersection *l*, pour se rapprocher, et elles se confondront en une seule droite qui passera par *l* et les deux contacts, au moment où *tah*, *tre* toucheront la circonférence. Mais les projections coniques TAH, TRE de ces deux cordes deviennent, au même moment, des tangentes de la parabole; les projections coniques EH, AR de *leh*, *lra* se confondent aussi en une droite des contacts, laquelle est nécessairement la projection conique de la droite des contacts du cercle, et comme cette dernière concourt en *l* avec *eh*, *ar*, la droite des contacts de la parabole doit être parallèle à EH, AR (304). D'ailleurs, d'après la démonstration du n° 307, le diamètre TMP, projection conique de *tmb'*, partage en deux parties égales les cordes EH, AR et toutes les cordes parallèles à celles-là.

334. *La parabole divise en deux parties égales la distance du concours de deux tangentes quelconques au milieu de la corde des contacts.*

Soient les deux tangentes EG, EH (P. VII, F. 8). La partie EI du diamètre tiré par le concours E, sépare ce concours du milieu de la corde GH des contacts (333); et il faut démontrer que l'origine K du diamètre est le milieu de EI.

On pourrait invoquer le principe 316, après avoir fait observer qu'au moment où la sécante IML devient tangente en I (P. VI, F. 26), M se confond avec ce point; que la corde HM couvre HI, et que les intersections K, L passent, la première au milieu G de la corde du contact, la seconde au pied de la tangente. Mais voici une démonstration directe.

Menons par K (P. VII, F. 8) une parallèle à GH, jusqu'à la rencontre de EG, EH; cette parallèle LM sera tangente à la parabole (322), et le diamètre LN, parallèle à EI, coupera au milieu la corde GK des contacts de LG, LK. Le point L divise donc EG en deux parties égales.

On verrait d'une manière analogue que M est le milieu de EH.

Ainsi, IL, IM sont respectivement parallèles à EH, EG; le quadrilatère ELIM est un parallélogramme; ses diagonales EI, LM se coupent réciproquement au milieu, et EK = IK.

Remarquons que le principe 330 n'est au fond qu'une simple conséquence de celui-ci.

335. *Toute tangente de parabole, transversale de deux autres, forme sur l'une deux parties, terminées au contact et au concours, dont le rapport est inverse de celui des parties analogues formées sur la seconde.*

Ainsi (P. VII, F. 9), EG, tangente en H et transversale des tangentes IL, KL, donne la proportion

$$\mathrm{EI} : \mathrm{EL} :: \mathrm{GL} : \mathrm{GK}.$$

Tirons les droites EM, LN, GO, par les milieux des cordes de contact HI, IK, HK; nous aurons autant de diamètres (333). Conséquemment (307),

$$\mathrm{EI} : \mathrm{EL} :: \mathrm{IP} : \mathrm{PN}, \qquad \mathrm{GL} : \mathrm{GK} :: \mathrm{NQ} : \mathrm{KQ},$$

et la proportion annoncée se trouve vraie, si

$$IP : PN :: NQ : KQ, \quad \text{ou si} \quad IN : PN :: NK : KQ,$$

ou encore si

$$PN = KQ, \quad \text{car} \quad IN = NK.$$

Or, HR, parallèle aux trois diamètres, fournit les relations $IP = PR$, $KQ = QR$, et il s'ensuit

$$IN - IP = PN = NK - PR = NK - PN - NR,$$
$$2PN = NK - NR = KR = 2KQ.$$

Donc $PN = KQ$ effectivement.

La tangente IL, transversale des tangentes EH, LK, donne aussi

$$EH : EG :: LG : LK.$$

D'abord,

$$EH : EG :: PR : PQ, \quad LG : LK :: NQ : NK.$$

Il reste donc à faire voir que

$$PR : PQ :: NQ : NK, \quad \text{ou que} \quad PR : QR :: NQ : QK,$$

ou que

$$PR = NQ, \quad \text{car} \quad QR = QK.$$

Or

$$NK - QK = NQ = IN - QR = IN + NR - QR - NR = IR - NQ,$$

et il s'ensuit

$$2NQ = IR = 2PR, \quad \text{ou} \quad NQ = PR.$$

336. *Chacune des tangentes de la parabole, transversales de deux autres tangentes quelconques, prolongées jusqu'à leur concours, est divisée avec celles-ci en parties proportionnelles, par toutes les autres et son propre contact.*

Soient les tangentes EG, HI, KL (P. VII, F. 10), transversales des tangentes MN, MO. Je dis d'abord que ces deux dernières sont divisées en parties proportionnelles.

La transversale GE donne (335)

$$MG : EO :: GN : EM \quad \text{et} \quad MN : MO :: MG : EO.$$

On a, par la transversale HI,

$$MN : MO :: MI : OH.$$

Donc

$$MG : EO :: MI : OH, \quad MG : EO :: GI : EH.$$

Mais il résulte de la transversale KL,

$$MN : MO :: ML : OK.$$

Par conséquent,

$$ML : OK :: MI : OH, \quad IL : HK :: MI : OH :: MG : EO,$$
$$MG : EO :: GI : EH :: IL : HK.$$

Enfin, la même transversale KL fournit la proportion

MN : MO :: LN : KM,

et il s'ensuit

MG : EO :: GI : EH :: IL : HK :: LN : KM.

Maintenant, il est clair que HI, transversale de GN, GP, donne

GI : PQ :: IL : QR :: LN : RG et GN : GP :: GI : PQ.

Mais MO, autre transversale de GN, GP, donne aussi

MG : MN :: EP : EG, puis MG : EP :: GN : GP.

Donc

MG : EP :: GI : PQ :: IL : QR :: LN : RG.

Rapprochant la dernière suite de rapports égaux de celle qu'ont produite les parties de MN, MO, on voit facilement que

EP : EO :: PQ : EH :: QR : HK :: RG : KM.

Enfin, des raisonnements analogues montreraient que

HQ : EO :: QS : EH :: ST : HK :: TI : KM,

et que

KR : EO :: RT : EH :: TU : HK :: UL : KM.

537. *Deux tangentes d'équerre se coupent sur la directrice, et la corde de leurs contacts passe par le foyer.*

Le foyer F (P. VII, F. 11) est à la fois la projection orthogonale du centre du cercle qui a produit la parabole (303) et la projection conique d'un point f' du diamètre $a'b'$ projeté sur l'axe AF. En conséquence, le paramètre IK forme la projection conique de la corde horizontale $i'k'$; les tangentes $d'i'$, $d'k'$ de la circonférence produisent les tangentes DI, DK de la parabole (332), et la directrice CD provient de l'horizontale $c'd'$ tirée dans le plan du cercle, perpendiculairement au diamètre $a'b'$. Or cette droite $c'd'$ est la polaire du pôle f', c'est-à-dire que toute paire de tangentes menée d'un point de $c'd'$ à la circonférence, donne des contacts dont la corde passe par f'. Donc, toute paire de tangentes CE, CG, menée d'un point de la directrice à la parabole, donne des contacts dont la corde EG passe par le foyer F; en d'autres termes, la directrice est la polaire du foyer.

Je dis maintenant que les tangentes CE, CG de chaque paire sont d'équerre l'une sur l'autre, ou que le triangle ECG se trouve rectangle en C. Cela est vrai, si la portion CH du diamètre tiré du concours C égale la moitié EH de la corde des contacts, car alors la circonférence décrite sur EG, comme diamètre, passera par le point C.

La tangente à l'origine L du diamètre CH est parallèle à EG (322), et fait des angles égaux avec CL, FL (326), droites de même longueur (318). Par conséquent, cette tangente et EG sont perpendiculaires sur CF. Il y a donc similitude entre les deux triangles CFH, EMH, si EM a été tirée d'équerre sur CH, et

$$EH : EM :: CH : CF.$$

Mais le triangle CDF, étant semblable à CFH, l'est aussi à EMH, ce qui donne

$$EH : EM :: CF : DF.$$

Multipliant les deux proportions, on obtient

$$\overline{EH}^2 : \overline{EM}^2 :: CH : DF, \quad \text{ou} \quad \overline{EH}^2 = \frac{\overline{EM}^2 \times CH}{DF}.$$

Or (313), $\overline{EM}^2 = IK \times LH = \frac{1}{2}IK \times 2LH$; $\frac{1}{2}IK = FK = DF$ (310 et 318); $2LH = CH$, car (334) $LH = CL$. Par conséquent,

$$\overline{EM}^2 = DF \cdot CH, \quad \overline{EH}^2 = \frac{DF \cdot CH \cdot CH}{DF} = \overline{CH}^2, \quad \text{et enfin} \quad EH = CH.$$

Ainsi, deux tangentes de la parabole, issues d'un point quelconque de la directrice sont d'équerre, et la corde de leurs contacts passe par le foyer. Mais il ne saurait y avoir des tangentes d'équerre qui se coupent hors de la directrice; car supposons que NO, NG soient dans ce cas; la première rencontrant CE en un certain point P (323), il y aurait de ce point deux perpendiculaires PN, PC sur la même droite CG. La directrice est donc en effet le lieu des concours de toutes les tangentes d'équerre.

PROBLÈME : *Tracer une parabole dont on connaît deux tangentes d'équerre* CE, CG *et leurs contacts* E, G (P. VII, F. 11).

Tirez la corde EG des contacts, et joignez son milieu H au concours C, pour avoir le diamètre CH (333). Une perpendiculaire CD, élevée sur ce diamètre, vous donnera la directrice (337); la distance GT de G à CD, portée sur GE, à partir de G, marquera le foyer F (318); FD parallèle à CH sera l'axe (307), et vous pourrez appliquer le problème (*b*) ou le problème (*c*) du n° 321.

338. *La parabole a deux asymptotes* (232) *parallèles à l'axe et situées à l'infini.*

Parmi les paires de tangentes d'équerre, il y en a nécessairement une dont l'un des contacts est le sommet A de la courbe (P. VII, F. 11), et comme la tangente en A coupe l'axe DF à angle droit (324), l'autre tangente de la paire se trouve parallèle à cet axe. Mais AQ, parallèle à CD, ne peut rencontrer la directrice qu'à l'infini. C'est donc à une distance infinie du sommet qu'est placée la tangente parallèle à l'axe, circonstance en harmonie parfaite avec le principe 325. Ainsi, cette tangente ne touche la courbe qu'en un point infiniment éloigné de l'axe, c'est-à-dire au point situé à l'infini sur l'arc AKE, et par conséquent, elle est asymptote.

On verrait de même qu'il y a aussi une asymptote pour l'arc AGI.

Tracé des tangentes de la parabole.

339. Probl. (*a*) : *Mener une tangente à la parabole, par un point donné sur cette courbe.*

Solution 1 : Cherchez l'une des cordes que le diamètre du point donné E (P. VII, F. 7) partage en deux parties égales (308, probl. *d*); puis, menez par E une parallèle EG à cette corde HI (322).

Solution 2 : Décrivez du foyer F (F. 2), avec un rayon égal au rayon vecteur FE du contact, un arc qui coupe l'axe au-delà du sommet; puis, joignez l'intersection L au point donné E; la droite EL sera la tangente cherchée (327).

Solution 3 : Elevez une perpendiculaire EH au milieu de la droite CF qui joint le foyer à l'intersection de la directrice avec le diamètre du point donné E.

Démonstration: Comme CE = EF (318), la perpendiculaire au milieu de CF passe par E; et comme de l'égalité des triangles rectangles CHE, EHF, résulte celle des angles CEH, FEH, EH est tangente en E (326).

Solution 4 : Tirez, par le point donné E (F. 7), deux cordes quelconques EK, EL; tracez KH parallèle à EL, LI parallèle à EK, et la corde HI qui achevera le pentagone inscrit EKHILE. La droite EG parallèle à HI sera la tangente demandée (328).

Solution 5 : Cherchez une troisième proportionnelle au demi-paramètre FN ou FD (F. 2) et à l'ordonnée EM du point assigné E; vous aurez la sous-tangente (329). Portez-la sur l'axe, de M en L; la droite LE sera nécessairement la tangente demandée.

Solution 6 : Abaissez, du point donné E, une perpendiculaire EM sur l'axe, et portez AM de A en L; LM formera la sous-tangente (330); par conséquent, LE sera la tangente cherchée.

Solution 7 : Tirez une corde quelconque GH, par le point donné G (F. 8); tracez le diamètre IE qui passe au milieu I de GH, et portez IK de K en E; EG sera la tangente demandée, car c'est en E que concourent les tangentes aux extrémités de GH (334).

Probl. (*b*) : *Mener une tangente à la parabole, par un point donné hors de cette courbe.*

Solution 1 : Du point donné Q (P. VII, F. 2), et avec la distance de ce point au foyer F, décrivez un arc qui coupe la directrice CD; par l'intersection C, tracez une parallèle CE à l'axe DM; puis, joignez à Q le point E où cette parallèle rencontre la parabole.

Comme l'arc coupe CD en deux points, le problème a deux solutions.

Démonstration: Les points E, Q appartiennent à la perpendiculaire au milieu de CF, car EC = EF (318); les triangles EHC, EHF sont rectangles et égaux; il y a égalité entre les angles CEH, FEH; conséquemment EQ est tangente en E (326).

Solution 2: Tirez, par le point donné E (F. 8), un diamètre EI; cherchez une des cordes qu'il divise en deux parties égales; menez une parallèle GH à cette corde, par un point I que vous aurez marqué sur le diamètre, en prenant KI = KE; joignez enfin E aux intersections de GH avec la parabole; les droites EG, EH seront tangentes (334).

Solution 3: Tirez, par le point donné E (F. 12), un diamètre EG; abaissez de l'origine H une perpendiculaire HI sur l'axe AI; portez AI de A en K et tracez la droite KH. Cette droite sera tangente en H (330) et parallèle aux cordes que le diamètre EG coupe à leurs milieux (322). Portez donc EH de H en G; puis menez par G une parallèle LM à KH, pour avoir la corde des contacts cherchés (334). Les droites EL, EM donneront les deux solutions du problème.

PROBL. (*c*): *Tracer, parallèlement à une droite donnée, une tangente de la parabole.*

Solution 1: Tirez une corde HI parallèle à la droite donnée MN (P. VII, F. 7), et un diamètre par le milieu O de cette corde; puis menez, par l'origine E du diamètre, une parallèle à HI ou à MN. Cette parallèle EG sera la tangente demandée (322).

Solution 2: Abaissez du foyer F (F. 2) une perpendiculaire sur la droite donnée RS; par le point C où cette perpendiculaire coupe la directrice, menez, jusqu'à la parabole, une parallèle CE à l'axe; puis, par le point E, tracez une parallèle EH à RS. La droite EH sera la tangente cherchée (326).

PROBL. (*d*): *Tracer, perpendiculairement à une droite donnée, une tangente de la parabole.*

Solution 1: Tirez une corde HI perpendiculaire à la droite donnée PQ (P. VII, F. 7), puis achevez comme dans la première solution du problème (*c*).

Solution 2: Menez, du foyer F (F. 2), une parallèle FC à la droite donnée TU, puis achevez comme dans la seconde solution du problème (*c*), en tirant EH d'équerre sur TU.

Solution 3: Tracez une tangente CE parallèlement à la droite donnée RS (F. 11); puis, joignez son contact E au foyer F, et le point G, où EF coupe une seconde fois la parabole, au point C, où CE rencontre la directrice. La droite CG sera tangente en G et d'équerre sur RS, comme elle l'est sur CE (337).

PROBL. (*e*): *Trouver le contact d'une droite donnée, tangente à la parabole.*

Solution 1: Tirez une corde HI parallèle à la tangente donnée

EG (P. VII, F. 7), puis un diamètre par le milieu O de cette corde. L'origine E du diamètre sera le contact cherché (322).

Solution 2 : Abaissez, du foyer F (F. 2), une perpendiculaire FC sur la tangente donnée QE, et par le point C, où cette perpendiculaire coupe la directrice, menez une parallèle CG à l'axe. Le point E, où CG croisera QE, sera le contact demandé (326).

Solution 3 : Prolongez EQ jusqu'à l'axe ; portez AL de A en M, pour former la sous-tangente LM (330) ; menez par M une parallèle à la directrice ; la rencontre E de cette parallèle et de QE sera le contact cherché.

Probl. (*f*) : ***Déterminer des tangentes d'un arc de parabole, non tracé, dont on connaît les deux tangentes extrêmes*** **EG, EG′, *et leurs contacts* G, G′ (P. VII, F. 13).**

Partagez EG, EG′ en autant de parties égales, plus une, qu'on demande de tangentes nouvelles : en quatre parties égales, s'il faut, par exemple, déterminer trois tangentes ; joignez les points de division H, I, K de EG, pris en allant de E vers G, avec les points correspondants de EG′, pris dans un ordre inverse, en allant de G′ vers E ; portez la partie HL ou LM de HH′ sur cette même droite, de M ou de H′ en N ; portez sur II′ sa partie I′M, de M en O, et sur KK′, sa partie K′L ou LP, de P en Q. Les droites HH′, II′, KK′ seront des tangentes de l'arc de parabole qui unirait G à G′ en touchant EG, EG′ à leurs extrémités différentes, et ces trois tangentes auront pour contacts respectifs les points N, O, Q (336).

Applications : I. Il est évident que la solution du dernier problème convient aussi à cet autre : ***Tracer un arc de parabole dont on connaît seulement deux tangentes*** **EG, EG′ *et leurs contacts* G, G′ (P. VII, F. 13).** On trouve effectivement, en opérant comme il est prescrit, autant de tangentes de l'arc qu'il est nécessaire d'en avoir pour le tracer à vue (3), et l'on obtient même les contacts de ces tangentes, c'est-à-dire autant de points de la courbe.

Une autre solution serait celle du problème *d* (321), car ayant la corde des contacts et le concours des tangentes, on trouve facilement l'origine du diamètre qui coupe la corde au milieu (334) ; mais si cette seconde solution peut donner autant de points de l'arc que la première, elle ne fournit pas les tangentes comme celle-ci.

II. Si, dans le problème (*i*) du n° 53, on marquait, comme point de la courbe, le milieu de la partie de chaque transversale comprise entre les deux transversales voisines, au lieu de marquer l'intersection de la première avec les deux autres, cette courbe différerait encore fort peu d'une ellipse, et elle se trouverait composée de quatre arcs égaux de parabole, raccordés deux à deux aux milieux des quatre côtés du rectangle ABCD (P. II, F. 17).

III. Il importe qu'une route ou un canal ne change pas de direction brusquement, en formant une ligne brisée, surtout lorsque l'angle compris entre les deux parties droites est peu ouvert : plusieurs des chevaux d'un long attelage agiraient déjà sur le nouvel alignement, que les autres suivraient encore le précédent, ce qui ferait perdre beaucoup de force et pourrait causer des accidents graves ; un tournant court expose à verser toute voiture animée d'une grande vitesse, parce qu'il fait naître une force centrifuge capable de soulever la roue située du côté du centre.

Le changement de direction doit donc se faire selon un arc peu courbe, tangent aux deux parties de la route ou du canal, en des points convenablement marqués : lorsque rien ne s'y oppose, ces points sont pris à égales distances du sommet de l'angle.

Ainsi, les bords d'une route présentent, dans chaque tournant, deux arcs équidistants, dont l'écartement égale la largeur des parties droites. Le plus petit peut se déduire aisément du plus grand. Aussi, toute la difficulté d'un *raccordement* de route gît dans le tracé du dernier. On ne saurait prendre pour celui-ci une portion de circonférence, car la nécessité d'une faible courbure rendrait le rayon fort grand, et il est impossible, sur un terrain inégal, de tracer un cercle au moyen d'un long cordeau : il serait même très-difficile d'en marquer seulement plusieurs points avec quelque exactitude. D'ailleurs, la circonférence ne convient plus quand les contacts ne peuvent être à la même distance du concours des tangentes.

La vraie courbe des raccordements de route ou de canal est la parabole, parce que son tracé, exécuté d'après le problème (f), n'exige que de simples alignements. Pour raccorder, par exemple, les deux parties de route GR, G'R' (P. VII, F. 13), il faut, après avoir marqué les contacts G, G' et le concours E avec des jalons, en planter d'autres H, I, K, etc. et H', I', K', etc. qui divisent EG, EG' en un même nombre de parties égales ; mettre aussi des jalons aux rencontres L, M, P, etc. des alignements HH', KK', II', etc., et achever comme dans le problème (f).

Observez toutefois qu'il n'est pas nécessaire de marquer toutes les intersections de HH', par exemple, avec les autres transversales : le point M, voisin du contact N, et le suivant L suffisent.

Au lieu d'employer le problème (f) pour tracer un raccordement, on pourrait appliquer le problème (d) du n° 321, qui n'exige non plus que des alignements.

IV. De simples alignements suffisent aussi à la division en parties égales d'une droite EG' donnée sur le terrain. Plantez un jalon S à une médiocre distance de G' ; portez, sur la direction ES, autant de parties égales quelconques, et une de plus, qu'en doit avoir EG' ; vous marquerez ainsi un dernier point T et une direction G'TU ; portez sur cette direction, à partir de G', autant de fois la longueur G'T que EG' doit avoir de parties ; numérotez les jalons placés aux points de ET, en commençant par le plus voisin de E, et ceux de G'U, en commençant à T ; enfin, plantez d'autres jalons aux rencontres de l'alignement EG' avec les alignements 2.2, 3.3, 4.4 ; ces rencontres K', I', H' diviseront en parties égales la droite donnée.

Les parties de ET, quoique arbitraires, doivent être assez petites pour que leur somme soit moindre que EG′; autrement, le premier alignement 2.2, et peut-être le suivant, couperait la droite donnée sous un angle tellement aigu qu'il serait difficile de placer exactement le jalon K′.

La justesse du tracé repose sur le principe 336. En effet, d'après ce principe, les transversales qui divisent en parties égales EG′, G′U, considérées comme tangentes d'une certaine parabole, divisent de la même manière l'une d'elles ET. Donc, réciproquement, les transversales qui partagent G′U, ET en parties égales, doivent partager de la même manière EG′. Le point 1 de ET serait le contact de cette tangente; G′E toucherait la courbe au-delà de E, et G′U, vers le point U.

NORMALES DE LA PARABOLE.

340. *Toute normale de la parabole fait des angles égaux avec le rayon vecteur et le diamètre de l'incidence.*

La normale HN (P. VII, F. 12) forme deux angles droits KHN, NHO sur la tangente KO de l'incidence H (4). Mais (326), l'angle EHK ou GHO = FHK. Par conséquent,

$$KHN - FHK = NHO - GHO, \quad \text{et} \quad FHN = GHN.$$

341. *Aucune normale de la parabole ne coupe l'axe entre le foyer et le sommet.*

Si la normale d'un certain point H (P. VII, F. 12) passait entre le sommet A et le foyer F, elle ferait avec le diamètre GH de l'incidence un plus grand angle qu'avec le rayon vecteur FH, ce que ne permet pas le principe précédent.

342. *La normale du sommet d'une parabole est la seule qui passe par le foyer.*

La tangente au sommet A (P. VII, F. 12) étant perpendiculaire à l'axe AN (324), il faut que la normale du même point se confonde avec cet axe et passe par le foyer F. Elle n'en satisfait pas moins au principe 340, puisqu'elle se confond avec le rayon vecteur et le diamètre de l'incidence. Mais, si la normale de tout autre point H passait aussi par le foyer F, elle se confondrait seulement avec le rayon vecteur FH, et ne serait pas bissectrice de l'angle FHG compris entre ce rayon et le diamètre GH.

343. *Les normales de deux points symétriques d'une parabole se coupent sur l'axe, et sont égales, prises de leur concours aux incidences.*

La corde HP, qui joint deux points symétriques (P. VII, F. 12), est divisée en deux parties égales par l'axe AN (305). Cette corde forme des angles droits avec les diamètres GH, PQ (307); la symétrie rend égaux les angles FHG, FPQ; leurs moitiés GHN, QPN' sont égales (340), et par suite, l'angle IHN = IPN'. Ainsi, il y a égalité entre les triangles rectangles HIN, PIN', entre IN, IN', entre HN, PN', ce qui montre que les intersections N, N' des normales avec l'axe se confondent.

344. *Toute sous-normale* IN *d'une parabole égale le demi-paramètre* FR (P. VII, F. 12).

Si HK est la tangente de l'incidence H, le principe 329 donne la proportion IK : IH :: IH : FR. Mais, puisque le triangle KHN est rectangle en H, IK : IH :: IH : IN. Donc IN = FR.

345. *La distance* FN *du foyer au pied d'une normale* HN *de la parabole* (P. VII, F. 12) *égale le rayon vecteur* FH *de l'incidence.*

Le triangle HFN est en effet symétrique, car l'angle FNH = GHN et ce dernier vaut FHN (340).

346. *Le foyer d'une parabole est le milieu de la portion d'axe comprise entre le pied de la normale et celui de la tangente au point d'incidence.*

Puisque FN = FH (345) et que FH = FK (327), FN vaut en effet FK (P. VII, F. 12).

347. *Les normales de deux points situés sur la même moitié de la parabole sont inégales, prises du concours aux incidences.*

Si les normales EG, GH étaient de même longueur (P. VII, F. 14), elles feraient des angles égaux avec la corde EH des points d'incidence, et comme chacune coupe la tangente correspondante à angle droit, il y aurait égalité entre les angles HEI, EHI, formés sur EH par les deux tangentes. Ces droites EI, HI se couperaient donc sur la perpendiculaire au milieu de EH. Or elles se rencontrent sur le diamètre IK qui divise la corde des contacts en deux parties égales (333). Par conséquent, ce diamètre serait d'équerre sur EH, ce qui est impossible, puisque la parabole n'a qu'un seul axe AF (306).

Tracé des normales de la parabole.

348. PROBL. (*a*): *Tracer une normale de la parabole, par un point donné sur la courbe.*

Solution 1 : Menez une tangente au point donné, et en ce même point, élevez une perpendiculaire sur la tangente.

Solution 2 : Décrivez du foyer F, avec le rayon vecteur du point donné H (P. VII, F. 12), un arc qui coupe l'axe à l'opposite du sommet A, et joignez l'intersection N à l'incidence H; la droite HN sera la normale demandée (345).

Solution 3 : Abaissez, du point donné H, une perpendiculaire

HI sur l'axe; portez le demi-paramètre FR sur cet axe, de I en un point N opposé au sommet; la droite HN sera la normale cherchée (344).

Solution 4: Tracez le rayon vecteur FH et le diamètre GH du point donné, puis la bissectrice HN de l'angle FHG compris entre ces deux concourantes (340).

PROBL. (*b*) : *Tracer une normale de la parabole, par un point donné hors de la courbe, ou entre l'axe et l'un des arcs symétriques qu'il forme.*

Abaissez, du point donné E (P. VII, F. 15), une perpendiculaire sur l'axe AF; portez le demi-paramètre FG sur cet axe, du pied H de la perpendiculaire en I; élevez une perpendiculaire KL au milieu de AI; partagez HE en quatre parties égales, et du premier point de division M, menez une parallèle à l'axe. L'intersection L de cette parallèle avec KL sera le centre d'une circonférence qui, passant par A et I, coupera une seconde fois la parabole à l'incidence même N de la normale issue de E, et la droite ENO donnera la solution du problème.

Démonstration : La justification du tracé consiste à faire voir que, si l'on fait passer un cercle par le sommet A de la parabole, par l'incidence N d'une normale NO; et par un point I de l'axe, situé à une distance FG du pied H d'une ordonnée quelconque HE de la normale, la distance du centre L de ce cercle à l'axe vaut le quart de l'ordonnée.

Menons, du milieu P de la corde AN, une parallèle PR à KL ou à l'ordonnée NS de l'incidence. Le point R sera le milieu de AS, et comme K est celui de AI, KR vaudra la moitié de IS. Par conséquent,

$$\mathrm{KR} = \frac{\mathrm{HI}-\mathrm{HS}}{2} = \frac{\mathrm{FG}-\mathrm{HS}}{2}.$$

Le point P appartient au diamètre de la parabole qui divise AN en deux parties égales. Si donc on mène de G une parallèle GT à AN, PR = FT (315). Mais, la perpendiculaire PQ, élevée sur AN, forme, en passant par L, un angle QPR qui égale NAS et GTF. Les deux triangles rectangles PRQ, TFG sont donc égaux; QR = FG, et

$$\mathrm{KQ} = \mathrm{QR}-\mathrm{KR} = \mathrm{FG}-\frac{\mathrm{FG}-\mathrm{HS}}{2} = \frac{2\mathrm{FG}-\mathrm{FG}+\mathrm{HS}}{2} = \frac{\mathrm{FG}+\mathrm{HS}}{2}.$$

La similitude des triangles LKQ, ASN donne ensuite la proportion

$$\mathrm{KL} : \mathrm{AS} :: \mathrm{KQ} : \mathrm{NS}.$$

Donc

$$\mathrm{KL} = \frac{\mathrm{AS}\times\mathrm{KQ}}{\mathrm{NS}},$$

et parce que $AS = \frac{\overline{NS}^2}{2FG}$ (312),

$$KL = \frac{NS \times KQ}{2FG} = \frac{NS}{2FG} \times \frac{FG + HS}{2} = \frac{NS}{4} \times \frac{FG + HS}{FG} \ldots$$

Enfin, du parallélisme de EH, NS résulte que

$$EH : NS :: HO : SO.$$

Or $SO = FG$ (344), et $HO = SO + HS = FG + HS$. Donc

$$EH = NS \times \frac{FG + HS}{FG} = 4KL.$$

Probl. (c) : *Tracer une normale de la parabole, par un point donné sur l'axe.*

Solution 1 : Portez sur l'axe, du point donné O (P. VII, F. 15) et vers le sommet A, une longueur OS égale au demi-paramètre FG ; élevez en S une perpendiculaire sur AO ; puis, joignez O à l'un des points N, N′ où cette perpendiculaire rencontre la courbe ; la droite ON, ou la droite ON′, sera la normale demandée (344).

Solution 2 : Décrivez, du foyer F, avec la distance de ce foyer au point donné O, un arc qui coupe la courbe, et joignez O à l'une des intersections N, N′ (345).

Applications : I. La supériorité des voûtes sur les plafonds, pour résister à une charge, provient de ce que les normales d'un cintre courbe sont, excepté une, inclinées sur le plan de naissance EG (P. VII, F. 16), tandis que toutes celles d'un plan horizontal le percent d'équerre ; car il s'ensuit que chaque point d'un plafond supporte toute la charge qui s'y trouve, au lieu qu'une voûte reporte sur les piédroits EH, GI, une partie de la pression verticale exercée en chaque point K. Cette pression P se décompose effectivement en un effort normal p et un effort tangentiel p' qui va se détruire sur le lit EL du coussinet, de sorte que le premier tend seul à défoncer la voûte.

Or, les tangentes d'un arc EAG de parabole se rapprochent généralement de la verticale plus que celles d'un arc de cercle ou d'ellipse ou d'hyperbole qui couvrirait le même intervalle EG des piédroits. En conséquence, les forces détruites par la résistance de ces piédroits sont plus grandes dans la voûte parabolique que dans les autres, et celles qui tendent à l'écraser se trouvent moindres.

Ainsi, sous le rapport de la solidité, la parabole est à préférer, pour former les cintres des arcades et des berceaux surhaussés qui ont un grand poids à soutenir (325, appl. I).

II. Tout corps élastique, heurtant obliquement un obstacle, rebondit selon une nouvelle direction qui fait, avec la normale au point d'incidence, un angle égal à celui de la direction primitive. Si donc une balle de paume, une bille d'ivoire, ou tout autre corps analogue est lancé du foyer F contre un arc AHL de parabole

(P. VII, F. 12), selon un rayon vecteur FH, il s'en éloignera, après le choc, en parcourant le diamètre HG, car la normale HN est bissectrice de l'angle FHG (340).

Réciproquement, un corps élastique qui viendrait, selon GH, heurter l'arc AHL, rejaillirait en suivant HF.

III. Supposons une surface polie, cylindrique, droite, qui ait pour base l'arc horizontal de parabole PAL, et un corps en combustion placé sur la verticale du foyer F. Tous les rayons de lumière et de chaleur lancés horizontalement contre la surface se réfléchiront selon des horizontales parallèles AN, HG, PQ, etc.

Placez la même surface de manière que le plan d'une de ses sections droites PAL et l'axe AN passent par le centre du Soleil. Les rayons qu'elle recevra de l'astre, dans cette section, pouvant être regardés comme parallèles, à cause de l'immense éloignement de leur point de départ, viendront la frapper selon les droites AN, HG, PQ, etc., et par conséquent, ils se réfléchiront tous au foyer F.

IV. Une salle où l'on se réunit pour entendre un orateur doit, pour être parfaite, se composer, en plan, d'un demi-cercle et d'une portion de parabole qui ait pour foyer le centre F de la circonférence (P. VII, F. 17), et pour axe la perpendiculaire AF au milieu de la corde commune EG. On conçoit en effet que, si l'orateur, placé en F, est au niveau des auditeurs ou seulement un peu plus élevé, les particules d'air, mises en mouvement, tout autour de F, par l'organe de la voix, iront frapper les oreilles de ces auditeurs, les unes directement selon les rayons du cercle, les autres selon les parallèles de AF, après s'être réfléchies sur l'arc EAG de parabole. On entendra donc mieux que dans une salle rectangulaire, ronde, ou ovale; on entendrait même assez bien en arrière de la corde EG.

Le tracé de l'arc de parabole se fait d'ailleurs fort aisément (321); car la moitié de EF donne AF et le sommet (310); AH = AF détermine la directrice CD (318), et les points E, G appartiennent à la courbe.

COMBINAISONS DE LA PARABOLE ET DE LA CIRCONFÉRENCE.

« Il en est des combinaisons de la parabole avec la circonférence comme de celles de l'hyperbole: la plupart n'ont pas assez d'importance pour qu'on s'en occupe. Nous étudierons donc seulement le cas où le plan du cercle diffère de celui de la parabole, et le cas où les deux courbes, situées dans un plan unique, ont même courbure. »

Parabole et cercle de plans différents.

549. *Une parabole et un cercle de plans différents appartiennent à la même surface conique, quand ces plans sont perpendiculaires à celui de l'angle formé par l'axe de la première courbe sur le*

diamètre de la seconde qu'il rencontre, et que les deux extrémités de ce diamètre se trouvent sur une circonférence avec le sommet de la parabole et un autre point de l'axe dont la distance au concours égale le paramètre.

Soient A le sommet de la parabole (P. VII, F. 18), F le foyer, BC le diamètre du cercle, D le concours de ce diamètre et de l'axe AF, E un point tel que DE = 4AF (310). Si l'on peut faire passer une circonférence par les quatre points B, C, A, E, et que le cercle BC soit d'équerre sur le plan BDE, ainsi que la parabole, les deux courbes appartiendront à la surface conique qui aura pour génératrices droites extrêmes AC et la parallèle BG de DE.

Les sécantes BD, DE donnent la proportion DE : BD :: CD : AD, et par suite, la relation

$$4AF = \frac{BD \times CD}{AD}, \quad \text{puis cette autre} \quad 4\overline{AF}^2 = \frac{BD \times CD \times AF}{AD}.$$

Mais, d'une parallèle à BD menée par F résulte la proportion FH : CD :: AF : AD. Donc

$$FH = \frac{CD \times AF}{AD}, \quad \text{et} \quad 4\overline{AF}^2 = BD \times FH \quad \text{ou} \quad (2AF)^2 = GF \times FH.$$

La longueur 2AF est celle du demi-paramètre; cette droite, étant perpendiculaire à l'axe AE et se trouvant dans un plan d'équerre au plan BDE, est perpendiculaire sur ce dernier. Le demi-paramètre coupe donc GH d'équerre, et de plus il appartient au plan du cercle décrit sur GH perpendiculairement à BDE ou parallèlement au cercle BC, c'est-à-dire décrit sur la surface conique BCHG. Par conséquent, le demi-paramètre, moyen proportionnel entre les deux parties qu'il forme sur GH, est une demi-corde de la circonférence qui a cette droite pour diamètre, et le point de la parabole auquel il aboutit fait partie de la surface conique BCHG, comme le sommet A. Il en est de même évidemment de l'autre extrémité du paramètre.

Démontrons maintenant que toute autre corde I perpendiculaire à l'axe de la parabole est aussi une corde de la surface conique. En vertu du principe 311, $\overline{II'}^2 : \overline{FF'}^2 :: AI : AF$, II', FF' désignant respectivement la moitié de la corde I et celle du paramètre. Mais, si nous menons de I une parallèle à GH, AI : AF :: IL : FH. Multipliant le dernier rapport par celui de IK à FG qui est 1, on a

$$\overline{II'}^2 : \overline{FF'}^2 :: IL \times IK : FH \times FG,$$

et parce que le quarré du demi-paramètre $\overline{FF'}^2 = FH \times FG$,

$$\overline{II'}^2 = IL \times IK.$$

D'ailleurs, la corde I est dans le plan du cercle KL de la surface conique et d'équerre sur le diamètre KL de ce cercle. Donc enfin, les extrémités de la corde I appartiennent à la circonférence du même cercle, et toute la parabole se trouve sur la même surface conique que le cercle BC.

350. *Pour qu'une parabole et un cercle de plans différents appartiennent à la même surface conique, il suffit qu'un diamètre* EG *de la première courbe* (P. VII, F. 19) *concourt avec une corde* AB *de la seconde, et que deux tangentes, l'une* EC *à l'origine du diamètre, l'autre* BC *à l'extrémité de la corde la plus voisine du concours* D, *se coupent de manière à donner la proportion*

$$AD : AB :: BC : EC.$$

Les deux courbes sont effectivement alors sur la surface conique qui a pour base la circonférence, et pour deux de ses génératrices, la droite BE des contacts et une parallèle AS menée au diamètre EG, par l'autre extrémité de la corde AB.

La droite SH, tirée du sommet du cône à un point quelconque H de AB, est dans le plan ADG, comme AS, et va conséquemment percer le plan de la parabole en un point G de DE. Menons par A une tangente au cercle, puis joignons H à l'intersection I de cette tangente avec celle de B. La corde KHL aura, pour projection conique, sur le plan de la parabole, une parallèle MN à EC; car la démonstration du principe 304 peut être aisément rendue indépendante de la ligne qui unit M, E, N; le point A se projette à l'infini; EG est la projection de AB, et par conséquent, EC est celle de BC.

Faisons voir maintenant que MN forme une corde de la parabole qui a EG pour diamètre et EC pour tangente. La droite NS donne, comme transversale du triangle KMO, la relation

$$SM \cdot KL \cdot NO = SK \cdot OL \cdot MN, \quad \text{ou} \quad SM : SK :: OL \cdot MN : KL \cdot NO.$$

Les triangles semblables ABS, DBE fournissent la proportion

$$BD : AB :: BE : SB, \quad \text{ou} \quad AD : AB :: SE : SB,$$

et parce qu'on suppose que $AD : AB :: BC : EC$,

$$SE : SB :: BC : EC.$$

Or, quand le point H, s'avançant vers B, arrive à ce contact, SM devient SE, SK se confond avec SB, OL se change en BC, NO en EC, attendu que le pivot I reste fixe et que MO prend la position de sa parallèle EC. D'ailleurs, la corde KL, devenue tangente, se réduit à l'élément B du cercle. La proportion due à la transversale NS, qui est toujours vraie, quelle que soit la distance de H à B, se trouve donc convertie alors en cette autre:

$$SE : SB :: BC \times MN : B \times EC,$$

et pour que celle-ci s'accorde avec la dernière des précédentes, MN doit égaler B, c'est-à-dire que la projection conique de KL se réduit à l'élément E de la parabole, en même temps que cette corde se réduit à l'élément B du cercle.

Mais la corde M′N′ de parabole, placée sur MO, se réduirait à l'élément E en même temps que MN, car G est son milieu (322). Il faut donc que MN = M′N′ ou que les points M, N soient également écartés de M′, N′, de manière que G se trouve aussi au milieu de MN. Dans ce dernier cas, M, E, N seraient liés par une parabole qui différerait de la parabole donnée, ayant pourtant EG pour diamètre et CE pour tangente en E : la première embrasserait la seconde, par exemple. Celle-ci résulterait d'un autre cercle, tangent à BC en B, et d'un autre cône projetant dont le sommet serait en un certain point S' de SB, puisque la génératrice S'A' devrait être parallèle à EG. Ainsi, on aurait la proportion

$$S'M' : S'K' :: OL' \times M'N' : K'L' \times N'O;$$

qui, pour les tangentes, se réduirait à cette autre

$$S'E : S'B :: BC : EC,$$

et il en résulterait

$$S'E : S'B :: SE : SB,$$

puis

$$S'E - S'B : S'B :: SE - SB : SB \quad \text{ou} \quad BE : S'B :: BE : SB,$$

relation impossible.

Par conséquent, MN = M'N'; toutes les cordes du cercle qui concourent en I ont pour projections coniques des cordes de la parabole donnée; cette courbe provient de la circonférence projetée du point S, et les deux lignes appartiennent effectivement à la surface conique SALBK.

351. *Toute surface conique circulaire est coupée selon une parabole par un plan parallèle à l'une des génératrices droites.*

Lorsque le plan coupant AI (P. VII, F. 18), parallèle à la génératrice droite SK, est en même temps perpendiculaire au plan diamétral KSL qui contient cette génératrice, la section n'est pas autre chose que la projection conique d'un cercle BC sur le plan AI (300 et 301), et par conséquent elle forme une parabole.

Quelle que soit la position du plan coupant, parallèle à la génératrice droite SC (F. 20), relativement au plan diamétral CSD, son intersection avec ce plan sera toujours une parallèle AB à SC. Concevons, dans le plan coupant, une corde EG de la surface conique, qu'un point quelconque B de AB divise en deux parties égales. Le plan CBE coupera la surface selon un cercle ou selon une ellipse. Un plan HIK, parallèle à celui-là, produira un autre cercle ou une autre ellipse, dont l'intersection KK' avec le plan ABE sera parallèle à EG et divisée en deux parties égales au point I. Dans les deux cas, les demi-diamètres LM, NO, parallèles à EG, KK', donneront (46) les proportions

$$\overline{BE}^2 : BC \times BD :: \overline{LM}^2 : MC \times MD :: \overline{LM}^2 : \overline{MC}^2,$$

$$\overline{IK}^2 : IH \times IP :: \overline{ON}^2 : OH \times OP :: \overline{ON}^2 : \overline{OH}^2.$$

Mais $LM : ON :: SM : SO$, $MC : OH :: SM : SO$. Donc,

$$LM : ON :: MC : OH, \qquad \overline{LM}^2 : \overline{MC}^2 :: \overline{ON}^2 : \overline{OH}^2,$$

$$\overline{BE}^2 : BC \times BD :: \overline{IK}^2 : IH \times IP,$$

et puisque $BC = IH$,

$$\overline{BE}^2 : \overline{IK}^2 :: BD : IP :: AB : AI,$$

ce qui montre (314) que les cordes EG, KK′ de la section faite dans la surface conique par le plan ABE appartiennent à une parabole.

Parabole et cercle de même courbure.

352. *Une circonférence ne peut couper la parabole en plus de quatre points.*

D'abord, une circonférence peut couper quatre fois la parabole. Marquons deux points quelconques I, P (P. VII, F. 2), l'un sur l'arc AE, l'autre sur l'arc symétrique AE′; élevons une perpendiculaire au milieu de la corde IP; puis, d'un point pris sur cette perpendiculaire, hors de IP et à l'opposite du sommet A, décrivons un cercle qui, après avoir coupé l'axe AM, sorte aux points I, P, de l'espace infini EAE′ limité par la courbe. Ce cercle devra, pour se fermer, couper l'axe une seconde fois, et conséquemment rentrer dans les deux espaces EAM, E′AM. Il rencontrera donc de nouveau les arcs AE, AE′.

Mais, quels que soient le centre et le rayon d'une circonférence, jamais elle n'aura plus de quatre intersections avec la parabole. En effet, cette dernière courbe, ayant tous ses diamètres parallèles, peut être considérée comme une ellipse dont le centre et le second foyer sont à l'infini; car les rayons vecteurs du point E, par exemple, sont alors EF et EG, parallèle au grand axe AM, et leur somme égale cet axe, puisque EG est infiniment grand comme AM (52). Or, quelle que soit la longueur du grand axe d'une ellipse, cette courbe ne peut être coupée en plus de quatre points par un cercle (135). Donc, la parabole est dans le même cas.

353. *La parabole n'a pas de cercle osculateur pour son sommet.*

Tous les cercles tangents à la parabole en A (P. VI, F. 30) ont leurs centres sur l'axe AF, puisque la normale du sommet se confond avec cet axe (342). Or, si un de ces cercles était osculateur, il couperait la courbe à son contact A et en un second point M, par exemple (16); il devrait donc la couper aussi au point M′, symétrique de M, ce qui le rangerait parmi les cercles à cinq intersections dont l'existence est impossible (352).

354. *Le rayon de courbure pour le sommet d'une parabole égale le demi-paramètre.*

Le cercle à contact de seconde espèce dont la courbure est la même que celle d'une parabole au sommet (16), a son centre sur l'axe AF (P. VII, F. 11), puisque la normale en A se confond avec cet axe (342). Mais, les normales des extrémités de l'élément A de la parabole sont aussi normales du même cercle. Le centre se trouve donc à l'intersection U de ces normales avec l'axe (341), et sa distance au foyer vaut le rayon vecteur de chaque extrémité de l'élément A (345). Or, ce rayon vecteur diffère infiniment peu de AF. Par conséquent, FU = FA, AU = 2AF, et le rayon de courbure AU a effectivement la longueur du demi-paramètre FK (310).

PROBLÈME : *Trouver le centre et le rayon de courbure du sommet d'une parabole.*

Décrivez du foyer F, avec sa distance au sommet A (P. VII, F. 11), un arc qui coupe l'axe à l'opposite de ce sommet. L'intersection U et la droite AU seront respectivement le centre et le rayon de courbure demandés.

355. *Un cercle ne peut toucher la parabole en deux points situés du même côté de l'axe.*

Les normales de deux contacts situés du même côté de l'axe devraient concourir au centre du cercle et avoir même longueur. Or cette seconde condition ne saurait être remplie (347).

356. *Tout cercle deux fois tangent à la parabole la touche en des points symétriques.*

Les deux tangentes communes, appartenant à la parabole, concourent sur le diamètre qui divise en deux parties égales la corde des contacts (333); considérées relativement au cercle, elles se rencontrent sur la perpendiculaire au milieu de la même corde. Cette perpendiculaire se confond donc avec un diamètre de la parabole. Or, le seul diamètre qui puisse couper une corde d'équerre et au milieu est l'axe (306); par conséquent, les deux contacts sont à la même distance de cet axe.

357. *Si deux cercles* E, G (P. VII, F. 21), *ayant en commun une corde* HI *de parabole, coupent la courbe en d'autres points, ces intersections limitent des arcs dont les cordes* KL, MN *sont parallèles, et font avec l'axe des angles égaux à celui de la corde commune.*

Rapprochons le centre E de la corde HI, en le maintenant sur la perpendiculaire EO au milieu de cette corde. Nous finirons par avoir un cercle E′ qui, passant toujours par les points H, I, touchera en P l'arc AKMNL de la parabole, et aucun autre cercle ne pourra se trouver dans les mêmes circonstances; car si E′ s'éloigne ou se rapproche de O, le rayon E′H augmente ou diminue, tandis que évidemment la normale E′P diminue ou augmente. Or le cercle E′, tangent en P, fait partie de la série des cercles qui, ayant en commun la corde HI, coupent la parabole en deux autres points : il est celui qui a le simple élément P pour seconde corde commune avec la courbe. On peut donc le regarder comme provenant du cercle E, dont les intersections K, L se sont rapprochées, pendant le cheminement de E vers E′, et ont fini par se confondre en P.

Tirons le diamètre PQ de la parabole, et par K, une corde que ce diamètre partage en deux parties égales. Elle coupera la courbe en un point L′, et la circonférence E en un point L″. Si KL′ prend part au mouvement de K vers le contact, sans cesser d'avoir son milieu sur PQ, les trois points K, L, L′, suivant la parabole, arriveront en P au même instant, et L″ n'y sera pas encore, car trois points du cercle E ne peuvent se réunir sur l'arc AML (352). Cependant, L″, moins éloigné de K circulairement que L, devrait se confondre avec le premier point avant le second.

Dans le cas où KL se trouverait entre KL′ et P, on mènerait de L une autre corde que le diamètre PQ divisât en deux parties égales; celle-là, passant entre LK et P, rencontrerait la circonférence E en un point K″ qui arriverait en P après K, au lieu d'y arriver auparavant. Il est donc impossible d'admettre qu'une corde de parabole, tirée de K ou de L, et coupée au milieu par PQ, puisse différer de KL. Ainsi, cette corde KL est une de celles que le diamètre issu de P divise en deux parties égales, et comme les mêmes raisonnements montreraient que MN en est une autre, KL et MN sont effectivement parallèles (5).

Le cercle tangent en P devient aussi tangent au point symétrique P′, si l'on place le centre à la rencontre de l'axe et de la normale E′P (356). Or, cette nouvelle tangence peut être considérée comme provenant du rapprochement et de la confusion des intersections H, I. On ferait donc voir, par les considérations employées tout à l'heure, que le contact P′ est l'extrémité du diamètre qui passe au milieu O de HI. Il en résulte que les tangentes aux points P, P′ de la parabole sont respectivement parallèles aux cordes KL, HI (322), et comme ces tangentes font des angles égaux avec l'axe (331), il en est de même des cordes communes à la courbe et aux cercles.

358. *Tous les cercles tangents au même point d'une parabole, et sécants en outre, interceptent sur cette courbe des arcs dont les cordes sont parallèles.*

Les cercles tangents au même point ont en commun une corde élémentaire de la parabole, et par conséquent (357), les cordes qui joignent les intersections, dans chaque cercle, se trouvent nécessairement parallèles.

On pourrait dire aussi que le principe, ayant été démontré pour l'ellipse (142), doit être étendu à la parabole qui n'est qu'une ellipse dont les axes sont infiniment grands (352). Il serait possible encore de donner une démonstration analogue à celle du principe 142 ou à celle du n° 282.

PROBLÈME : *Déterminer le centre et le rayon de courbure d'un point quelconque de la parabole, autre que le sommet.*

Solution 1 : Tracez la normale du point donné E (P. VII, F. 22) et décrivez, d'un point quelconque G de cette droite, un cercle dont le rayon soit GE. S'il n'a qu'un autre point commun avec la parabole, il sera le cercle osculateur de cette courbe pour le point E (16); car, ayant même tangente en E, il l'y touchera, et de plus il l'y coupera, puisque, entré dans l'espace parabolique par l'unique intersection simple, il doit, pour se fermer, en sortir par le second des deux seuls points qu'il ait sur la parabole.

Lorsque le cercle G coupe la courbe en deux points H, I, après l'avoir touchée en E, il faut tirer, par le contact, une corde EK de la parabole qui soit parallèle à HI; puis élever au milieu de cette corde une perpendiculaire, pour couper la normale EG. L'intersection L et la droite EL sont respectivement le centre et le rayon de courbure, attendu que le cercle décrit de L, avec EL pour rayon, serait osculateur en E, touchant la parabole en ce point, et la coupant au contact comme au point K, d'après le principe 358.

Il peut arriver que l'intersection K soit fort éloignée de E. Dans ce cas, on se dispense d'étendre la courbe, en marquant le milieu M de EK au moyen d'une parallèle à l'axe menée par le milieu N de HI. Cette parallèle, étant un diamètre (307), doit effectivement diviser KE comme elle divise HI.

Solution 2: Après avoir tracé la normale du point donné E, abaissez, du même point, une perpendiculaire sur l'axe, pour déterminer le point E′ symétrique de E; menez par E′ une tangente à la parabole, par E une corde EK parallèle à cette tangente E′N, et achevez comme dans la première solution.

S'il arrivait que K dût se trouver fort éloigné de E, vous marqueriez le milieu M de EK en tirant E′M, parallèle de l'axe A(B).

Démonstration : La tangente E′N, étant le prolongement de l'élément E′, se trouve parallèle aux cordes des arcs qui, tangents en E, coupent la parabole deux fois (358). Elle détermine donc, aussi bien qu'une HI de ces cordes, la direction de la corde EK du cercle osculateur.

En second lieu, E′M coupe au milieu, comme diamètre, toute corde EK tirée, dans la parabole, parallèlement à la tangente E′N de l'origine (322).

MESURAGES DE LA PARABOLE.

359. *La parabole n'est pas rectifiable.*

Il est impossible d'assigner une ligne droite qui ait même longueur que la parabole entière, puisque cette courbe s'étend à l'infini, et l'on ne connaît point de longueur linéaire dont l'exact rapport à l'arc parabolique puisse être exprimé en nombre entier ou fractionnaire.

PROBLÈME : *Mesurer la longueur d'un arc de parabole.*
Employez un des moyens du n° 21.

360. *Tout segment parabolique limité par une portion d'axe et*

l'ordonnée correspondante est les deux tiers du rectangle formé sur ces droites. »

Partageons l'ordonnée EG (P. VII, F. 23) en un fort grand nombre n de parties égales; tirons, par les points de division, des parallèles à l'axe AG, et par les origines de ces diamètres, des parallèles à EG. Le segment AGE se trouvera divisé en rectangles, et en triangles mixtilignes rectangles, dont les hypothénuses courbes pourront être regardées comme droites.

Soient y chaque partie de EG, h la longueur de cette ordonnée, b celle de AG, et x, x', x'', x''', ..., les parties de cette abscisse. Il est visible que

$$\text{Le triangle.. AHI} = \frac{xy}{2};$$

$$\text{Le trapèze... HIKL} = x'y + \frac{x'y}{2} = \frac{3}{2}x'y;$$

$$\text{Le trapèze... KLMN} = x'' \times 2y + \frac{x''y}{2} = \frac{5}{2}x''y;$$

$$\text{Le trapèze... MNEG} = x''' \times 3y + \frac{x'''y}{2} = \frac{7}{2}x'''y.$$

Mais (312), si nous représentons par p le paramètre de la parabole, $x = \frac{y^2}{p}$; $x + x' = \frac{4y^2}{p}$ et $x' = \frac{3y^2}{p}$; $x + x' + x'' = \frac{9y^2}{p}$ et $x'' = \frac{5y^2}{p}$; $x + x' + x'' + x''' = \frac{16y^2}{p}$ et $x''' = \frac{7y^2}{p}$. En conséquence,

$$\text{AHI} = \frac{y^3}{2p}, \quad \text{HIKL} = \frac{9y^3}{2p}, \quad \text{KLMN} = \frac{25y^3}{2p}, \quad \text{MNEG} = \frac{49y^3}{2p},$$

et la somme des n parties du segment parabolique, ou le segment tout entier,

$$\text{AGE} = \frac{y^3}{2p}[(1)^2 + (3)^2 + (5)^2 + (7)^2 \ldots\ldots + (2n-1)^2].$$

Il ne s'agit plus que de chercher la somme des quarrés des n termes d'une progression par différence

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \quad \ldots\ldots \quad a+(n-1)d.$$

Ces quarrés sont

$$a^2, \quad a^2+2ad+d^2, \quad a^2+4ad+4d^2, \quad a^2+6ad+9d^2, \quad \ldots\ldots \quad a^2+2(n-1)ad+(n-1)^2d^2.$$

Leur somme se compose des trois quantités suivantes*:

---

* Voyez notre *Géométrie appliquée*, troisième édition, p. 476.

na^2,

$$ad[2+4+6\ldots\ldots+2(n-1)] = ad\left([2+2(n-1)]\frac{n-1}{2}\right) = ad(n^2-n),$$

$$d^2[(1)^2+(2)^2+(3)^2\ldots\ldots+(n-1)^2] = d^2\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}\times\frac{2(n-1)+1}{3}$$

$$= d^2\frac{n^2-2n+1+n-1}{2}\times\frac{2n-2+1}{3} = d^2\frac{n^2-n}{2}\times\frac{2n-1}{3}$$

$$= d^2\frac{2n^3-2n^2-n^2+n}{6} = d^2\frac{2n^3-3n^2+n}{6}.$$

Mais, pour la valeur du segment parabolique, $a=1$ et $d=2$. Par conséquent,

$$\text{AGE} = \frac{y^3}{2p}\left(n+2(n^2-n)+4\frac{2n^3-3n^2+n}{6}\right)$$

$$= \frac{y^3}{2p}\left(n+2n^2-2n+\frac{4n^3-6n^2+2n}{3}\right)$$

$$= \frac{y^3}{p}\times\frac{3n+6n^2-6n+4n^3-6n^2+2n}{6} = \frac{y^3}{p}\times\frac{4n^3-n}{6};$$

et comme $y=\frac{h}{n}$ donne $y^3=\frac{h^3}{n^3}$,

$$\text{AGE} = \frac{h^3}{p}\times\frac{4n^3-n}{6n^3} = \frac{h^3}{p}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6n^2}\right).$$

La fraction $\frac{1}{6n^2}$ est infiniment petite, car n peut être supposé infiniment grand. On doit donc la négliger et poser

$$\text{AGE} = \frac{2h^3}{3p} = \frac{2h}{3}\times\frac{h^2}{p}.$$

Or (312), $\frac{h^2}{p} = \text{AG} = b$; par conséquent enfin,

$$\text{AGE} = \frac{2}{3}bh = \frac{2}{3}\text{AGEO}.$$

On aurait aussi

$$\text{AGP} = \frac{2}{3}\text{AGPQ}.$$

Ainsi,

$$\text{AGE}+\text{AGP} = \text{EAPE} = \frac{2}{3}\text{AGEO}+\frac{2}{3}\text{AGPQ} = \frac{2}{3}\text{EPQO},$$

ce qui signifie que *le segment parabolique limité par une corde d'équerre sur l'axe, est les deux tiers du rectangle formé avec cette corde et la portion d'axe interceptée.*

361. *Tout segment parabolique limité par une portion* AM *de l'axe* (P. VII, F. 23) *et une portion* KM *d'une corde oblique sur cet axe, vaut le sixième du rectangle formé avec l'abscisse* AL *et l'ordonnée* KL *de l'extrémité de l'arc, plus la moitié du rectangle formé avec la même ordonnée et la portion d'axe.*

Le segment AMK se compose du triangle rectangle KLM et du segment AKL. Cette seconde partie, d'après le principe précédent, vaut $\frac{2}{3}\mathrm{AL}\times\mathrm{KL}$. Ainsi,

$$\mathrm{AMK}=\frac{\mathrm{LM}\times\mathrm{KL}}{2}+\frac{2\mathrm{AL}\times\mathrm{KL}}{3}=\frac{3\mathrm{LM}\times\mathrm{KL}+4\mathrm{AL}\times\mathrm{KL}}{6}$$

$$=\frac{3(\mathrm{LM}+\mathrm{AL})\mathrm{KL}}{6}+\frac{\mathrm{AL}\times\mathrm{KL}}{6}=\frac{\mathrm{AM}\times\mathrm{KL}}{2}+\frac{\mathrm{AL}\times\mathrm{KL}}{6}.$$

On verrait d'une manière analogue que

$$\mathrm{AMR}=\frac{\mathrm{AM}\times\mathrm{RS}}{2}+\frac{\mathrm{AS}\times\mathrm{RS}}{6}.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{KARK}=\frac{\mathrm{AM}(\mathrm{KL}+\mathrm{RS})}{2}+\frac{\mathrm{AL}\times\mathrm{KL}}{6}+\frac{\mathrm{AS}\times\mathrm{RS}}{6},$$

c'est-à-dire que *le segment parabolique limité par une corde* KR, *oblique à l'axe, vaut la moitié du rectangle formé avec la portion d'axe interceptée et la somme des deux ordonnées extrêmes, plus le sixième des rectangles formés avec chacune de ces ordonnées et l'abcisse correspondante.*

362. *Tout segment parabolique limité par une portion* A'G *de diamètre* (P. VII, F. 24) *et la demi-corde correspondante* EG, *est les deux tiers du parallélogramme formé sur ces droites.*

Abaissons de E la perpendiculaire ER sur le diamètre A'G; partageons-la en un très-grand nombre n de parties égales; tirons, par les points de division, des parallèles à A'G, et par les origines de ces autres diamètres, des parallèles à EG. Le segment A'GE se trouvera divisé en parallélogrammes et en triangles mixtilignes dont les côtés courbes pourront être regardés comme droits.

Soient y chaque partie de ER, h la longueur totale de cette droite, b celle de A'G, et x, x', x'', x''', ..., les parties de diamètres interceptées par les parallèles de EG. En invoquant le principe 313, nous trouverons, comme dans le n° 360,

$$\mathrm{A'GE}=\frac{y^3}{2p}[(1)^2+(3)^2+(5)^2+(7)^2\ldots\ldots+(2n-1)^2]=\frac{2h^3}{3p},$$

et parce que $\frac{h^2}{p}=\mathrm{A'G}=b$,

$$\mathrm{A'GE}=\frac{2}{3}bh=\frac{2}{3}\mathrm{A'GEO}.$$

Nous aurions aussi

$$A'GP = \frac{2}{3} A'GPQ.$$

Conséquemment,

$$EA'PE = \frac{2}{3} EPQO,$$

ce qui démontre que *le segment parabolique limité par une corde oblique à l'axe, est les deux tiers du parallélogramme formé avec cette corde, des parallèles au diamètre tiré du milieu, et la tangente à l'origine de ce diamètre* (322).

563. *Tout segment parabolique limité par une portion* A'G *de diamètre* (P. VII, F. 24) *et la demi-corde correspondante* EG, *vaut les quatre tiers du triangle que forme, avec ces droites, la corde* A'E *de l'arc intercepté.*

Le segment A'GEK $= \frac{2}{3}$ A'GEO, et le parallélogramme A'GEO est double du triangle A'EG qu'en retranche sa diagonale. Par conséquent,

$$A'GEK = \frac{2}{3} \times 2A'EG = \frac{4}{3} A'EG.$$

Comme on a aussi

$$A'GPS = \frac{4}{3} A'GP;$$

il est clair que

$$A'GEK + A'GPS = EKA'SPE = \frac{4}{3}(A'EG + A'GP) = \frac{4}{3} EA'P.$$

Ainsi, *tout segment parabolique limité par une corde oblique à l'axe, vaut les quatre tiers du triangle que forme cette corde avec celles qui joignent ses extrémités à l'origine du diamètre tiré de son milieu.*

564. *L'espace compris entre un arc de parabole et les tangentes de ses extrémités est le tiers du triangle que forment ces tangentes avec la corde des contacts.*

L'espace dont il s'agit est l'excès du triangle ETP sur le segment parabolique que limite la corde EP des contacts (P. VII, F. 24); ainsi

$$EA'PTE = ETP - EKA'SPE.$$

Or (363) EKA'SPE $= \frac{4}{3}$ EA'P; EA'P $= \frac{1}{2}$ ETP, puisque ces triangles ont même base EP et que la hauteur du premier est la moitié de celle du second, comme A'G est la moitié de TG (334). Par conséquent,

$$EA'PTE = ETP - \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} ETP = \left(1 - \frac{2}{3}\right) ETP = \frac{1}{3} ETP.$$

PROBL. (*a*) : *Mesurer un segment parabolique limité par une portion d'axe et la demi-corde correspondante.*

Mesurez, en mètres, la portion d'axe AG (P. VII, F. 23) et la demi-corde EG. Les deux tiers du produit des longueurs obtenues donneront, en mètres carrés, la superficie du segment EKAG (360).

PROBL. (*b*) : *Mesurer un segment parabolique limité par une corde d'équerre sur l'axe.*

Mesurez, en mètres, la corde EP (P. VII, F. 23) et la portion d'axe AG qu'elle intercepte. Les deux tiers du produit des longueurs obtenues donneront, en mètres carrés, la superficie du segment EKAP (360).

PROBL. (*c*) : *Mesurer un segment parabolique que limite une portion d'axe et une portion d'une corde oblique sur cet axe.*

Du point K, commun à la courbe et à la portion de corde KM (P. VII, F. 23), abaissez une perpendiculaire KL sur l'axe; mesurez, en mètres, AL, LM, KL; prenez le sixième du produit fait avec la première longueur et la troisième, puis la moitié du produit fait avec cette troisième et la somme des deux autres. L'addition des deux résultats vous donnera, en mètres carrés, la superficie du segment AMK (361).

PROBL. (*d*) : *Mesurer un segment parabolique limité par une corde oblique sur l'axe.*

Solution 1 : Abaissez, de chaque extrémité de la corde KR (P. VII, F. 23), une perpendiculaire sur l'axe; mesurez, en mètres par exemple, les longueurs AL, LM, MS, KL et RS; prenez le sixième du produit de la première et de la quatrième, le sixième du produit fait avec la somme des trois premières et la cinquième, la moitié du produit de la somme des deux premières par la somme des deux dernières; puis additionnez les trois résultats; leur total sera, en mètres carrés, la superficie du segment KAR (361).

Solution 2 : Tracez le diamètre A'G (F. 24) qui divise en deux parties égales la corde donnée EP; abaissez, d'une extrémité de EP, une perpendiculaire ER sur A'G; mesurez, en mètres, les longueurs A'G, ER; les deux tiers du produit fait avec la première et le double de la seconde donneront, en mètres carrés, la superficie du segment EKA'SP (362).

Solution 3 : Tracez le diamètre A'G qui divise en deux parties égales la corde donnée EP; abaissez de l'origine une perpendiculaire A'U sur EP; mesurez, en mètres, ces deux longueurs; les deux tiers de leur produit sera, en mètres carrés, la superficie du segment EKA'SP (362 ou 363).

PROBL. (*e*) : *Mesurer un segment parabolique limité par une portion de diamètre et la demi-corde correspondante.*

Solution 1 : Abaissez, de l'extrémité de la demi-corde EG (P. VII,

F. 24), une perpendiculaire ER sur le diamètre donné A'G; mesurez, en mètres, ces deux longueurs; les deux tiers de leur produit sera, en mètres carrés, la superficie du segment EKA'G (362 ou 363).

Solution 2: Abaissez, de l'origine du diamètre, une perpendiculaire A'U sur la demi-corde EG; mesurez, en mètres, ces deux longueurs; les deux tiers de leur produit seront, en mètres carrés, la superficie du segment EKA'G (362 ou 363).

Solution 3: Joignez l'origine A' du diamètre à l'extrémité E de la demi-corde; mesurez la superficie du segment parabolique A'KEA', et ajoutez-y celle du triangle A'GE.

Probl. (*f*): *Mesurer un segment parabolique* EGHI (P. VII, F. 25), *limité par deux cordes quelconques* EG, HI.

Mesurez la superficie du segment HKI, que limite la plus grande corde, et retranchez-en celle du segment EKG, que limite la plus petite corde.

Probl. (*g*): *Mesurer un polygone mixtiligne* EKGLMN (P. VII, F. 25), *formé par des droites quelconques et un arc* EKG *de parabole, concave à l'intérieur.*

Mesurez la superficie du segment parabolique EGKE, que limite la corde de l'arc, et ajoutez-y celle du polygone rectiligne EGLMN.

Probl. (*h*): *Mesurer l'espace* ETPSA'KE (P. VII, F. 24), *compris entre un arc* EKA'SP *de parabole et les tangentes* TE, TP *des extrémités de cet arc.*

Mesurez la superficie du triangle ETP, formé par les tangentes et la corde de leurs contacts; puis, prenez-en le tiers (364).

Probl. (*i*): *Mesurer un polygone mixtiligne* EKGHOPQE (P. VII, F. 25), *formé par des droites quelconques et un arc* EKGH *de parabole, convexe à l'intérieur.*

Tracez les tangentes ER, HR des extrémités de l'arc; mesurez la superficie de l'espace EKGHRE, que limitent ces trois lignes; retranchez-en les parties rectilignes RST, etc. qui se trouvent hors du polygone mixtiligne donné, et ajoutez au reste les parties rectilignes EQS, TPOH, etc. de ce polygone, situées hors de l'angle des tangentes.

PARABOLOÏDE.

365. On appelle *paraboloïde de révolution*, ou simplement *paraboloïde*, le corps indéfini que renferme la surface courbe due à la révolution d'une demi-parabole autour de son axe.

Les plans méridiens d'un paraboloïde coupent sa surface selon des paraboles égales à la génératrice.

Les plans méridiens sont ceux qui contiennent l'axe de révolution. Chacune des positions que prend la parabole génératrice, pendant son mouvement circulaire, constitue donc un plan méridien, et cette courbe, se trouvant à la fois sur le plan et sur la surface paraboloïdale, forme nécessairement leur intersection.

366. *Le paraboloïde a pour axe, pour pôle et pour foyer, l'axe, le sommet et le foyer de la parabole génératrice.*

En premier lieu, l'axe de révolution coupe d'équerre les cordes de toutes les paraboles génératrices qu'il divise en deux parties égales, et ces cordes appartiennent aussi au paraboloïde (5).

Il suit de là que *les plans méridiens d'un paraboloïde sont des plans de symétrie.*

En second lieu, le pôle et le foyer d'un paraboloïde sont évidemment les points dans lesquels se confondent les sommets et les foyers de toutes les paraboles méridiennes.

367. *Tout plan sécant perpendiculaire à l'axe d'un paraboloïde coupe la surface selon une circonférence.*

Concevons des cordes de la surface paraboloïdale tirées par le point où l'axe perce le plan et perpendiculairement à cet axe; elles auront toutes la même longueur, comme cordes correspondantes des paraboles méridiennes (365); toutes aussi seront divisées par l'axe en deux parties égales (366). Or, ces cordes, se trouvant dans le plan coupant, appartiennent à la section. Par conséquent, cette section est une circonférence qui a pour centre la trace de l'axe sur le plan.

On peut dire aussi que les divers points de la parabole génératrice décrivent autour de l'axe des cercles dont les plans sont perpendiculaires à cette droite, et qu'en conséquence, tout plan d'équerre sur l'axe du paraboloïde doit contenir un de ces cercles.

PROBLÈME : *Déterminer le pôle d'une calotte de paraboloïde limitée par un cercle.*

De deux points E, G de la circonférence limite (P. VIII, F. 1), décrivez sur la surface paraboloïdale, avec le même rayon, deux arcs qui se coupent en un point N, et avec un autre rayon, deux arcs qui se coupent en un point O; puis unissez N à O par un arc tracé au moyen d'une règle flexible. Répétez les mêmes opérations aux extrémités d'une seconde corde du cercle limite, prise à peu près d'équerre sur EG. Vous obtiendrez un nouvel arc N'O' qui coupera NO précisément au pôle P.

Démonstration : Les points N, O, étant chacun à la même distance des extrémités de la corde EG, appartiennent au plan de symétrie qui coupe cette corde d'équerre et par le milieu. L'arc NO fait donc partie d'une parabole méridienne (365 et 366). Il en est de même de l'arc N'O', et par conséquent, l'intersection des deux arcs se fait au pôle du paraboloïde.

368. *Tout plan sécant oblique à l'axe d'un paraboloïde coupe la surface selon une ellipse.*

Supposons vertical l'axe A(B) du corps (P. VIII, F. 2), et prenons, pour plan de projection, le plan méridien vertical qui contient une ligne de plus grande pente du plan sécant incliné. Ce plan, alors perpendiculaire au plan de projection, s'y projettera tout entier selon une droite EG; les cercles horizontaux du paraboloïde seront projetés sur les droites HI, KL, etc., perpendiculaires à A(B); les croisements M, N, etc., formeront les projections verticales de demi-cordes communes aux cercles et à la section du plan EG, demi-cordes qui se trouveront évidemment d'équerre sur les diamètres HI, KL, etc., et sur la droite EG. En conséquence, la coupe due au plan sécant est une ellipse qui a EG pour grand axe (47), si $M^2 : N^2 :: ME \times MG : NE \times NG$.

Or, puisque M, N sont demi-cordes de cercle, perpendiculaires aux diamètres,

$$M^2 : N^2 :: MH \times MI : NK \times NL,$$

et parce que HI, KL, cordes d'une parabole méridienne, perpendiculaires à l'axe, forment les projections coniques de cordes qui leur sont parallèles, dans le cercle projeté sur la courbe (303),

$$MH \times MI : NK \times NL :: ME \times MG : NE \times NG \quad (292).$$

369. *Tout plan sécant* E′(G), *parallèle à l'axe* A(B) *d'un paraboloïde, coupe la surface selon une parabole* (P. VIII, F. 2).

Avec une préparation analogue à celle du numéro précédent, nous verrons que la section du plan E′(G) est une parabole (311), si $M^2 : N'^2 :: ME' : N'E'$. Mais M(G), N′(G), étant des longueurs infiniment grandes, sont égales, et la proportion à démontrer peut être changée en cette autre :

$$M^2 : N'^2 :: ME' \times M(G) : N'E' \times N'(G).$$

Imitant ce qui a été fait dans le n° 292, nous arriverons aisément à la relation

$$MH \times MI : N'K \times N'L :: ME' \times M(G) : N'E' \times N'(G);$$

puis, en vertu de ce que $M^2 : N'^2 :: MH \times MI : N'K \times N'L$, nous trouverons qu'en effet

$$M^2 : N'^2 :: ME' \times M'(G) : N'E' \times N'(G)$$

ou que

$$M^2 : N'^2 :: ME' : N'E'.$$

Problème : *Tracer l'arc de parabole propre à engendrer une calotte de paraboloïde donnée et terminée par une circonférence.*

Agissez comme dans le problème de la page 182.

Applications : I. Il résulte du principe 367 que le paraboloïde peut être façonné sur le tour. Si un modèle est donné, on trace, sur une planche, le demi-arc de parabole dont la révolution peut l'engendrer, et l'on enlève le bois qui se trouve entre la courbe A'L'I'O et son axe A'P' (P. VIII, F. 2), pour former le *gabarit* ou guide de l'outil. Mais il faut auparavant mesurer avec soin la distance O'P' et la noter. Le bloc à tourner est ensuite placé entre les pointes horizontales A, P du tour; le gabarit s'établit dans le plan horizontal de ces pointes, à une petite distance du bloc, de manière que $O'P = O'P' + AA'$, et il ne s'agit plus que de faire cheminer l'outil de A' vers O', en l'appuyant sur le gabarit, parallèlement à AA', pendant que le tour fait pivoter le bloc. Quand, dans chacune de ses positions, cet outil a enlevé assez de matière pour déborder l'arc A'L'I'O' d'une longueur LL', ou II', ou OO', égale à AA', sa pointe trace sur le bloc une circonférence KL, ou HI, ou GO qui appartient au paraboloïde qu'engendrerait l'arc de parabole ALIO. Cet arc est effectivement parabolique, car il serait couvert tout entier par celui du gabarit, si l'axe A'P' de ce dernier prenait la position AP.

II. Le meilleur réflecteur qu'on puisse employer pour concentrer les rayons solaires, et en général des rayons de lumière ou de chaleur a peu près parallèles, est une calotte de paraboloïde; car il est clair, d'après l'application III de la page 232, que ces rayons doivent, dans chaque parabole méridienne, se réfléchir vers le foyer de la surface courbe (366).

Pour produire un pareil réflecteur, il faut emboutir une feuille métallique, au moyen d'un paraboloïde en bois, façonné sur le tour, ou d'une cherche (appl. I, p. 183) qui soit un segment de parabole au milieu de l'arc duquel se trouve le sommet de la courbe.

III. Une personne placée au foyer d'un miroir ellipsoïdal, aurait son image à l'autre foyer de l'ellipsoïde complet (appl., p. 123); placée au foyer d'un miroir hyperboloïdal, elle verrait son image derrière ce miroir, autour du foyer de l'autre nappe (appl. I, p. 183); mais, placée au foyer d'un miroir paraboloïdal, elle ne produirait aucune image, puisque les rayons émanés de chacun de ses points, ne concourant pas après s'être réfléchis, ne pourraient rien peindre sur le fond de l'œil, ni sur un écran.

IV. Les réflecteurs des lanternes destinées à l'éclairage des corridors, des galeries étroites et des rues, doivent être aussi des calottes de paraboloïde. On leur donne un axe un peu grand, pour en augmenter la puissance de réflexion, et comme le bec de lumière est placé au foyer, toujours assez voisin du sommet, il faut qu'une ouverture pratiquée dans la partie supérieure de la calotte, donne passage à la cheminée de verre ou à la fumée.

De pareils réflecteurs n'empêchent point la lumière directe de frapper les deux murs de la galerie ou de la rue, et celle qu'ils reçoivent est renvoyée au loin, en faisceau de rayons parallèles; il n'y a aucune perte, si l'axe du paraboloïde est incliné de manière à rencontrer le sol à peu près au milieu de l'intervalle de deux reverbères consécutifs.

V. Quelques-uns des phares élevés sur les bords de la mer, pour signaler, pendant la nuit, les abords dangereux, ont des réflecteurs paraboloïdes, afin que leurs feux soient aperçus de plus loin. Les rayons réfléchis, formant alors un cylindre, donnent en effet une lumière beaucoup plus intense qu'elle ne le serait, renvoyée par un réflecteur qui l'éparpillât sur un grand espace. Il en résulte, à la vérité, que le phare est seulement vu de ceux qui traversent le faisceau cylindrique; mais, comme la lampe et le réflecteur ont un mouvement de révolution autour d'un axe vertical, tous les points de l'horizon sont successivement frappés d'une vive lumière. Les apparitions et les disparitions d'un phare sont d'ailleurs nécessaires, pour que les navigateurs ne puissent jamais le confondre avec des feux accidentellement allumés sur la côte; elles servent encore à faire distinguer les divers phares d'un même pays, car on donne des durées différentes à leurs révolutions, et un livre, à l'usage des marins, indique le nombre de secondes pendant lequel chaque phare cesse d'être visible.

VI. Les sons de la parole deviennent distincts pour une oreille très-endurcie, quand ils lui sont transmis par un cornet façonné en paraboloïde de révolution. La parabole génératrice doit, dans ce cas, s'éloigner peu de son axe; en d'autres termes, il faut mettre le foyer à une très-petite distance du sommet. C'est par ce point qu'on fait une section perpendiculaire à l'axe, pour former l'orifice qui s'applique contre l'oreille. Comme le son produit à l'autre orifice imprime aux particules de l'air renfermées dans l'instrument, des mouvements à peu près parallèles, celles qui frappent les parois sont réfléchies vers le foyer, et entrant dans le conduit auditif, avec celles qui s'y rendent directement, elles contribuent à produire sur le tympan un choc assez fort pour faire percevoir les paroles.

VII. Enfin, les porte-voix ont besoin intérieurement de la forme paraboloïdale; mais elle ne suffit pas: pour qu'il n'y ait aucune divergence nuisible entre les directions des mouvements qu'imprime la bouche aux particules de l'air, il faut que le paraboloïde ABCDE (P. VIII, F. 3) soit précédé d'un ellipsoïde BEGH qui ait l'un de ses foyers au foyer F des paraboles méridiennes, et l'autre au centre F′ de l'embouchure GH. Par suite d'une telle disposition, effectivement, presque tous les sons formés en F′ vont se réfléchir sur l'ellipsoïde, passent par le foyer commun F, s'y croisent pour aller frapper la surface paraboloïdale, puis se réfléchissent de nouveau, mais parallèlement à l'axe du porte-voix, ce qui fait que les paroles sont transmises à une fort grande distance.

Si l'on employait le paraboloïde seul, les sons, formés en F, qui n'en frapperaient point la surface, s'écarteraient beaucoup des sons réfléchis et sortiraient en cône CFD. L'auditeur, placé sur le prolongement de l'axe, perdrait donc tous ceux qui, avant d'arriver à sa hauteur, croiseraient les génératrices du cylindre CDIK.

Mesurages du paraboloïde.

370. *Pour avoir la surface courbe d'une calotte de paraboloïde que termine un cercle, il faut diviser, par le sextuple du paramètre de la parabole génératrice, le volume d'un cylindre circulaire dont la hauteur et le rayon égalent chacun l'hypothénuse du triangle rectangle construit avec le paramètre et le diamètre du cercle limite, puis retrancher du quotient le sixième de la superficie d'un cercle qui ait le paramètre pour rayon.*

Soit la calotte de paraboloïde EPG (P. VIII, F. 1), terminée par un cercle EG. L'axe PH est perpendiculaire au plan de ce cercle (367), et par suite au milieu du diamètre EG, contenu dans le plan de la parabole génératrice EPG. Partageons le rayon EH en un très-grand nombre n de parties égales d; menons, par les points de division, des parallèles à l'axe PH de la parabole; abaissons, des origines I, K, L de ces diamètres, des perpendiculaires sur PH; désignons respectivement par y, y', y'', y''', les ordonnées EH, IM, KN, LO, et par x, x', x'', x''', les abscisses correspondantes PH, PM, PN, PO. Les arcs EI, IK, KL, LP pourront être regardés comme des droites, et les segments de paraboloïde EGQI, IQRK, KRSL, LSP, comme des troncs de cône.

La surface courbe du premier tronc vaut

$$\frac{2\pi y + 2\pi y'}{2} \times \mathrm{EI} = (\pi y + \pi y')\mathrm{EI}.$$

Or $\mathrm{IM} = \mathrm{HT} = \mathrm{EH} - \mathrm{ET}$ ou $y' = y - d$; le triangle rectangle ETI donne

$$\mathrm{EI} = \sqrt{(x-x')^2 + d^2},$$

et le principe 312,

$$y'^2 = px' \quad \text{ou} \quad (y-d)^2 = px - p(x-x'),$$

$$\text{ou} \quad y^2 - 2yd + d^2 = px - p(x-x'), \quad \text{ou} \quad x - x' = \frac{2yd - d^2}{p}.$$

Donc

$$\mathrm{EI} = \sqrt{\left(\frac{4y^2d^2 - 4yd^3 + d^4}{p^2} + d^2\right)} = \frac{d}{p}\sqrt{(4y^2 - 4yd + d^2 + p^2)}$$
$$= \frac{d}{p}\sqrt{(2y-d)^2 + p^2}.$$

Mais, en opérant l'extraction de racine, ou, ce qui est absolument la même chose, en développant la puissance $\frac{1}{2}$ de $(2y-d)^2 + p^2$, on trouve

$$\mathrm{EI} = \frac{d}{p}\left(2y - d + \frac{p^2}{2(2y-d)} - \frac{p^4}{8(2y-d)^3} + \text{etc.}\right).$$

Par conséquent, si nous prenons seulement les deux premiers termes, nous aurons une valeur approximative de l'arc EI, qui sera un peu trop grande, et la surface courbe du premier tronc de cône vaudra

$$[\pi y+\pi(y-d)]\frac{d}{p}\left(2y-d+\frac{p^2}{2(2y-d)}\right)=\frac{\pi d}{p}(2y-d)\left(2y-d+\frac{p^2}{2(2y-d)}\right)$$
$$=\frac{\pi d}{p}\left((2y-d)^2+\frac{p^2}{2}\right)=\frac{\pi d}{p}\left(4y^2-4yd+d^2+\frac{p^2}{2}\right)$$
$$=\frac{\pi}{p}\left(4y^2d-4yd^2+d^3+\frac{p^2d}{2}\right).$$

La même marche fait trouver, pour la surface courbe du second tronc de cône IQRK,

$$\frac{\pi}{p}\left(4y^2d-4\times 3yd^2+(3)^2d^3+\frac{p^2d}{2}\right);$$

pour celle du 3ᵉ, KRSL,

$$\frac{\pi}{p}\left(4y^2d-4\times 5yd^2+(5)^2d^3+\frac{p^2d}{2}\right);$$

pour celle du 4ᵉ,

$$\frac{\pi}{p}\left(4y^2d-4\times 7yd^2+(7)^2d^3+\frac{p^2d}{2}\right);$$

et pour celle du nᵉ ou dernier, c'est-à-dire pour celle du cône LSP

$$\frac{\pi}{p}\left(4y^2d-4(2n-1)yd^2+(2n-1)^2d^3+\frac{p^2d}{2}\right).$$

Ainsi, la somme de toutes ces surfaces, ou la surface courbe de la calotte, vaut

$$\frac{\pi}{p}\left\{\begin{array}{l}4y^2nd-4[1+3+5\ldots.+(2n-1)]yd^2\\ \quad+[(1)^2+(3)^2+(5)^2\ldots..+(2n-1)^2]d^3+\dfrac{p^2nd}{2}\end{array}\right\}.$$

Mais $nd=y$; les n termes de la progression par différence 1, 3, 5.... $2n-1$, font en totalité $(1+2n-1)\frac{n}{2}=n^2$; nous avons vu (360) que la suite des quarrés qui multiplient d^3 a pour somme $\frac{4n^3-n}{3}$, et la première puissance du très-grand nombre n peut être négligée devant la troisième, ce qui n'augmente que de bien peu le résultat final. Conséquemment, la surface courbe cherchée vaut approximativement,

$$\frac{\pi}{p}(4y^3-4yn^2d^2+\tfrac{4}{3}n^3d^3+\tfrac{1}{2}p^2y)=\frac{\pi}{p}(4y^3-4y^3+\tfrac{4}{3}y^3+\tfrac{1}{2}p^2y)$$
$$=\frac{\pi}{p}(\tfrac{4}{3}y^3+\tfrac{1}{2}p^2y)=\frac{\pi}{6p}(8y^3+3p^2y).$$

Augmentons encore, en ajoutant le terme $\frac{\pi}{6p}\times\frac{p^4}{4y}$; nous obtiendrons, pour autre expression moins approchée,

$$\frac{\pi}{6p}\left(8y^3+3p^2y+\frac{p^4}{4y}\right)=\frac{\pi}{6p}\left(8y^3+2p^2y+p^2y+\frac{p^4}{4y}\right)$$
$$=\frac{\pi}{6p}\left((4y^2+p^2)2y+(4y^2+p^2)\frac{p^2}{4y}\right)=\frac{\pi}{6p}(4y^2+p^2)\left(2y+\frac{p^2}{2.2y}\right).$$

Comme, d'après ce qui a été dit plus haut, $2y+\frac{p^2}{2.2y}=\sqrt{4y^2+p^2}$, la surface courbe cherchée peut aussi être exprimée par

$$\frac{\pi}{6p}(4y^2+p^2)\sqrt{4y^2+p^2}.$$

Or, quand $y=0$, la calotte n'existe plus et sa surface est nulle. Cependant, la valeur à laquelle nous sommes parvenus devient alors $\frac{\pi}{6p}p^2\sqrt{p^2}=\frac{\pi p^2}{6}$. C'est donc de cette quantité que nous l'avons rendue trop grande, en négligeant le troisième terme du développement de chaque radical, en supprimant le facteur $-\frac{\pi}{3}$ de d^3, et en ajoutant $\frac{\pi}{6p}\times\frac{p^4}{4y}$. Donc enfin, la vraie valeur de la surface courbe d'une calotte de paraboloïde, que termine un cercle de rayon y, est

$$\frac{\pi}{6p}(4y^2+p^2)\sqrt{4y^2+p^2}-\frac{\pi p^2}{6},$$

et pour quarrer cette surface, il faut effectivement diviser par le sextuple du paramètre p, le volume $\pi(4y^2+p^2)\sqrt{4y^2+p^2}$ d'un cylindre qui a $\sqrt{4y^2+p^2}$ ou $\sqrt{(\overline{EG}^2+p^2)}$ pour rayon et pour hauteur, puis retrancher du quotient le sixième de πp^2, c'est-à-dire le sixième de la superficie d'un cercle dont le rayon est p.

PROBL. (*a*) : ***Mesurer la surface courbe d'une calotte de paraboloïde terminée par un cercle.***

***Solution* 1** : Tracez (369, probl.) l'arc EPG de parabole capable d'engendrer la calotte (P. VIII, F. 1) ; déterminez le foyer F et le paramètre UV ; mesurez ce paramètre et la corde EG perpendiculaire à l'axe PH ; élevez au quarré chacune des longueurs obtenues ; faites le produit de la somme des quarrés, de la racine quarrée de cette somme et de 3,1416 ; divisez-le par six fois UV ; puis retranchez du quotient le sixième de $3{,}1416\overline{UV}^2$.

***Solution* 2** : Marquez le centre H du cercle limite EG, et le pôle P du paraboloïde (367, probl.) ; divisez le quarré du rayon EH par la hauteur PH du corps; vous obtiendrez, pour quotient, le paramètre UV de la parabole génératrice EPG (312), et vous pourrez achever comme dans la solution précédente.

PROBL. (*b*) : ***Mesurer la surface courbe d'un segment de paraboloïde terminé par deux cercles.***

Mesurez les rayons EH, IM des deux cercles extrêmes (P. VIII, F. 1) et l'épaisseur HM ou IT du segment; divisez par cette épaisseur l'excès du quarré de EH sur le quarré de IM; le quotient sera la longueur du paramètre. Vous pourrez donc calculer, comme dans le problème précédent, les surfaces courbes des calottes qui auraient pour bases les cercles EG, IQ. Retranchant la plus petite de la plus grande, vous aurez la surface courbe du segment EGQI.

Démonstration : Supposons tracée la parabole génératrice EPG du paraboloïde auquel appartient le segment donné. En vertu du principe 312, $\overline{EH}^2 = UV \times PH$, $\overline{IM}^2 = UV \times PM$. Par conséquent,

$$UV \times PH - UV \times PM = \overline{EH}^2 - \overline{IM}^2, \quad UV(PH - PM) = \overline{EH}^2 - \overline{IM}^2,$$

et

$$UV = \frac{\overline{EH}^2 - \overline{IM}^2}{HM}.$$

571. ***Le volume d'une calotte de paraboloïde, terminée par un cercle, égale celui du cylindre qui a pour rayon l'axe de la calotte, et pour hauteur la moitié du paramètre de la parabole génératrice.***

L'axe PH de la calotte EPG (P. VIII, F. 4) est perpendiculaire sur le cercle limite, au centre même (367); il est donc d'équerre au milieu du diamètre EG, corde de la parabole méridienne EPG.

Partageons PH en un fort grand nombre n de parties égales d, et, par les points de division I, K, L, concevons des plans parallèles au cercle EG. Ils diviseront le paraboloïde en troncs de cône extrêmement peu épais, et couperont le plan méridien selon des parallèles au diamètre EG.

Le premier tronc EGMN, différant très-peu du cylindre EGOQ, a pour volume

$$\pi\overline{EH}^2 \times d \quad \text{ou} \quad \pi p \times PH \times d,$$

si p représente le paramètre de la parabole génératrice (312). Désignons respectivement par x, x', x'', x''', etc., les abscisses PH, PI, PK, PL, etc.; nous aurons

$$EGMN = \pi pxd,$$

et pour les mêmes raisons,

$$MNRS = \pi px'd = \pi p(x-d)d = \pi pxd - \pi pd^2,$$
$$RSTU = \pi px''d = \pi p(x-2d)d = \pi pxd - 2\pi pd^2,$$

le 4ᵉ tronc de cône vaudra $\pi px'''d = \pi p(x-3d)d = \pi pxd - 3\pi pd^2$,

....

et le nᵉ............. $\pi p[x-(n-1)d]d = \pi pxd - (n-1)\pi pd^2$.

Par conséquent, la somme de tous est

$$\delta\pi p \left\{ \begin{array}{l} x^2 nd - [0+2+4+6\ldots\ldots+2(n-1)]xd^2 \\ +[1+4+9\ldots\ldots+(n-1)^2]d^3 \end{array} \right\}.$$

Or, $nd = x$; le total des termes qui multiplie xd^2 vaut

$$[0+2(n-1)]\frac{n}{2} = n^2 - n, \quad \text{ou simplement} \quad n^2,$$

parce qu'on peut négliger la première puissance du nombre infiniment grand n; et nous avons trouvé (360), pour le total des $n-1$ quarrés qui multiplient d^3, $\dfrac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$, qu'on peut réduire à $\dfrac{n^3}{3}$. Ainsi, la somme des moments partiels est, en définitive,

$$\delta\pi p\,(x^3 - x^3 + \tfrac{1}{3}x^3) = \tfrac{1}{3}\,\delta\pi p x^3,$$

et l'on a

$$\tfrac{1}{2}\,\delta\pi p x^2 \times \mathrm{PV} = \tfrac{1}{3}\,\delta\pi p x^3,$$

ce qui donne

$$\mathrm{PV} = \frac{\frac{1}{3}\,\delta\pi p x^3}{\frac{1}{2}\,\delta\pi p x^2} = \tfrac{2}{3}\,x = \tfrac{2}{3}\,\mathrm{PH},$$

comme nous l'avons annoncé.

COURBES PLANES.

374. La ligne droite peut être regardée comme engendrée par un point qui se meut constamment dans la même direction; elle résulte donc d'un seul mouvement assujetti à l'unique condition de porter le point générateur, par le chemin le plus court, vers un autre point assigné.

Pour produire une courbe plane, au contraire, le point générateur doit changer de direction à chaque instant, d'une position à la position contiguë (1), et cela exige, en général, deux mouvements simultanés : un mouvement du point générateur sur un certain *véhicule*, avec un mouvement différent exécuté par le véhicule, dans un plan invariable; le point est alors, en effet, dans le cas d'un homme qui marcherait sur un vaisseau poussé par les vents, et il parcourt une courbe, si les vitesses ont des relations convenables de direction et de grandeur.

De là deux grandes classes de courbes planes : celle où le véhicule est droit, celle où il est courbe. Chaque classe comprend trois ordres, parce que le véhicule peut tourner autour d'un point fixe, ou cheminer sur une *directrice* droite, ou se mouvoir le long d'une directrice courbe. Les conditions auxquelles doivent satisfaire les deux mouvements diversifient les divers genres d'un même ordre, les espèces d'un même genre, les variétés d'une même espèce, et certaines dimensions données, telles que la longueur du paramètre pour une section conique, distinguent les individus de chaque variété. Cette classification embrasse non-seulement toutes les courbes imaginées jusqu'à présent, mais encore toutes celles qu'on pourra inventer par la suite.

Ainsi, le cercle, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole appartiennent au premier ordre de la première classe, parce qu'elles peuvent être engendrées par un point mobile sur une droite qui tourne autour du centre, dans les trois premières espèces, et autour du foyer, dans la dernière. Pour celle-ci, la distance du point générateur au point fixe doit toujours égaler la distance du même point à une droite donnée (318); pour l'hyperbole, la différence des distances du point générateur aux foyers est constante (246); il en est de même de la somme de ces distances pour l'ellipse (52); enfin, le point générateur du cercle a une vitesse nulle sur le véhicule, ou bien cette courbe résulte d'un mouvement unique, et elle est la seule qui soit dans ce cas, parmi les courbes planes.

Voici, d'après notre classification, le tableau des courbes planes déjà connues et de celles que nous avons encore à étudier.

CLASSES	ORDRES.	GENRES.	ESPÈCES.	VARIÉTÉS.
Véhicule droit.	A point fixe	Circonférence	Circonférence.	
		Ovales	Ellipse.	
			Ovale de Cassini.	
		Hyperboles	Hyperbole symétrique	Deux variétés.
		Paraboles	Parabole du cône.	
		Cassinoïdes	Cassinoïde symétrique.	
		Développantes	Développantes de caustiques.	
		Lemniscates	Lemniscate de Cassini.	
			Lemniscate hyperbolique.	
			Lemniscate des pistons.	
			Vésicoïde.	
			Méridienne du temps moyen.	
		Spirales	Spirale d'Archimède.	
			Spirale hyperbolique.	
		Conchoïdes	Conchoïde.	
			Caméroïde	Quatre variétés.
	A directrice droite	Sinusoïdes	Sinusoïde.	
		Logarithmiques	Logarithmiques usuelles	Népérienne.
				Décimale.
		Chaînette	Chaînette.	
	A directrice courbe.	Développantes	Développante du cercle.	
		Développées	Caustique de réflexion	Sur la ligne droite.
				Sur le cercle.
			Caustique de réfraction	Sur la ligne droite.
				Sur le cercle.
Véhicule courbe.	A point fixe	Chemins du contact des cammes.	Chemin du contact d'une camme et d'un mentonnet*.	
	A directrice droite	Cycloïdes	Cycloïde.	
	A directrice courbe.	Epicycloïdes	Epicycloïde.	

OVALES.

575. Les *ovales* sont des courbes fermées et oblongues; leur nom vient de l'analogie qu'elles ont avec le profil d'un œuf. Il y en a d'irrégulières comme ce profil et de régulières comme l'ellipse; ces dernières ont des axes de symétrie qui se croisent au point fixe du véhicule, de sorte que ce point est pour elles un centre.

Nous n'avons pas à nous occuper des ovales, régulières ou irrégulières, formées d'arcs de cercle raccordés, ni de l'ovale qui renferme quatre arcs de parabole (p. 226, appl. II) : leurs propriétés ne sont

* Cité seulement comme exemple.

pas autres que celles des courbes dont elles se trouvent composées. Quant à l'ovale décrite dans le problème *i* du n° 53, à l'effet d'imiter l'ellipse, elle n'a pas assez d'importance pour qu'on s'y arrête.

OVALE DE CASSINI.

576. L'astronome Cassini, qui crut voir que l'orbite elliptique attribuée à la Terre ne s'accordait pas tout-à-fait avec le mouvement réel de cette planète autour du Soleil, chercha une ovale propre à représenter ce mouvement avec exactitude, et son erreur dota la science de trois espèces de courbes, dont l'une, celle que nous allons étudier d'abord, est susceptible de quelques applications utiles.

Le mouvement du point générateur sur le véhicule est réglé, dans l'ovale de Cassini, par deux points R, R′ analogues aux foyers de l'ellipse (P. VIII, F. 5), et le pivot O du véhicule droit se trouve au milieu de la droite RR′. Nous appellerons *régulateurs* les points R, R′, et *excentricité* la distance OR.

Un point E, *mobile sur le véhicule* OE, *engendre l'ovale de Cassini, lorsque le produit de ses distances* ER, ER′ *aux régulateurs est constant, et au moins égal au double du quarré numérique de l'excentricité.*

Nous démontrerons d'abord que le point E, ne pouvant évidemment suivre une droite, engendre une courbe ACBD analogue à l'ellipse. Cela est vrai, si les ordonnées d'équerre à RR′ vont toujours en augmentant de zéro à OC ou à OD, perpendiculaires au milieu de la droite des régulateurs.

Cherchons la valeur d'une ordonnée EF ou y, en fonction de l'abscisse correspondante OF ou x et de l'excentricité OR ou e, dans l'hypothèse générale $rr' = 2ne^2$, r, r' représentant les rayons vecteurs ER, ER′, et n un nombre quelconque. Les triangles rectangles EFR, EFR′ donnent

$$r^2 = y^2 + \overline{FR}^2 = y^2 + (e-x)^2, \quad r'^2 = y^2 + \overline{FR'}^2 = y^2 + (e+x)^2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} r^2r'^2 = 4n^2e^4 &= y^4 + y^2(e-x)^2 + y^2(e+x)^2 + (e-x)^2(e+x)^2 \\ &= y^4 + e^2y^2 - 2exy^2 + x^2y^2 + e^2y^2 + 2exy^2 + x^2y^2 + (e^2-x^2)^2 \\ &= y^4 + 2(e^2+x^2)y^2 + (e^2-x^2)^2; \end{aligned}$$

$$y^4 + 2(e^2+x^2)y^2 = 4n^2e^4 - (e^2-x^2)^2;$$

$$\begin{aligned} y^2 &= -(e^2+x^2) + \sqrt{[4n^2e^4 - (e^2-x^2)^2 + (e^2+x^2)^2]} \\ &= -(e^2+x^2) + \sqrt{(4n^2e^4 + 4e^2x^2)} = -(e^2+x^2) + 2e\sqrt{n^2e^2 + x^4}, \end{aligned}$$

et quand $x = 0$,

$$y^2 = \overline{OC}^2 = -e^2 + 2e\sqrt{n^2e^2} = -e^2 + 2ne^2 = (2n-1)e^2.$$

Le signe $+$ a été mis seul devant les radicaux, parce que le signe $-$ répondrait à une valeur imaginaire de y.

Supposons maintenant $n=1$ au moins, afin que, selon l'énoncé, rr' égale ou surpasse $2e^2$. Comme $\sqrt{(n^2e^2+x^2)}=ne+\frac{x^2}{2ne}-\frac{x^4}{8n^3e^3}$, à fort peu près (370), nous aurons

$$y^2=-(e^2+x^2)+2ne^2+\frac{x^2}{n}-\frac{x^4}{4n^3e^2}$$
$$=(2n-1)e^2+\left(\frac{1}{n}-1\right)x^2-\frac{x^4}{4n^3e^2};$$

le coefficient $\frac{1}{n}-1$ de x^2 sera nul ou négatif, et quelque petit qu'on prenne x ou OF, l'ordonnée EF se trouvera nécessairement moindre que OC. D'ailleurs, les deux termes négatifs, augmentant avec x, font diminuer la valeur de y, à mesure que le point F s'écarte de O. Enfin, cette valeur devient nulle, quand $x^2+e^2=2e\sqrt{(n^2e^2+x^2)}$, ce qui donne

$$x^4+2e^2x^2+e^4=4n^2e^4+4e^2x^2,\quad x^4-2e^2x^2+e^4=4n^2e^4,$$
$$(x^2-e^2)^2=4n^2e^4,\quad x^2-e^2=2ne^2,\quad (x+e)(x-e)=2ne^2.$$

Ainsi, $x+e$ est la distance de R' à l'un des points A, B où $y=0$, $x-e$ est celle de R, et comme le produit de ces deux distances vaut rr', les points A, B se trouvent sur la courbe.

Il reste à faire voir que le chemin ACBD parcouru par le point E, sous la condition $rr'=2ne^2$, ne peut jamais être une circonférence ni même une ellipse, quel que soit le nombre n, pourvu qu'il ne varie pas pendant le mouvement.

La relation $x^2-e^2=2ne^2$, qui a lieu en A et en B, donne $\overline{OA}^2=(2n+1)e^2$, et nous avons trouvé que $\overline{OC}^2=(2n-1)e^2$. Or, pour qu'un cercle pût passer par les quatre points A, C, B, D, il faudrait avoir $OA=OC$, ou $2n+1=2n-1$, ce qui est impossible.

La courbe ACBD ne peut pas non plus coïncider avec une ellipse, car de la coïncidence résulterait (47) la proportion

$$\overline{EF}^2 : \overline{OC}^2 :: AF\times BF : AO\times BO,$$

ou $$\overline{EF}^2 : (2n-1)e^2 :: (AO-FO)(AO+FO) : \overline{AO}^2,$$

ou $$\overline{EF}^2 : (2n-1)e^2 :: \overline{AO}^2-\overline{FO}^2 : \overline{AO}^2,$$

ou $$y^2 : (2n-1)e^2 :: (2n+1)e^2-x^2 : (2n+1)e^2,$$

qui donnerait

$$y^2=\frac{(4n^2-1)e^4-(2n-1)e^2x^2}{(2n+1)e^2}=\frac{(4n^2-1)e^2-(2n-1)x^2}{2n+1},$$

et en égalant cette dernière expression à $-(e^2+x^2)+2e\sqrt{n^2e^2+x^2}$, valeur générale de y^2, on formerait une équation qui conduirait à $2n=\frac{x^2-e^2}{e^2}$, quantité variable.

377. *La droite des régulateurs, prolongée jusqu'à la courbe, est le grand axe d'une ovale de Cassini, et la perpendiculaire au milieu de cette droite est le petit axe.*

L'expression de y^2 montre qu'une valeur FO ou GO attribuée à x (P. VIII, F. 5), donne la même longueur pour EF et pour E'F, ou pour GH et GH'. Ainsi, les cordes EE', HH', perpendiculaires à AB, sont coupées au milieu par cette droite (5).

De même, CD divise en deux parties égales les cordes qui lui sont d'équerre, car (376) la valeur de $r^2r'^2$ conduit à

$$x^2 = -(y^2-e^2)+\sqrt{[4n^2e^2-(y^2+e^2)^2]},$$

relation qui montre qu'une valeur OI attribuée à y donne la même longueur pour IH' et pour IH''.

Enfin, AB est plus grand que CD, puisque $\overline{OA}^2 = (2n+1)e^2$, tandis que $\overline{OC}^2 = (2n-1)e^2$ seulement.

378. *Le demi-petit axe d'une ovale de Cassini vaut au moins la moyenne proportionnelle entre la moitié du grand axe et le tiers de cette moitié* (P. VIII, F. 5).

D'après le n° 376,

$$\frac{\overline{OC}^2}{\overline{OA}^2}=\frac{(2n-1)e^2}{(2n+1)e^2},\quad \text{ce qui donne}\quad \overline{OC}^2=\frac{(2n-1)}{(2n+1)}\overline{OA}^2.$$

Si $n=1$, c'est-à-dire si le produit rr' des rayons vecteurs est $2e^2$, $\overline{OC}^2=\frac{\overline{OA}^2}{3}$, et OA : OC :: OC : $\frac{1}{3}$OA. Quand $n>1$, $\frac{2n-1}{2n+1}$ surpasse $\frac{1}{3}$, et par conséquent $\overline{OC}^2>\frac{\overline{OA}^2}{3}$.

379. *Le demi-petit axe d'une ovale de Cassini surpasse toujours les deux septièmes du grand axe, sans en atteindre la moitié.*

Nous avons vu (376) que OC ne peut jamais égaler OA (P. VIII, F. 5), et il résulte du principe précédent que $OC = OA\sqrt{\frac{1}{3}}$ au moins. Comme $\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{1,732}$, $OC=\frac{1}{2.1,732}2OA=\frac{1}{3,464}AB$. Or, la fraction $\frac{1}{3,464}$ a un léger excès sur $\frac{2}{7}$.

380. *L'excentricité d'une ovale de Cassini vaut au plus la moyenne proportionnelle entre la moitié du grand axe et le tiers de cette moitié* (P. VIII, F. 5).

Il a été établi (376) que $\overline{OA}^2=(2n+1)e^2$. Par conséquent, $e^2=\frac{\overline{OA}^2}{2n+1}$; et si $n=1$, c'est-à-dire si le produit constant rr'

des rayons vecteurs vaut $2e^2$, $e^2 = \frac{\overline{OA}^2}{3}$, ou bien $OA : e :: e : \frac{1}{3} OA$.

Mais lorsque $n > 1$, $\frac{\overline{OA}^2}{2n+1}$ devient moindre que $\frac{\overline{OA}^2}{3}$.

381. *L'excentricité d'une ovale de Cassini est l'un des petits côtés du triangle rectangle dont la moitié du grand axe forme l'hypothénuse, et dont le troisième côté égale la distance d'un régulateur à l'une des extrémités du petit axe.*

Ainsi (P. VIII, F. 5),

$$\overline{OR}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{CR}^2.$$

En effet (376), $AR \cdot AR' = CR \cdot CR'$, ou bien (377) $AR \cdot BR = \overline{CR}^2$, et $BR = 2AO - AR$; par suite,

$$AR\,(2AO - AR) = \overline{CR}^2, \qquad 2AO \times AR - \overline{AR}^2 = \overline{CR}^2,$$

$$\overline{AR}^2 - 2AO \times AR = -\overline{CR}^2, \qquad AR = AO \pm \sqrt{(\overline{AO}^2 - \overline{CR}^2)}.$$

Mais,

$$OR = AO - AR = AO - AO \mp \sqrt{(\overline{AO}^2 - \overline{CR}^2)} = \mp \sqrt{(\overline{AO}^2 - \overline{CR}^2)}.$$

Donc,

$$\overline{OR}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{CR}^2.$$

382. *L'excentricité d'une ovale de Cassini égale la moitié du petit axe, quand cette moitié est moyenne proportionnelle entre celle du grand axe et le tiers de la même longueur.*

Soient OE le tiers de AO (P. VIII, F. 6) et OG la moyenne proportionnelle de AO et de OE; on a

$$\overline{OG}^2 = \tfrac{1}{3}\overline{AO}^2, \quad \text{ou} \quad \overline{AO}^2 = 3\overline{OG}^2,$$

et comme $\overline{OR}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{GR}^2$, si OG est le petit axe (381),

$$\overline{OR}^2 = 3\overline{OG}^2 - \overline{GR}^2 = 2\overline{OG}^2 + \overline{OG}^2 - \overline{GR}^2 = 2\overline{OG}^2 - (\overline{GR}^2 - \overline{OG}^2)$$
$$= 2\overline{OG}^2 - \overline{OR}^2.$$

Par conséquent,

$$2\overline{OR}^2 = 2\overline{OG}^2 \quad \text{et} \quad OR = OG.$$

383. *Lorsque l'excentricité d'une ovale de Cassini égale le petit axe, le produit constant des rayons vecteurs vaut le double du quarré numérique de cette excentricité.*

Le produit des rayons vecteurs vaut toujours $CR \times CR'$ ou $\overline{CR}^2$ (P. VIII, F. 5). Or, si $OR = OC$,

$$\overline{CR}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{OC}^2 = 2\overline{OR}^2.$$

384. *L'ovale de Cassini enveloppe totalement l'ellipse qui a les mêmes axes.*

Cela est vrai, si une certaine abscisse OG (P. VIII, F. 5) répond, dans l'ovale, à une ordonnée GH > GK, ordonnée correspondante de l'ellipse, car alors le quart BC de la première courbe est tout entier en dehors du quart de la seconde.

Nous avons trouvé (376) que $\overline{GH}^2 = -(e^2+x^2) + 2e\sqrt{n^2e^2+x^2}$ et que $\overline{GK}^2 = \frac{(4n^2-1)e^2-(2n-1)x^2}{2n+1}$. Supposons OG ou x égale à la moitié de OB. Comme $\overline{OA}^2$ ou $\overline{OB}^2 = (2n+1)e^2$, il en résultera

$$x^2 = \frac{\overline{OB}^2}{4} = \frac{2n+1}{4}e^2,$$

$$\overline{GH}^2 = -(e^2+x^2) + 2e\sqrt{\left(n^2e^2 + \frac{2n+1}{4}e^2\right)}$$

$$= -e^2 - x^2 + 2e\sqrt{[e^2(n^2+\tfrac{1}{2}n+\tfrac{1}{4})]},$$

$$\overline{GH}^2 > -e^2-x^2+2e^2\sqrt{(n^2+\tfrac{1}{2}n+\tfrac{1}{16})},\quad \overline{GH}^2 > -e^2-x^2+2e^2\sqrt{(n+\tfrac{1}{4})^2},$$

$$\overline{GH}^2 > -e^2-x^2+2e^2(n+\tfrac{1}{4}),\quad \overline{GH}^2 > (2n-1)e^2 - \left(\frac{2n+1}{4}e^2 - \frac{2e^2}{4}\right),$$

$$\overline{GH}^2 > (2n-1)e^2 - \frac{2n-1}{4}e^2,\qquad \overline{GH}^2 > \tfrac{3}{4}(2n-1)e^2.$$

Or,

$$\overline{GK}^2 = \frac{(2n+1)(2n-1)e^2-(2n-1)\frac{1}{4}(2n+1)e^2}{2n+1}$$

$$= (2n-1)e^2 - \tfrac{1}{4}(2n-1)e^2 = \tfrac{3}{4}(2n-e)e^2.$$

On a donc enfin

$$\overline{GH}^2 > \overline{GK}^2.$$

385. *Toute corde tirée par le croisement des axes d'une ovale de Cassini s'y trouve divisée en deux parties égales; elle forme un diamètre, et le croisement est le centre de la courbe.*

Superposons la moitié ADB de l'ovale (P. VIII, F. 7) sur l'autre moitié (377), de manière que l'arc BFD couvre l'arc AEC. La droite OF prendra la direction de OE, et les points E, F se confondront. Donc OF = OE.

Tirons par D une corde DG parallèle à EF; cette dernière droite coupera CG au milieu, et la seconde partie du principe sera démontrée (5), si nous faisons voir que EF coupe de la même manière toute corde HI parallèle à CG.

Or, rien n'empêche de prendre EF et KL, parallèle à CG, pour axes des coordonnées (6), au lieu de AB, CD. Alors, la même relation (376) qui existera entre l'abscisse OM et l'ordonnée correspondante MC, liera l'abscisse ON à l'ordonnée NH. Mais cette relation donne, pour l'abscisse OM, deux ordonnées égales MC, MG. Donc, toute autre abscisse ON répond aussi à deux ordonnées égales, et NH = NI.

Probl. (*a*) : *Trouver le centre d'une ovale de Cassini tracée.*
Agissez comme pour trouver le centre d'une ellipse (41, probl. *a*).

Probl. (*b*) : *Déterminer les axes d'une ovale de Cassini donnée.*
Agissez comme pour tracer les axes d'une ellipse (41, probl. *c*).

Probl. (*c*) : *Trouver les cordes qu'un diamètre donné partage en deux parties égales, dans une ovale de Cassini.*

Tirez, par l'une des extrémités d'un axe, une corde DG parallèle au diamètre donné EF (P. VIII, F. 7), et joignez le point G à l'autre extrémité du même axe. La corde CG et toutes ses parallèles seront coupées au milieu par EF.

Probl. (*d*) : *Marquer les points régulateurs d'une ovale de Cassini donnée.*

Solution 1 : Cherchez la moyenne proportionnelle de la demi-somme $\frac{AO+CO}{2}$ des moitiés des axes (P. VIII, F. 5) et de la différence AO — CO des mêmes moitiés ; puis portez-la sur le grand axe, du centre O en R et en R'. Les points R, R' seront les régulateurs demandés.

Démonstration : On a effectivement

$$\frac{AO+CO}{2} : OR :: OR : AO-CO,$$

lorsque R, R' sont les points régulateurs. D'abord,

$$\overline{OR}^2 = \overline{CR}^2 - \overline{CO}^2;$$

ensuite (376),

$$CR \cdot CR' = \overline{CR}^2 = AR \cdot AR' = (AO-OR)(AO+OR) = \overline{AO}^2 - \overline{OR}^2.$$

Par conséquent,

$$\overline{OR}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OR}^2 - \overline{CO}^2,$$

$$2\overline{OR}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{CO}^2 = (AO+CO)(AO-CO),$$

et

$$\overline{OR}^2 = \tfrac{1}{2}(AO+CO)(AO-CO),$$

ce qui revient à la proportion énoncée.

Solution 2 : Cherchez la moyenne proportionnelle qu'ont entre elles l'hypothénuse AC du triangle rectangle formé par les demi-axes, et la moitié de cette hypothénuse ; puis, de l'une C des extrémités du petit axe, avec la longueur trouvée pour rayon, décrivez un arc qui coupe le grand axe en deux points; ces points R, R′ seront les régulateurs demandés.

Démonstration: Le tracé est vrai, si AC : CR :: CR : $\frac{1}{2}$AC, quand R, R′ sont effectivement les régulateurs. Or, alors (381)

$$\overline{OR}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{CR}^2 \quad \text{et} \quad \overline{CR}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OR}^2.$$

Donc

$$\overline{CR}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{AO}^2 - \overline{CR}^2, \quad 2\overline{CR}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{AO}^2 = \overline{AC}^2,$$

et

$$\overline{CR}^2 = \tfrac{1}{2}AC \times AC,$$

égalité qui donne la proportion voulue.

Solution 3: Si le demi-petit axe OC est moyen proportionnel entre la moitié AO du grand et le tiers de cette moitié, portez-le sur AB, de chaque côté du milieu O. Les points R, R′, ainsi marqués, seront les régulateurs (382).

Probl. (*e*): *Tracer une ovale de Cassini dont on connaît les axes.*

Il faut d'abord reconnaître si le problème est possible. A cette fin, partagez en trois parties égales la moitié BO du grand axe (P. VIII, F. 6), puis en deux parties égales la longueur AE, composée de AO et de OE, tiers de BO. Si la demi-circonférence décrite du milieu F de AE, avec FA pour rayon, coupe le petit axe CD en C ou entre C et O, une ovale de Cassini peut passer par les quatre points A, C, B, D; car OC $\overline{\overline{>}}$ OG, et OG est moyenne proportionnelle entre la moitié du grand axe et le tiers de cette moitié (378).

Il faut ensuite marquer les régulateurs R, R′; élever, à l'extrémité A du grand axe, une perpendiculaire AH égale à BR; prendre sur AB une longueur AI plus grande que AR et plus petite que AR′; tirer par R une parallèle RK à HI; décrire de R et de R′, avec AI, deux arcs de cercle; décrire des mêmes points, avec AK, deux autres arcs qui coupent les premiers, et répéter les trois dernières opérations, après avoir pris sur AB des longueurs plus grandes ou moindres que AI. Chacune de ces longueurs donne quatre points de la courbe; car, par exemple, les quatre intersections d'arcs L, L′, L″, L‴, dues à AI, appartiennent à l'ovale de Cassini qui contient A, C, B, D.

Démonstration: D'après la construction, AI : AH :: AR : AK, ou bien AI × AK = AR × BR; par conséquent, le produit des distances de R, R′ à chacun des points A, L, L′, B, L″, L‴, est constant, et (376) ces six points appartiennent à la même ovale de Cassini. D'ailleurs, la détermination de R, R′ place C, D sur l'ovale qui passe par A et B.

PROBL. (*f*) : *Tracer une ovale de Cassini dont les points régulateurs* R, R′ *sont donnés* (P. VIII, F. 6).

Elevez une perpendiculaire au milieu O de RR′; cherchez la moyenne proportionnelle de l'excentricité OR et du triple de cette longueur; prenez OA et OB égaux à la moyenne trouvée, ou plus grands, et achevez comme dans le problème précédent.

Il est bon de marquer exactement les extrémités du petit axe. Pour cela, cherchez la moyenne proportionnelle de AR et de BR; puis, décrivez, de l'un des régulateurs, avec cette moyenne, un arc qui coupe en deux points la perpendiculaire au milieu de RR′.

Démonstration : La construction donne $\overline{AO}^2 \geqq 3OR \times OR$. Conséquemment, $\overline{OR}^2 \leqq \frac{1}{3}\overline{AO}^2$, relation conforme au principe 380. Ainsi, une ovale de Cassini qui a R, R′ pour régulateurs, peut avoir les points A, B pour sommets.

La courbe passera aussi par les extrémités C, D de la perpendiculaire au milieu de RR′; car il résulte de leur détermination $\overline{CR}^2 = AR \cdot BR$, et comme $CR = CR'$, $\overline{CR}^2 = CR \cdot CR' = AR \cdot BR$, ce qui signifie que le produit des distances de C ou de D aux régulateurs égale celui des distances de A, ou de L, ou de L′, etc., aux mêmes points (376).

PROBL. (*g*) : *Tracer une ovale de Cassini dont on connaît les régulateurs* R, R′ *et le petit axe* CD (P. VIII, F. 6).

Elevez une perpendiculaire à l'une des extrémités de CR; prenez-y RM = RO, et portez CM sur la droite des régulateurs, du milieu O en A et en B. Les points A, B seront les extrémités du grand axe, et vous pourrez achever comme dans le problème (*e*).

Démonstration : La construction donne $\overline{AO}^2 = \overline{CR}^2 + \overline{OR}^2$ ou $\overline{OR}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{CR}^2$, relation conforme au principe 381.

PROBL. (*h*) : *Tracer une ovale de Cassini dont on connaît les régulateurs* R, R′ *et le grand axe* AB (P. VIII, F. 6).

Voyez d'abord si le problème est possible, et à cette fin, opérez comme dans le problème (*e*). La moyenne proportionnelle OG de AO et de OE, tiers de BO, devra égaler au moins l'excentricité OR (380).

Il reste ensuite à imiter ce qui a été fait dans le même problème (*e*), pour trouver les points L, L′, L″, L‴, etc., de la courbe, et à déterminer les extrémités C, D du petit axe comme dans le problème (*f*).

PROBL. (*i*) : *Mener une tangente à l'ovale de Cassini, par un point donné sur cette courbe.*

Solution 1 : Tirez le diamètre EF qui aboutit au point donné E (P. VIII, F. 7); cherchez une des cordes que ce diamètre coupe au milieu, et menez par E une parallèle EP à cette corde CG.

Démonstration : La tangente EP est le prolongement de l'élément E de la courbe, et cet élément, dont le point donné E forme le milieu, fait partie du système des cordes que le diamètre EF divise en deux parties égales. Or, toutes ces cordes sont parallèles entre elles (385).

Solution 2 : Tracez les rayons vecteurs du point donné E (F. 8); portez l'un R'E de ces rayons sur son prolongement, de E en F; élevez des perpendiculaires aux mêmes rayons, l'une en F, l'autre en R; puis joignez E à l'intersection G des deux perpendiculaires.

Démonstration : La droite EG est tangente à l'ovale, si elle à la même direction que l'élément E de cette courbe, ou si l'angle FEG égale l'angle HEK que le très-petit arc EH forme sur EF.

Décrivons, de R et de R', les très-petits arcs HI, HK, avec les rayons RH, R'H. Ils seront d'équerre sur RE, R'E, et pourront être regardés comme parallèles à RG, FG; les angles du quadrilatère EIHK égaleront les angles correspondants du quadrilatère ERGF, et de plus on aura

$$EK : EF :: EI : ER.$$

En effet, $R'H = R'E + EK$, $RH = RE - EI$, ce qui donne

$$R'H \cdot RH = R'E \cdot RE + EK \cdot RE - R'E \cdot EI - EK \cdot EI.$$

Le produit des deux quantités infiniment petites EK, EI peut être négligé, et (376)

$$R'H \cdot RH = R'E \cdot RE.$$

Par conséquent,

$$EK \cdot RE - R'E \cdot EI = 0, \qquad EK \cdot RE = R'E \cdot EI,$$

$$EK : R'E :: EI : ER \quad \text{et} \quad EK : EF :: EI : ER,$$

puisque $R'E = EF$.

Ainsi, les triangles EIK, ERF sont semblables; il en est de même des triangles IHK, RGF; il y a similitude aussi entre les quadrilatères EIHK, ERGF, entre les triangles rectangles EKH, EFG, et l'élément EH se trouve tout entier sur EG.

Solution 3 : Tracez les rayons vecteurs du point donné L; portez le plus petit R'L sur le plus grand RL, de L en M; menez la parallèle MN de RR', afin d'avoir la troisième proportionnelle LN de RL, R'L; portez LN sur le prolongement de RL, à partir de L; joignez le point P, qui en résulte, au régulateur R' le plus voisin, et abaissez de L une perpendiculaire LQ sur PR'.

Démonstration : La construction sera justifiée, si nous faisons voir qu'en abaissant de R' une perpendiculaire R'P sur la tangente LQ, on a

$$LP : R'L :: R'L : RL.$$

Considérons l'élément d'ovale LS, qui, se confondant avec LQ, se trouve aussi d'équerre sur R'P; décrivons, de R et de R', les arcs infiniment petits LT, LU, limités aux rayons vecteurs RS, R'S. Ces arcs, étant d'équerre sur leurs rayons, rendent égaux les angles SLT et P, SLU et LR'V; il y a donc similitude entre les triangles rectangles LTS et LVP, LUS et LVR'. Par conséquent,

$$LP : LV :: LS : ST, \quad R'L : LV :: LS : SU,$$

$$LP \times ST = R'L \times SU \quad \text{et} \quad LP : R'L :: SU : ST.$$

Or (376), $RS \times R'S = RL \times R'L$, ce qui donne

$$(RL + ST)(R'L - SU) = RL \times R'L,$$

puis

$$RL \times R'L + ST \times R'L - RL \times SU - ST \times SU = RL \times R'L.$$

Négligeant le produit des deux longueurs infiniment petites ST, SU, on obtient

$$ST \times R'L = RL \times SU, \quad \text{et} \quad SU : ST :: R'L : RL.$$

Donc enfin,

$$LP : R'L :: R'L : RL.$$

APPLICATIONS : L'ovale de Cassini est propre, comme l'ellipse, aux cintres surbaissés ou surhaussés, car ses tangentes aux extrémités des axes sont aussi perpendiculaires à ces droites (probl. *i*, sol. 1). Mais, comme pour une largeur et une hauteur de voûte données, la seconde courbe serait totalement enveloppée par la première (384), les tangentes les plus inclinées de celle-ci font, avec la ligne de naissance, des angles moindres que les angles formés par les tangentes qui ont, sur l'ellipse, des contacts de même abscisse horizontale, et il s'ensuit (page 231) qu'un cintre de Cassini exerce sur ses piédroits une poussée supérieure à celle d'un cintre elliptique.

Néanmoins, l'ovale convient mieux que l'ellipse aux arches de pont qu'on veut rendre tangentes aux piles, sans leur donner un cintre plein; car un pont gênant toujours l'écoulement de l'eau, il importe d'adopter pour ses voûtes la courbe qui laisse le plus d'espace entre elle et la ligne de naissance.

CASSINOÏDES.

386. Les cassinoïdes sont des courbes planes, fermées, à quatre inflexions (8), sans points multiples, qui ont une génération analogue à celle de l'ovale de Cassini; de là vient leur nom. Comme elles ont fort peu d'importance, nous dirons seulement quelques mots de la cassinoïde régulière ou symétrique.

CASSINOÏDE SYMÉTRIQUE.

387. *Un point* E, *mobile sur le véhicule* OE (P. VIII, F. 9), *engendre une cassinoïde symétrique, lorsque le produit de ses distances* ER, ER' *aux régulateurs est constant, moindre que le double du quarré numérique de l'excentricité* OR, *et plus grand que ce même quarré.*

Il faut, pour ce cas, que, dans la relation générale (376)

$rr' = 2ne^2$, n soit au-dessous de 1 et au-dessus de $\frac{1}{2}$. Ce nombre n est donc une fraction comprise entre 1 et $\frac{1}{2}$. Par conséquent, la moitié OC du petit axe, dont le quarré a pour valeur $(2n-1)e^2$, surpasse toujours zéro.

Mais, dans l'équation $y^2 = (2n-1)e^2 + \left(\frac{1}{n} - 1\right)x^2 - \frac{x^4}{4n^3e^2}$, le coefficient de x^2 est constamment positif. De là résulte que

$$y^2 = (2n-1)e^2 \quad \text{et que} \quad y = \pm OC,$$

soit quand $x = 0$, soit quand à fort peu près $\left(\frac{1}{n} - 1\right)x^2 - \frac{x^4}{4n^3e^2} = 0$, ce qui répond à $x = \pm 2ne\sqrt{1-n}$. Il est d'ailleurs évident qu'entre ces deux valeurs de x, l'ordonnée y surpasse OC; qu'au-delà de la seconde, elle est inférieure à cette moitié du petit axe, et qu'elle décroît sans cesse, pour devenir nulle lorsque

$$x = \pm OA = \pm\sqrt{(2n+1)e^2}.$$

Ainsi, c'est seulement aux sommets A, B que les deux valeurs de y conviennent au même point de la courbe; cette courbe s'écarte ensuite de son grand axe, pour s'en rapprocher, sans l'atteindre en coupant le petit axe; par conséquent, elle est fermée, comme les ovales, forme quatre inflexions symétriquement placées, et n'a aucun point multiple.

DÉVELOPPANTES DE CAUSTIQUES.

388. On appelle *caustiques* des courbes tangentes à des rayons lumineux réfléchis ou réfractés, tous émanés d'un même point situé dans leur plan. Il existe donc des *caustiques par réflexion* et des *caustiques par réfraction:* chacune de ces espèces a des variétés que distinguent la forme du miroir ou du milieu, et il en est de même des développantes (12).

DÉVELOPPANTES DE CAUSTIQUES PAR RÉFLEXION.

389. *Lorsque le miroir est plan, la développante de la caustique est un cercle.*

Soit AB un miroir plan vertical (P. VIII, F. 10), et L le point lumineux. La réflexion d'un rayon horizontal quelconque LA se fait de manière qu'il y a égalité entre les angles LAN, RAN, formés par la normale AN avec le rayon incident et le rayon réfléchi AR. Les prolongements de NA, RA rendent donc égaux les angles L'AN', LAN, et par suite, les angles BAL, BAL'; la normale LL' produit deux triangles rectangles égaux LCA, L'CA; tous les rayons réfléchis dans le plan horizontal de la figure vont concourir, par leurs prolongements, en un point L' situé derrière le miroir, à une distance CL' égale à celle du point lumineux, et la caustique se réduit au point idéal L′, dont la développante est un cercle décrit de L′ avec un rayon quelconque (14).

390. *Lorsque la distance d'un point lumineux* A *au centre* C *d'un miroir circulaire* (P. VIII, F. 11) *se trouve moindre que le rayon* CD *du cercle, la développante de la caustique peut être engendrée par un point* E *mobile sur un véhicule droit, à point fixe situé au milieu* O *de la droite* AB *de deux régulateurs.*

L'un des deux régulateurs est le point lumineux A; l'autre B appartient à la droite AC, qui joint le premier au centre du miroir; CB : CD :: CD : CA, et le point générateur se meut de manière que toujours $\frac{CD}{CA}EA - EB = AB$.

Considérons, sur le plan horizontal, le rayon incident AF, qui se réfléchit selon FG, en faisant l'angle CFG égal à l'angle CFA; élevons une perpendiculaire au milieu de AF et une autre à l'extrémité F de CF; leur concours H sera le centre d'un cercle qui passera par A, F, touchera le rayon CF en F, et coupera le prolongement de CA en un point B tel qu'on aura CB : CF :: CF : CA. L'intersection B est donc le second régulateur.

Je dis maintenant que l'intersection E de la même circonférence et du prolongement de GF satisfait à l'égalité $\frac{CD}{CA}EA - EB = AB$.

Soit EBI une quatrième proportionnelle à AF, BF, AE. L'égalité des angles inscrits AFB, AEB rend semblables les triangles ABF, AIE;

$$EA : AF :: EI : BF; \quad BF \cdot EA = AF \cdot EI = AF(EB + BI),$$

et

$$\frac{BF}{AF}EA - EB = BI.$$

Mais $\frac{BF}{AF} = \frac{CF}{CA} = \frac{CD}{CA}$, car les triangles CAF, CFB sont semblables, attendu que les angles AFC, ABF ont chacun la moitié de l'arc AF pour indication. D'ailleurs, puisque l'angle BAF = EAI, l'angle EAF = BAI, et comme les angles AFE, ABI ont chacun pour indication la moitié de l'arc ABE, il y a similitude entre les triangles AEF, AIB. Enfin, AEF est symétrique, car l'angle AFG = 2AFC = AEF + EAF, et AFC = AEF. Donc, BI = AB, de même que EF = AF, et en effet $\frac{CD}{CA}EA - EB = AB$.

La même construction, faite pour un autre rayon incident AF′, donnerait évidemment un point E′ tel qu'on aurait E′F′ = AF′ et $\frac{CD}{CA}E'A - E'B = AB$.

Reste à démontrer que la ligne EE′..... a pour normales les rayons réfléchis FG, F'G, etc. (13). Cela est vrai, si EK, perpendiculaire à GFE, est tangente à la courbe, c'est-à-dire si aucun point de cette courbe, autre que E, ne peut se trouver sur EK.

Considérons le point E', relatif à l'incidence F'. Les tangentes FH, F'H' du cercle C sont bissectrices des angles AFE, AF'E', par suite de la loi de réflexion, et AF = EF, AF' = E'F'. L'intersection L des deux tangentes donne donc AFL = EFL, AF'L = E'F'L, puis LE = LA = LE', ce qui montre que E, E', A sont sur une circonférence décrite de L. Or, si E' se trouvait sur EK, l'angle droit E'EF serait inscrit au cercle L, et la droite E'LP formerait un diamètre, de sorte que l'angle EPE' vaudrait EAE'. On aurait donc aussi EPE' = FCF', car EAE' = FCF', puisque AE, AE' sont perpendiculaires aux tangentes FH, F'H', comme CF, CF'. Il faudrait, par conséquent, que les prolongements de FP, LP interceptassent, sur la circonférence C, un arc qui fût seulement égal à la différence F'Q des arcs FF', FQ. Mais, pour que cela eût lieu, la parallèle de QP, tirée de F', devrait aller couper une seconde fois le cercle C au même point que FG, ce qui est impossible, puisque cette parallèle passe nécessairement entre P et l'intersection G des rayons réfléchis FG, F'G, intersection qui se rapproche de F, à mesure que E' se rapproche de E.

On verrait de même qu'un point pris sur EE'...., à l'opposite de E', par rapport à E, ne peut se trouver sur le prolongement de KE.

PROBLÈME : *Tracer une développante de la caustique due à un miroir circulaire et à un point lumineux moins écarté du centre que la circonférence.*

Elevez des perpendiculaires au milieu d'un rayon incident AF (P. VIII, F. 11) et à l'extrémité du rayon CF du miroir ; décrivez, du concours H, une circonférence qui passe par A, F, et faites les arcs FE, *fe* égaux respectivement aux arcs FA, *f*A ; les points E, *e* appartiendront à la courbe cherchée, et l'intersection B de la circonférence H avec le prolongement de CA sera le second régulateur.

Abaissez ensuite une perpendiculaire de H au milieu de AB ; décrivez, de différents points H', H'', pris sur cette perpendiculaire, des arcs qui passent par A et B ; puis, coupez ces arcs par d'autres, décrits des points F', *f'*, F'' où les premiers rencontrent le miroir, avec les rayons F'A, *f'*A, F''A ; les intersections E', *e'*, E'' seront sur l'une des développantes de la caustique par réflexion (12).

Pour avoir le point M, où la courbe coupe son axe de symétrie AB, il suffit de prendre la distance DM égale à AD, et pour marquer les points N, N', qui se trouvent sur la perpendiculaire OH au milieu de la droite AB des régulateurs, il faut décrire de A un arc dont le rayon vaille CD + CA.

Démonstration : Les deux premières parties de la construction sont évidemment justifiées par le n° 390.

Le point M doit donner

$$\frac{CD}{CA}MA - MB = AB.$$

Il en résulte

$$\frac{CD}{CA}MA - (AB - MA) = AB, \quad \frac{CD}{CA}MA + MA = 2AB,$$

$$MA(CD + CA) = 2AB \times CA,$$

$$MA(CD + CA) = 2(CB - CA)CA = 2(CB \times CA - \overline{CA}^2).$$

Mais $CB = \frac{\overline{CF}^2}{CA} = \frac{\overline{CD}^2}{CA}$. Par conséquent,

$$MA = 2\frac{(\overline{CD}^2 - \overline{CA}^2)}{CD + CA} = 2(CD - CA) = 2AD \quad \text{et} \quad DM = DA.$$

Pour les points N, N′, on a

$$\frac{CD}{CA}NA - NA = AB,$$

car NB = NA. En conséquence,

$$NA(CD - CA) = AB \times CA = (CB - CA)CA = \overline{CD}^2 - \overline{CA}^2,$$

et

$$NA = CD + CA.$$

391. *Lorsque la distance d'un point lumineux* A *au centre* C *d'un miroir circulaire et concave* (P. VIII, F. 12) *surpasse le rayon* CD *du cercle, la développante de la caustique peut être engendrée par un point* E *mobile sur un véhicule droit, à point fixe situé au milieu* O *de la droite* AB *de deux régulateurs.*

L'un des deux régulateurs est le point lumineux A; l'autre B appartient à la droite AC, qui joint le premier au centre du miroir; CB : CD :: CD : CA, et le point générateur se meut de manière que $EB - \frac{CD}{CA}EA = AB$.

On voit, comme dans le n° 390, que $BF \times EA = AF \times EI$. Mais ici $EI = EB - BI$. Par conséquent,

$$\frac{BF}{AF}EA = EB - BI, \quad \text{et} \quad EB - \frac{BF}{AF}EA = BI.$$

D'ailleurs, les relations $\frac{BF}{AF} = \frac{CD}{CA}$, $BI = AB$ ont encore lieu, et EK, perpendiculaire à EG, est tangente à la courbe EE′N.

PROBLÈME : *Tracer une développante de la caustique due à un miroir circulaire concave et à un point lumineux plus écarté du centre que la circonférence.*

Agissez comme dans le problème précédent (390), soit pour trouver les points E, E', etc. (P. VIII, F. 12), soit pour marquer le point M où la courbe coupe son axe de symétrie AB, et les points N, N' situés sur la perpendiculaire OH au milieu de la droite des régulateurs.

392. *La développante d'une caustique due à un miroir circulaire et convexe peut être engendrée par un point* E *mobile sur un véhicule droit, à point fixe situé au milieu* O *de la droite* AB *de deux régulateurs* (P. VIII, F. 13).

L'un des deux régulateurs est le point lumineux A; l'autre B appartient à la droite AC, qui joint le premier au centre du miroir; CB : CD :: CD : CA, et le point générateur se meut de manière que $\frac{CD}{CA}EA + EB = AB$.

On a, comme dans le n° 390, $BF \times EA = AF \times EI$. Mais ici $EI = BI - EB$. Conséquemment,

$$\frac{BF}{AF}EA = BI - EB, \quad \text{et} \quad \frac{BF}{AF}EA + EB = BI.$$

D'ailleurs, la relation $\frac{BF}{AF} = \frac{CD}{CA}$ a encore lieu; $BI = AB$, parce que l'angle $AFG = 2AFC' = AEF + EAF$, et que $AEF = AFC'$; enfin, un raisonnement qu'il est facile de faire, d'après celui qui termine le n° 390, démontrerait que EK, perpendiculaire à EFG, ne peut couper la courbe EE'.... ni à droite, ni à gauche de E, et que, par conséquent, les rayons réfléchis EFG, etc., sont les normales de cette courbe.

PROBLÈME: *Tracer une développante de la caustique due à un miroir circulaire et convexe.*

Agissez comme dans le problème du n° 390, soit pour trouver les points E, *e*, E', *e'*, etc. (P. VIII, F. 13), soit pour marquer le point M où la courbe a une intersection simple avec son axe de symétrie AB. Les points N, N', situés sur la perpendiculaire OH au milieu de la droite des régulateurs, sont éloignés de A d'une quantité égale à AD. Enfin, la développante a en A une intersection double avec son axe de symétrie.

Démonstration: Chacun des points N, N' donne la relation

$$\frac{CD}{CA}NA + NA = AB.$$

Il s'ensuit

$$(CD + CA)NA = AB \times CA = (CA - CB)CA = \overline{CA}^2 - \overline{CD}^2,$$

et

$$NA = CA - CD = AD.$$

Parmi tous les rayons incidents, il en est deux AP, AP' qui sont tangents au miroir. Le triangle APC est rectangle; son côté CP égale la moyenne proportionnelle entre l'hypothénuse CA et la distence du point C au pied de la perpendiculaire abaissée de P sur CA. Or CP est aussi une moyenne proportionnelle entre CA et CB, puisque le régulateur B dépend de la proportion CB : CD :: CD : CA. Donc, le point B forme le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur CA; OH, parallèle à BP, coupe AP comme AB, en deux parties égales; AP est diamètre du cercle qui passe par A, P, B; la corde AP ne peut être portée que sur elle-même, pour déterminer le point de la courbe situé sur la circonférence APB, et A est un point qui répond sur cette courbe soit à l'incidence P, soit à l'incidence P'.

On peut dire aussi que les rayons lumineux AP, AP' se réfléchissent selon leurs prolongements, et que ces prolongements ne peuvent couper, pour la seconde fois, qu'en A, les circonférences APB, AP'B. Au reste, le point A satisfait à la condition qui règle le mouvement du point générateur, car $\frac{CD}{CA}AA + AB = AB$, puisque la distance AA est nulle.

DÉVELOPPANTES DE CAUSTIQUES PAR RÉFRACTION.

593. *Lorsqu'un plan sépare les milieux, et que chaque rayon lumineux se réfracte en se rapprochant de la normale au point d'incidence, la caustique a pour développante une branche d'hyperbole.*

Soient A le point lumineux (P. VIII, F. 14), DD' la trace du plan vertical qui sépare les milieux, AF un rayon incident horizontal, CFK perpendiculaire à DD', et FG le rayon réfracté. La perpendiculaire élevée au milieu de AF coupe DD' en un point H, centre d'un cercle qui touche CK au point F, passe par A, et rencontre AO, parallèle à CK, en un point B tel qu'on a AO = BO, AF = BF. Prolongeons le rayon réfracté GF, jusqu'à ce qu'il coupe le cercle une seconde fois en E; tirons les cordes AE, BE, et portons la première sur la seconde, de E en I.

L'égalité des angles inscrits AEI, AFB rend semblables les triangles symétriques AEI, AFB, et égaux les angles EAI, BAF. Il y a donc aussi égalité entre les angles EAF, BAI, et similitude entre les triangles EAF, BAI;

$$AB : BI :: AF : EF, \quad \text{et} \quad BI = BE - AE = AB\frac{EF}{AF} = AB\frac{\frac{1}{2}EF}{\frac{1}{2}AF}.$$

Or, $\frac{1}{2}$EF est, pour HE, le sinus de l'angle EHF = CFE = GFK; $\frac{1}{2}$AF est le sinus de l'angle AHF = CFA. Si donc nous prenons FG = AF, et que nous abaissions sur CK les perpendiculaires AC, GK, sinus pour AF, nous aurons

$$\frac{\frac{1}{2}EF}{\frac{1}{2}AF} = \frac{GK}{AC}, \qquad BE - AE = AB\frac{GK}{AC}.$$

Un autre rayon incident AF' donnerait

$$BE' - AE' = AB\frac{G'K'}{AC'},$$

et d'après la loi de la réfraction, $\frac{G'K'}{AC'} = \frac{GK}{AC}$. En conséquence,

$$BE' - AE' = BE - AE,$$

ce qui montre que les points E, E', etc., sont sur l'une des hyperboles qui ont A, B pour foyers (246). Tous, d'ailleurs, se trouvent évidemment du même côté de l'axe déclinant DD'.

Enfin, les rayons réfractés EG, E'G' sont des normales de la branche d'hyperbole EE'...; car (267) l'angle BEG a pour indication la moitié de l'arc BF; l'angle GEL, formé par le prolongement de de AE, a pour indication la moitié de AE+EF, et AE+EF = BF.

PROBLÈME : *Tracer la branche d'hyperbole développante d'une caustique due à la réfraction qui se fait sur un plan et rapproche le rayon de la normale.*

Abaissez, du point lumineux A, une perpendiculaire AB sur le plan DD' de séparation (P. VIII, F. 14); prenez OB = OA; les points A, B seront les foyers de l'hyperbole, et O en formera le centre.

Tirez, par A, une droite quelconque AM; prenez sur AB une longueur AN, et sur AM une longueur AP qui soient entre elles comme le sinus de l'angle d'incidence est au sinus de l'angle de réfraction; puis menez BM parallèlement à NP; AM sera l'axe transverse, et vous pourrez appliquer les solutions du problème *b* (248).

Démonstration : Soit $\frac{i}{r}$ le rapport du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction, r étant un nombre moindre que i. On aura

$$AB : AM :: AN : AP :: i : r :: AC : GK,$$

et

$$AM = AB\frac{GK}{AC} = BE - AE.$$

Donc AM est bien l'axe transverse de l'hyperbole EE'.... (246).

594. *Lorsqu'un plan sépare les milieux, et que chaque rayon se réfracte en s'écartant de la normale au point d'incidence, la caustique a pour développante une demi-ellipse.*

Le point E se détermine comme dans le cas précédent (P. VIII, F. 15); mais en raison de ce que l'angle de réfraction GFK ou CFE surpasse l'angle d'incidence AFC, ce point E se trouve au-delà de AB, au lieu d'être en-deçà, comme dans la figure 14.

Prolongeons la corde BE d'une quantité EI égale à la corde AE;

nous verrons (393) que

$$BI = BE + AE = AB\frac{EF}{AF} = AB\frac{GK}{AC}.$$

Un autre rayon incident AF′ donnerait

$$BE' + AE' = AB\frac{G'K'}{AC'}.$$

Par conséquent,

$$BE + AE = BE' + AE',$$

ce qui prouve (52) que les points E, E′ sont sur l'une des ellipses qui ont A, B pour foyers, et comme l'angle BEF = AEF, les rayons réfractés EFG, E′F′ forment des normales de cette courbe (70).

Enfin, la développante de la caustique est seulement la demi-ellipse DEE′D′; car les rayons réfractés extrêmes se confondent nécessairement avec DD′, et cet axe est en conséquence la dernière normale de la développante.

PROBLÈME : *Tracer la dèmi-ellipse développante d'une caustique due à la réfraction qui se fait sur un plan et écarte le rayon de la normale.*

Le foyer B, le centre O et la longueur AM du grand axe (P. VIII, F. 15) se déterminent comme leurs analogues du problème précédent, et il ne reste plus qu'à faire l'application du problème *e* (53).

395. *Lorsque la ligne séparatrice des milieux est une circonférence* C (P. VIII, F. 16), *dans l'intérieur de laquelle se trouve le point lumineux* A, *et que la distance* AC *de ce point au centre contient le rayon* CD *comme le sinus d'incidence contient le sinus de réfraction, la caustique due au plus grand des arcs formés par la corde d'équerre en* A *sur* AC, *a pour développante un cercle.*

Le concours H de la perpendiculaire FH à l'extrémité de CF et de la perpendiculaire au milieu du rayon incident AF, est le centre d'une circonférence qui passe par A, touche CF en F, et coupe le prolongement de CA en un point B, tel que

$$CB : CF :: CF : CA.$$

Les triangles ACF, FCB sont donc semblables;

$$AF : BF :: CA : CF; \quad \tfrac{1}{2}AF : \tfrac{1}{2}BF :: CA : CD;$$

$$\sin AFC : \sin BFC :: CA : CD.$$

Mais, par hypothèse, le rayon réfracté FG donne

$$\sin AFC : \sin GFC' :: CA : CD,$$

et l'angle GFC′ est aigu comme AFC. Conséquemment, GFC′ = BFC; tout rayon réfracté se dirige au point B; ce point est la caustique, et un cercle quelconque, décrit de B, en forme la développante (14).

396. *Lorsque la ligne séparatrice des milieux est une circonfé-*

rence C (P. VIII, F. 17), *à l'extérieur de laquelle se trouve le point lumineux* A, *et que la distance* AC *de ce point au centre contient le rayon* CD *comme le sinus d'incidence contient le sinus de réfraction, la caustique due au plus grand des deux arcs compris entre les tangentes issues de* A, *a pour développante un cercle.*

La démonstration précédente s'applique entièrement à ce principe.

597. *Dans toutes les autres circonstances où la ligne séparatrice des milieux est une circonférence, la développante de la caustique n'est plus un cercle ; mais elle peut toujours être engendrée par un point mobile sur un véhicule droit, à point fixe situé au milieu de la droite de deux régulateurs.*

L'un des régulateurs est le point lumineux A (P. VIII, F. 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26) ; l'autre B appartient à la droite AC, qui joint le premier au centre du cercle ; CB : CD :: CD : CA ; et le point générateur E se meut de manière que toujours

$$\pm\frac{CD}{CA}EA\mp EB=\frac{r}{i}AB,$$

i étant le sinus de l'angle d'incidenee, r celui de l'angle de réfraction. Cette condition du mouvement ne présente pourtant que trois cas, car les deux signes — du premier membre ne peuvent s'accorder avec le signe + du second.

PREMIER CAS. *La développante de la caustique a pour équation*

$$\frac{CD}{CA}EA-EB=\frac{r}{i}AB,$$

quand le point lumineux A *est dans le cercle* C (F. 18), *que la réfraction se fait seulement sur le plus grand des arcs formés par la corde* KAL *d'équerre sur* AC, *et qu'on a* $r>i$, $\frac{r}{i}>\frac{CD}{CA}$, *ou bien quand le point lumineux est extérieur, que la réfraction se fait seulement sur le plus grand des arcs compris entre les tangentes issues de ce point, et qu'on a* $r<i$, $\frac{r}{i}<\frac{CD}{CA}$.

Considérons le rayon incident AF ; élevons une perpendiculaire au milieu de AF, et une autre à l'extrémité F de CF ; leur concours H sera le centre d'un cercle qui passera par A, F, touchera le rayon CF en F, et coupera le prolongement de CA en un point B, tel qu'on aura CB : CF :: CF : CA. L'intersection B est donc le second régulateur.

Prenons, pour le rayon réfracté, une droite FG qui donne $r>i$, EF > BF. Il en résultera

$$\frac{r}{i}>\frac{CD}{CA}.$$

Effectivement, l'égalité des angles AFC, ABF rend semblables les triangles ACF, FCB;

$$\mathrm{AF} : \mathrm{BF} :: \mathrm{CA} : \mathrm{CF}, \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{AF}} = \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CA}}.$$

Mais, $\sin \mathrm{AFC} = \frac{1}{2}\mathrm{AF}$, $\sin \mathrm{C'FG}$ ou $\sin \mathrm{EFC} = \frac{1}{2}\mathrm{EF}$; $\frac{r}{i} = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{AF}}$; $\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{AF}} > \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{AF}}$; par conséquent,

$$\frac{r}{i} > \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CA}},$$

puisque $\mathrm{CF} = \mathrm{CD}$.

Je dis maintenant que le point E satisfait à l'égalité

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CA}}\mathrm{EA} - \mathrm{EB} = \frac{r}{i}\mathrm{AB}.$$

Soit EI une quatrième proportionnelle à AF, BF, EA. L'égalité des angles inscrits AFB, AEI rend semblables les triangles ABF, AIE;

$$\mathrm{EA} : \mathrm{AF} :: \mathrm{EI} : \mathrm{BF}; \quad \mathrm{BF} \times \mathrm{EA} = \mathrm{AF} \times \mathrm{EI};$$

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{AF}}\mathrm{EA} = \mathrm{EB} + \mathrm{BI}, \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{AF}}\mathrm{EA} - \mathrm{EB} = \mathrm{BI}.$$

Mais, d'après ce qui précède, $\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{AF}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CA}}$. Puisque l'angle $\mathrm{EAI} = \mathrm{BAF}$, l'angle $\mathrm{BAI} = \mathrm{EAF}$; en outre, les angles ABI, AFE ont chacun pour indication la moitié de AB + BE. Les triangles BAI, FAE sont donc semblables;

$$\mathrm{BI} : \mathrm{EF} :: \mathrm{AB} : \mathrm{AF}; \quad \mathrm{BI} = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{AF}}\mathrm{AB} = \frac{r}{i}\mathrm{AB}.$$

Conséquemment enfin,

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CA}}\mathrm{EA} - \mathrm{EB} = \frac{r}{i}\mathrm{AB}.$$

La même construction et les mêmes raisonnements faits pour un autre rayon incident AF′, montreraient que le point E′ correspondant donne

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CA}}\mathrm{E'A} - \mathrm{E'B} = \frac{r}{i}\mathrm{AB}.$$

Reste à faire voir que le rayon réfracté EFG est normal à la courbe EE′.... D'abord, la relation EF : AF :: E′F′ : AF′ donne

$$\mathrm{EF} : \mathrm{AF} :: \mathrm{E'F'} - \mathrm{EF} : \mathrm{AF'} - \mathrm{AF};$$

d'où il suit que EF et AF éprouvent des accroissements respectivement proportionnels à leurs longueurs. Or, le point A autour duquel pivote AF peut être considéré comme un cercle infiniment petit, par le centre duquel passe toujours le rayon incident. Si donc l'arc FF' est très-petit, EF devra, dans toutes ses positions, passer par un certain point a, et appuyer son extrémité E sur l'arc décrit de ce point, avec aE pour rayon. Ainsi, cet arc se confondra avec EE', et comme EF, E'F' sont ses normales, la courbe coupe d'équerre les rayons réfractés.

On verrait de même que la développante de la caustique due à l'arc LD'K (F. 19) a pour équation

$$\frac{CD}{CA}EA - EB = \frac{r}{i}AB,$$

quand le point lumineux A est hors du cercle séparateur, et qu'à la fois $r < i$, $\frac{r}{i} < \frac{CD}{CA}$.

PROBL. (a) : *Tracer la première développante du premier cas* (P. VIII, F. 18).

Tirez un rayon incident du point A à l'un de ceux du grand arc KD'L; élevez deux perpendiculaires, l'une au milieu de ce rayon AF, l'autre à l'extrémité F, sur le rayon CF du cercle séparateur; décrivez, de leur concours H, la circonférence BAF; cherchez une droite qui contienne AF comme le sinus de réfraction contient le sinus d'incidence; l'arc EAF qu'elle pourra soutendre, dans le cercle H, aura son extrémité E sur la courbe demandée.

Abaissez ensuite une perpendiculaire de H sur AB; décrivez de H', un quelconque de ses points, une nouvelle circonférence qui passe par A et par B; cherchez une quatrième proportionnelle à AF, EF, AF'; portez-la, comme corde, sur la circonférence H', à partir de F'; l'autre extrémité E' de l'arc qu'elle y marquera sera un nouveau point de la courbe, et vous en trouverez de la même manière autant d'autres que vous voudrez.

Pour obtenir l'intersection M' de la développante et de son axe de symétrie AB, il faut chercher une quatrième proportionnelle à AF, EF — AF, AD', et la porter sur AB, de A vers B.

Pour trouver le point e où commence la courbe, déterminez la quatrième proportionnelle de EF, AF, CD; portez-la, comme corde et à partir de C, sur la demi-circonférence dont AC est le diamètre; tracez, par le point N qui en résulte, le rayon incident ANf; menez en f une tangente ef au cercle séparateur C; puis décrivez la circonférence BAf; le point e, où elle coupera ef pour la seconde fois, sera l'origine de la développante.

Démonstration: Les deux premières parties de la construction sont évidemment fondées sur le n° 397.

Le point M' doit donner

$$\frac{CD}{CA}M'A - M'B = \frac{r}{i}AB.$$

Il en résulte

$$\frac{CD}{CA}M'A-(M'A-AB)=\frac{r}{i}AB,\quad \frac{CD}{CA}M'A-M'A=\frac{r}{i}AB-AB,$$

$$\frac{CD-CA}{CA}M'A=\frac{r-i}{i}AB=\frac{r-i}{i}(BC-CA)=\frac{r-i}{i}\left(\frac{\overline{CD}^2}{CA}-CA\right)$$

$$=\frac{r-i}{i}\left(\frac{\overline{CD}^2-\overline{CA}^2}{CA}\right).$$

Par conséquent,

$$(CD-CA)M'A=\frac{r-i}{i}(\overline{CD}^2-\overline{CA}^2),$$

$$M'A=\frac{r-i}{i}(CD+CA)=\frac{r-i}{i}AD'=\frac{EF-AF}{AF}AD'.$$

Le dernier rayon qui puisse passer d'un milieu dans l'autre est nécessairement celui que la réfraction rend tangent au cercle séparateur C. La proportion $\sin AfC : \sin efC :: i : r$ devient donc

$$\sin AfC : 1 :: i : r,$$

et donne

$$\sin AfC=\frac{i}{r},\quad \text{puis}\quad CD\sin AfC=\frac{AF}{EF}CD,$$

ce qui montre que, pour le rayon CD, le sinus CN du plus grand angle d'incidence est la quatrième proportionnelle de EF, AF, CD. Or, l'angle ANC, étant droit, doit avoir son sommet sur la circonférence dont AC est le diamètre.

On peut voir autrement, du reste, que l'extrémité K de l'arc KD'L ne saurait répondre, comme incidence, à un point x de la développante. En effet, puisque $BC : CK :: CK : CA$, l'angle BKC est droit, comme l'angle BAK, et il s'ensuit

$$BK : AK :: CK : CA \quad \text{ou} \quad \frac{BK}{AK}=\frac{CD}{CA}.$$

Ainsi, la condition $\frac{EF}{AF}>\frac{CD}{CA}$, qui devient ici $\frac{Kx}{AK}>\frac{CD}{CA}$, rend $Kx>BK$. Mais BK, étant diamètre de la circonférence BAK, ne peut être surpassé par aucune corde de cette courbe. Donc, le point x, supposé sur la développante, n'existe pas.

PROBL. (b) : *Tracer la seconde développante du premier cas* (P. VIII, F. 19).

Vous trouverez les points E, E', etc., comme dans le problème précédent ; la distance AM', du point lumineux à l'intersection de la courbe et de son axe de symétrie AB, est une quatrième proportionnelle à AF, AF — EF, AD', parce qu'ici l'angle d'incidence surpasse l'angle de réfraction; enfin l'origine e de la développante répond, pour la même raison, à l'incidence K, extrémité de l'arc séparateur KD'L.

398. Deuxième cas. *La développante de la caustique a pour équation*

$$-\frac{CD}{CA}EA + EB = \frac{r}{i}AB,$$

quand le point lumineux A *est dans le cercle* C (P. VIII, F. 20) *et que* $r < i$; *quand le point lumineux est extérieur* (F. 21), *que la réfraction se fait seulement sur le plus petit des arcs compris entre les tangentes issues de ce point, et qu'on a* $r < i$; *quand le point lumineux est extérieur* (F. 22), *que la réfraction a lieu seulement sur le plus grand arc et qu'on a* $r > i$.

La démonstration est absolument, pour les trois figures, la même que celle du n° 397.

Probl. (*a*) : *Tracer la première développante du second cas* (P. VIII, F. 20).

Opérez comme dans le problème *a* (397), pour trouver les points E, E', etc. La distance AM est une quatrième proportionnelle à AF, AF — EF, AD, et la distance AM' s'obtient de la même manière, en remplaçant AD par AD'.

Probl. (*b*) : *Tracer la seconde développante du second cas* (P. VIII, F. 21).

Opérez comme dans le problème *a* (397), pour trouver les points E, E', etc.

Le point M s'obtient au moyen de la distance AM, quatrième proportionnelle de AF, AF — EF, AD.

Les origines e, e' de la courbe répondent aux incidences K, L, extrémités de l'arc séparateur KDL.

Probl. (*c*) : *Tracer la troisième développante du second cas* (P. VIII, F. 22).

Opérez comme dans le problème *a* (397), pour trouver les points E, E', etc.

Le point M' provient de AM', quatrième proportionnelle entre AF, EF — AF, AD'.

Les origines e, e' s'obtiennent comme celles de la courbe du problème *a* (397).

399. Troisième cas. *La développante de la caustique a pour équation*

$$\frac{CD}{CA}EA + EB = \frac{r}{i}AB,$$

quand le point lumineux A *est dans le cercle* C *et qu'on a, soit*

$r > i$ et $\frac{r}{i} < \frac{CD}{CA}$ (P. VIII, F. 23), *soit $r > i$ et $\frac{r}{i} \geq \frac{CD}{CA}$, la réfraction se faisant seulement sur le plus petit arc, dans cette seconde circonstance* (F. 24).

L'équation de la courbe est encore la même, quand le point lumineux se trouve extérieur, et que la réfraction, se faisant seulement sur le petit arc (F. 25), *rend $r > i$, ou que la réfraction, se faisant seulement sur le grand arc* (F. 26), *rend à la fois $r < i$, $\frac{r}{i} > \frac{CD}{CA}$.*

Les raisonnements sont, pour les quatre figures, absolument les mêmes que ceux du n° 397.

Probl. (*a*) : *Tracer la première développante du troisième cas* (P. VIII, F. 23).

Opérez comme dans le problème *a* (397), pour trouver les points E, E′, etc.

Les distances AM, AM′ sont respectivement des quatrièmes proportionnelles à AF, EF — AF, AD, et à AF, EF — AF, AD′.

Probl. (*b*) : *Tracer la seconde développante du troisième cas* (P. VIII, F. 24).

Opérez comme dans le problème *a* (397), pour trouver les points E, E′, etc.

La distance AM est la quatrième proportionnelle de AF, EF — AF, AD.

Les origines *e*, *e′* répondent aux incidences K, L.

Probl. (*c*) : *Tracer la troisième développante du troisième cas* (P. VIII, F. 25).

Opérez comme dans le problème *a* (397), pour trouver les points E, E′, etc.

La distance AM est la quatrième proportionnelle de AF, EF — AF, AD.

Les origines *e*, *e′* s'obtiennent comme celles de la courbe du problème *a* (397).

Probl. (*d*) : *Tracer la quatrième développante du troisième cas* (P. VIII, F. 26).

Opérez comme dans le problème *a* (397), pour trouver les points E, E′, etc.

La distance AM′ est quatrième proportionnelle à AF, AF — EF, AD′.

Les origines *e*, *e′* répondent aux incidences K, L.

LEMNISCATES.

400. Les *lemniscates* sont des courbes qui ressemblent, comme l'indique leur nom, au système des deux ganses d'un nœud de ruban; elles ont donc à peu près la forme du chiffre 8. Il y en a de régulières et d'irrégulières; mais nous n'étudierons qu'une seule de ces dernières: la méridienne du temps moyen.

Toutes les lemniscates régulières ont deux axes de symétrie, l'un limité, l'autre illimité, qui se coupent d'équerre au croisement; de sorte que ce point de double inflexion est le centre de chaque courbe, en même temps que le point fixe autour duquel pivote le véhicule droit du point générateur.

LEMNISCATE DE CASSINI.

401. *Un point* E, *mobile sur le véhicule* OE (P. IX, F. 1), *engendre la lemniscate de Cassini, lorsque le produit de ses distances* ER, ER' *aux régulateurs vaut constamment le quarré numérique de l'excentricité* OR.

La relation générale $rr' = 2ne^2$ du n° 376 devient alors $rr' = e^2$, ce qui exige que $n = \frac{1}{2}$. Or, le petit axe d'une ovale de Cassini est toujours tel que son quarré numérique $\overline{OC}^2 = (2n - 1)e^2$. En conséquence, ce petit axe est nul dans le cas présent, et ses extrémités se confondent avez le point fixe O; de sorte que l'ovale de Cassini ou la cassinoïde symétrique (387) se change en deux ovales irrégulières AEOE', BE''OE''', ou en une lemniscate AEOE'''BE''OE', qui a pour axes de symétrie les droites d'équerre AB, CD, et pour centre le croisement O.

402. *Le quarré numérique du demi-axe limité d'une lemniscate de Cassini est double du quarré de l'excentricité.*

Les rayons vecteurs du sommet A (P. IX, F. 1) donnent

$$AR \times AR' = \overline{OR}^2.$$

Donc,

$$(OA - OR)(OA + OR) = \overline{OR}^2, \quad \overline{OA}^2 - \overline{OR}^2 = \overline{OR}^2 \quad \text{et} \quad \overline{OA}^2 = 2\overline{OR}^2.$$

Probl. (a): *Tracer une lemniscate de Cassini dont on connaît l'axe limité.*

Partagez l'axe donné AB en deux parties égales OA, OB (P. IX, F. 1); cherchez la moyenne proportionnelle de OA, $\frac{1}{2}$OB; vous aurez OR, puisque $\overline{OR}^2 = OA \times \frac{1}{2}OA$, et vous pourrez marquer les régulateurs.

Décrivez alors deux arcs, de R et de R', avec un rayon RE > AR et < AR'; cherchez la troisième proportionnelle de RE, OR; puis, décrivez, avec cette longueur, deux autres arcs: l'un de R' qui coupe l'arc R aux points E, E'; l'autre de R qui coupe le premier arc R' aux points E'', E'''. Les quatre points ainsi obtenus seront sur la courbe cherchée, puisqu'on aura, par exemple,

$$ER \times ER' = \overline{OR}^2.$$

Probl. (*b*) : *Tracer une lemniscate de Cassini dont les régulateurs sont donnés.*

Partagez la droite RR' des régulateurs en deux parties égales OR, OR' (P. IX, F. 1); cherchez la moyenne proportionnelle de OR, 2OR; vous aurez OA, OB (402), et vous pourrez achever comme dans le problème précédent.

Probl. (*c*) : *Tracer une lemniscate de Cassini dont l'axe limité et les régulateurs sont donnés.*

Assurez-vous si le demi-axe OA (P. IX, F. 1) se trouve moyen proportionnelle entre OR, 2OR (402). Dans le cas de l'affirmative, la solution est possible, et elle s'exécute comme celle du problème *a*.

Probl. (*d*) : *Mener une tangente à la lemniscate de Cassini, par un point donné sur cette courbe.*

Opérez comme dans le problème *i* du n° 385.

LEMNISCATE HYPERBOLIQUE.

403. La *lemniscate hyperbolique* dépend de l'hyperbole équilatère qui a même centre, et l'axe limité pour axe transverse : *elle est le lieu où chaque tangente de l'hyperbole coupe sa perpendiculaire abaissée du centre.*

Ce lieu forme en effet une courbe en 8 dont le croisement se trouve au centre S de l'hyperbole équilatère (P. IX, F. 2), et dont les sommets se confondent avec ceux de la courbe régulatrice.

D'abord, les sommets A, B de l'hyperbole sont les intersections des tangentes en ces points et de leurs perpendiculaires SA, SB (251). A mesure que le contact E s'élève, par exemple, sur la moitié supérieure de la branche de droite, la tangente EG fait, avec SB, un angle de plus en plus aigu, et la perpendiculaire SG forme, au contraire, sur la même droite, un angle de plus en plus ouvert. Par conséquent, l'intersection G s'éloigne de SB, pendant un certain temps; mais elle s'en rapproche ensuite, et finit même par tomber sur le centre S, car la limite des tangentes à l'arc infini BE est l'asymptote SY (233), qui, dans l'hyperbole équilatère, a l'autre asymptote SZ pour perpendiculaire (240). Ainsi, le lieu des intersections G, pour les deux branches, se compose de quatre lignes courbes issues de S et raccordées deux à deux aux points A, B.

404. *La distance du centre* S *au point générateur* G *d'une lem-*

niscate hyperbolique (P. IX, F. 2) *égale toujours une troisième proportionnelle à la distance* SE *du contact correspondant de l'hyperbole régulatrice, et au demi-axe* SB.

Il s'agit de démontrer la proportion

$$SE : SB :: SB : SG.$$

Abaissons de E la perpendiculaire EH sur l'axe AB. Les triangles rectangles IGS, IHE seront semblables et donneront

$$SG : EH :: GI : IH, \quad \overline{SG}^2 : \overline{EH}^2 :: \overline{GI}^2 : \overline{IH}^2.$$

Mais (243), $\overline{EH}^2 = \dfrac{\overline{SC}^2}{\overline{SB}^2}(\overline{SH}^2 - \overline{SB}^2)$, et puisque $SC = SB$ dans l'hyperbole équilatère (240),

$$\overline{EH}^2 = \overline{SH}^2 - \overline{SB}^2.$$

D'un autre côté (253), $SI = \dfrac{\overline{SB}^2}{SH}$, ce qui fournit

$$\overline{GI}^2 = \overline{SI}^2 - \overline{SG}^2 = \frac{\overline{SB}^4}{\overline{SH}^2} - \overline{SG}^2 = \frac{\overline{SB}^4 - \overline{SG}^2 \times \overline{SH}^2}{\overline{SH}^2}.$$

En troisième lieu (254), $\overline{IH}^2 = \dfrac{(\overline{SH}^2 - \overline{SB}^2)^2}{\overline{SH}^2} = \dfrac{\overline{EH}^4}{\overline{SH}^2}$. Par conséquent,

$$\overline{SG}^2 : \overline{EH}^2 :: \frac{\overline{SB}^4 - \overline{SG}^2 \times \overline{SH}^2}{\overline{SH}^2} : \frac{\overline{EH}^4}{\overline{SH}^2}.$$

Multipliant les deux termes du second rapport par $\overline{SH}^2$ et divisant les conséquents par $\overline{EH}^2$, on obtient

$$\overline{SG}^2 : 1 :: \overline{SB}^4 - \overline{SG}^2 \times \overline{SH}^2 : \overline{EH}^2,$$

puis

$$\overline{SG}^2 \times \overline{EH}^2 = \overline{SB}^4 - \overline{SG}^2 \times \overline{SH}^2, \quad \overline{SG}^2(\overline{EH}^2 + \overline{SH}^2) = \overline{SB}^4,$$
$$\overline{SG}^2 \times \overline{SE}^2 = \overline{SB}^4,$$

et enfin,

$$SG = \frac{\overline{SB}^2}{SE},$$

résultat conforme à la proportion du principe.

PROBLÈME : *Tracer une lemniscate hyperbolique sur une droite donnée pour axe, sans employer l'hyperbole régulatrice.*

Divisez la droite donnée AB en deux parties égales (P. IX, F. 2); décrivez une circonférence dont la moitié SB soit diamètre; tirez par S deux droites SK, SK′ qui fassent des angles égaux avec SB; prenez l'arc KL égal à BK; rapportez SL sur SB, de S en M;

élevez au point M une perpendiculaire sur SB, jusqu'à la rencontre N de la circonférence; enfin, portez SN sur SK, SK′ et sur leurs prolongements : les quatre points G, G′, G″, G‴, qui en résulteront, appartiendront à la courbe demandée, et vous en trouverez d'autres en faisant les mêmes opérations pour de nouvelles droites tirées comme SK, SK′.

Remarquez toutefois que SP, déterminée par le milieu P de la demi-circonférence, est la limite des droites qui, menées par le centre, puissent couper la lemniscate ailleurs qu'en S. Il s'ensuit que cette courbe se trouve renfermée tout entière entre SP, SP′ et leurs prolongements; de sorte qu'elle touche ces droites à son double point d'inflexion (8).

Démonstration : Il faut faire voir que la longueur SN, déterminée comme il a été dit, est la distance de S au point de la lemniscate située sur SK.

La corde SN étant moyenne proportionnelle entre le diamètre SB et la partie SM, donne

$$\overline{SN}^2 = SL \times SB.$$

De la similitude des triangles rectangles SLO, SGI, résulte

$$SL : SG :: SO : SI, \quad \text{ou} \quad SL = \frac{SO \times SG}{SI}.$$

Par conséquent,

$$\overline{SN}^2 = \frac{SO \times SB}{SI} SG.$$

Nous avons vu ci-dessus que $IH = \frac{\overline{EH}^2}{SH}$. Ainsi,

$$SH : EH :: EH : IH,$$

ce qui rend semblables les triangles rectangles EHS, EHI, SGI, SLO, SKB, BKO. Or, EHS se compose des triangles EHI, EIS; SKB se compose des triangles BKO, SOB, placés comme les précédents. En conséquence, EIS, SOB sont semblables aussi, et

$$SI : SO :: SE : SB.$$

Mais (404), la valeur trouvée pour SG fournit la proportion

$$SE : SB :: SB : SG.$$

Donc enfin,

$$SI : SO :: SB : SG; \quad \frac{SO \times SB}{SI} = SG, \quad \overline{SN}^2 = \overline{SG}^2 \quad \text{et} \quad SN = SG.$$

Quant à la droite SP, aboutissant au milieu P de la demi-circonférence SPB, elle forme sur SB un angle de 45° et se confond avec l'asymptote SZ. Il en est de même de SP′ pour l'asymptote SY. Or, cette dernière asymptote est la limite des tangentes EG à l'arc hyperbolique BE, et l'autre est la limite des perpendiculaires SG abaissées sur ces tangentes. Conséquemment, aucun point de la lemniscate hyperbolique (403) ne peut se trouver dans les angles ZSY′, YSZ′; le point S de double inflexion doit même être seul sur SP, SP′, ce qui revient à dire que ces droites touchent la courbe au centre.

Applications : La lemniscate hyperbolique est une des courbes les plus gracieuses ; aussi fait-elle partie des figures de l'ornement : on la trouve dans les grilles et les balcons en fer, dans plusieurs produits de la bijouterie, et dans les chaînons de plusieurs chaînes ; elle est surtout d'un bon effet inscrite à un losange, dont ses axes font les diagonales, et accompagnée de deux rosaces qui occupent les rentrants (P. IX, F. 3).

LEMNISCATE DES PISTONS.

405. La lemniscate des pistons est la courbe dont un arc est suivi par le point où s'attache la tige du piston, dans la plupart des machines à vapeur ; elle a deux régulateurs R, R′ (P. IX, F. 4) situés aux extrémités de l'hypothénuse d'un triangle rectangle RDR′, dont le plus petit côté DR′ est le quart du troisième DR. Le véhicule droit tourne autour du milieu C de RR′, et le point générateur s'y meut de manière à rester constamment au milieu du plus petit côté d'un quadrilatère RE′F′R′R dont les angles varient seuls. Le grand côté RR′ de ce quadrilatère reste fixe ; les deux côtés RE′, R′F′ tournent autour de R, R′, et valent chacun la moitié de DR ; le quatrième côté E′F′ égale DR′, et c'est au milieu C′ de celui-là que reste toujours le point générateur.

La courbe a pour centre et double point d'inflexion le milieu C *de* RR′, *pour axe illimité cette même droite, et pour axe limité la perpendiculaire* AB *élevée sur l'autre.*

Prenons le quadrilatère dans sa position REFR′R, où le petit côté EF est perpendiculaire aux côtés égaux RE, R′F. Le milieu C de ce petit côté donne deux triangles égaux CER, CFR′; les trois points R, C, R′ sont en ligne droite, et le point générateur C se trouve au milieu de RR′.

Si maintenant nous faisons descendre RE, R′F, le point E se rapprochera d'abord de la perpendiculaire ACB, et s'en écartera ensuite, tandis que F commencera par s'en éloigner et s'en éloignera de plus en plus. Le milieu C de EF descendra donc entre AB et la circonférence R′. Mais un instant arrive où l'angle REF, qui s'ouvre de plus en plus, atteint 180° ; RE, EF forment alors la droite RE″F″, et R′F″ ne peut plus descendre. Ce côté remonte donc, pendant que RE″ et C″ continuent leurs mouvements. Il s'ensuit que bientôt après le quadrilatère devient le trapèze symétrique RE‴F‴R′, et que le point générateur se trouve de nouveau sur AB.

Mais le point F‴, remontant toujours, continue à se rapprocher de AB, tandis que E‴ s'en écarte encore davantage. Le point générateur doit donc s'éloigner de cette droite, pour passer entre elle et la circonférence R; de plus, il se rapproche de RR′ ou s'écarte de E‴F‴, parce que le quadrilatère, prenant, par rapport à AB, une position symétrique de celle qu'il avait avant d'être trapèze, ne peut donner que des points situés au-dessus de E‴F‴, comme ceux qui précèdent B.

Bientôt, cependant, RE‴ cesse de descendre, attendu que R′F‴E‴, qui n'a cessé de croître depuis le point F″, atteint 180° et met en ligne droite R′F$^{\text{iv}}$, E$^{\text{iv}}$F$^{\text{iv}}$. Tout le quadrilatère remonte donc alors, produisant un arc de courbe CC$^{\text{iv}}$ évidemment symétrique à l'arc CC″, comme BC$^{\text{iv}}$ l'est à BC″. Il donne de nouveau le point C, dans la position RE$^{\text{v}}$F$^{\text{v}}$R′, symétrique de REFR′, par rapport à RR′; puis, le milieu de son petit côté se meut au-dessus de cette droite des régulateurs, comme il s'est mu au-dessous, d'où résulte une seconde ganse CC′AC parfaitement égale à la première CC″BC$^{\text{iv}}$C, et placée comme celle-ci, soit relativement à RR′, soit relativement à AB.

406. *Une partie de la lemniscate des pistons est à fort peu près droite et perpendiculaire à* AD (P. IX, F. 4): *c'est celle qui se trouve comprise entre les positions parallèles* RE, R′F *des côtés égaux du quadrilatère.*

Il en est de même de la partie égale E$^{\text{v}}$F$^{\text{v}}$, par rapport à R′D′, droite symétrique de RD.

Pendant que RE va de sa position à celle de RR′, le point générateur décrit à très-peu près l'arc CF, et R′F parcourt un arc de cercle F*f* un peu plus grand que FF$^{\text{iv}}$. Or, la droite EF, d'équerre sur RD, passe entre *e* et *f*; ses distances à ces deux points, étant fort petites, diffèrent très-peu. Par conséquent, les mêmes distances forment avec *ef*, EF deux triangles rectangles sensiblement égaux; le milieu de *ef* se trouve, pour ainsi dire, sur EF, et à plus forte raison y peut-il être dans les positions que prend le petit côté du quadrilatère entre E, *e*.

Faisons monter le système REFR′, au lieu de le faire descendre; on verrait de même que la droite CE se confond sensiblement avec l'arc correspondant de la lemniscate.

Enfin, le système RE$^{\text{v}}$F$^{\text{v}}$R′, manié comme le précédent, montrerait que la droite E$^{\text{v}}$F$^{\text{v}}$, d'équerre sur R′D′, peut être prise pour l'arc correspondant de la courbe.

Probl. (*a*): *Tracer une lemniscate des pistons dont les régulateurs sont donnés.*

Solution 1: Cherchez une longueur qui soit contenue dans la demi-distance CR des régulateurs R, R′ (P. IX, F. 4) comme 1 dans $\sqrt{17}$, ou à peu près comme 1 dans 4,12; décrivez une demi-circonférence dont CR forme le diamètre; portez-y, comme corde, de C en E, la longueur trouvée; décrivez, de R et de R′, avec RE, deux circonférences, puis, d'un point E′ pris sur l'une, et avec le double de CE, un arc qui coupe ou touche l'autre; joignez E′ au contact ou aux intersections F′, f'; portez CE sur les droites E′F′, E′f', à partir de E′; les points C′, c' ainsi marqués appartiendront à la courbe.

Opérant de même pour d'autres points pris sur la circonférence R ou sur la circonférence R′, vous obtiendrez chaque fois un ou deux points de la lemniscate, dont C sera le centre.

Pour trouver les sommets A, B, vous porterez CE sur RR′, de C en G et en H; vous menerez, par G, H, des parallèles à AB, droite d'équerre en C sur celle des régulateurs; puis, vous joindrez les intersections E‴, F‴ de ces parallèles et des circonférences R, R′. Les points où les droites de jonction couperont AB seront les sommets de la lemnistate.

Démonstration: Il s'agit seulement de justifier la détermination de CE, car le reste de la construction découle du n° 405.

Le parallélisme de CE, R′D donne CE : ER :: R′D : DR, ce qui montre que CE est le quart de ER. Donc

$$\overline{CE}^2 + 16\overline{CE}^2 = \overline{CR}^2, \quad CE = \frac{CR}{\sqrt{17}},$$

et

$$CE : CR :: 1 : \sqrt{17} :: 1 : 4{,}123.$$

D'ailleurs, la situation du point E sur la demi-circonférence dont CR est diamètre rend le triangle CER rectangle, comme il doit l'être.

Solution 2: Après avoir décrit les circonférences R, R′, appliquez sur CE le bord droit d'une bande de papier, pour y marquer, à la suite l'une de l'autre, deux longueurs égales à cette droite; puis, placez la bande ECF dans diverses positions E′F′, E″F″, etc., de manière que ses extrémités E, F soient chacune sur une des circonférences R, R′; son milieu C marquera des points de la lemniscate.

PROBL. (*b*): *Tracer une lemniscate des pistons dont l'axe est donné.*

Divisez l'axe AB en deux parties égales (P. IX, F. 4), par la perpendiculaire indéfinie RR′; tirez au point B une autre droite indéfinie BE‴, parallèlement à RR′; cherchez une longueur qui soit contenue dans BC comme 1 dans $\sqrt{(\sqrt{68}-2)}$, ou à fort peu près comme 1 dans 2,5; portez-la de B en E‴, et avec son quadruple, décrivez, de ce dernier point, un arc qui coupe CR. L'intersection R sera l'un des régulateurs; CR′ = CR donnera l'autre R′; BE‴ vaudra CE; les circonférences R, R′ auront RE‴ pour rayon, et vous pourrez achever comme dans le problème précédent.

Démonstration: Le demi-axe BC = E‴G. Donc

$$\overline{BC}^2 = \overline{RE'''}^2 - \overline{RG}^2 = 16\overline{CE}^2 - (CR - CG)^2$$
$$= 16\overline{CE}^2 - \overline{CR}^2 + 2CG \times CR - \overline{CG}^2.$$

Mais $\overline{CR}^2 = 17\overline{CE}^2$ et $CG = CE$. En conséquence,

$$\overline{BC}^2 = 16\overline{CE}^2 - 17\overline{CE}^2 + 2CE\sqrt{(17\overline{CE}^2)} - \overline{CE}^2$$

$$= 2\overline{CE}^2\sqrt{17} - 2\overline{CE}^2 = \overline{CE}^2(\sqrt{68} - 2),$$

et

$$CE = \frac{BC}{\sqrt{(\sqrt{68} - 2)}} = \frac{BC}{2,499}.$$

407. *La lemniscate des pistons peut être engendrée par l'un des sommets d'un parallélogramme lié à deux régulateurs.*

La distance RR″ des régulateurs (P. IX, F. 5) est encore l'hypoténuse d'un triangle rectangle RD″R″ dont le plus petit côté D″R″ vaut seulement le quart du troisième D″R. Un côté EI du parallélogramme pivote autour de R, et sa longueur égale IR ou $\frac{1}{2}$RE ou $\frac{1}{2}$D″R ; le côté contigu EC = D″R″ ; des deux sommets situés sur le côté parallèle à EI, le plus voisin de R, lié à R″ par une droite invariable R″K, pivote autour de ce régulateur ; enfin, c'est le quatrième sommet C qui engendre la lemniscate, pendant que les deux mouvements circulaires font varier les angles du parallélogramme et que le véhiculé droit R″C tourne autour de R″.

Portons RR″ sur son prolongement, de R″ en R′, et EC sur le sien, de C en F ; puis, abaissons de R′ une perpendiculaire sur RD″ prolongée. Nous aurons DR′ = $\frac{1}{4}$DR, puisque D″R″ = $\frac{1}{4}$D″R ; EF = DR′, puisque EC = D″R″, et le point C du quadrilatère REFR′R engendrera la lemniscate des pistons (405). Il faut donc faire voir que le sommet C du parallélogramme se meut comme le milieu de EF, ou que ces deux points restent constamment l'un sur l'autre, durant les oscillations simultanées des systèmes dont ils font partie.

Remarquons d'abord que les trois points R, K, F sont en ligne droite, puisque IK, parallèle à EF, en est la moitié, comme RI est celle de RE. Conséquemment, R″K est parallèle à R′F, et vaut la moitié de ce rayon, ou celle de RE, ou le grand côté du parallélogramme.

Remarquons ensuite que la figure CEIK, ayant ses quatre côtés constants, ne cessera point d'être un parallélogramme, malgré la variation de ses angles.

Or, si nous mettons RE dans une position possible RE′, R″K prendra une position R″K′, telle que la distance du point K′ de l'arc KK′ au milieu I′ de RE′ vaudra IK, et le parallélogramme CEIK deviendra le parallélogramme C′E′I′K′. Par conséquent, la droite RK′ prolongée rendra E′F′ double de I′K′ ou égale à EF.

Mais on aura aussi RF′ = 2RK′, comme RR′ = 2RR″. Ainsi, R′F′ se trouve parallèle à R″K′, et vaut 2R″K′, comme R′F = 2R″K ; ainsi, R′F′ = R′F ; le point F′ se trouve sur la circonférence R′ ; la figure RE′F′R′ reproduit le quadrilatère REFR′, aux angles près, et le milieu du côté E'F' de ce quadrilatère se confond avec le sommet C' du parallélogramme.

408. *Pendant que le sommet* C *du parallélogramme* CEIK *décrit une lemniscate* (P. IX, F. 5), *le sommet* K *en décrit une autre semblable, dont l'axe est moitié de celui de la première.*

Le quadrilatère RIKR''R satisfait aux mêmes conditions que le quadrilatère REFR'R, car $D''R'' = \frac{1}{2}D''R$ (407), $R''K = \frac{1}{2}RE = RI$, et $IK = EC = D''R'' = \frac{1}{2}RE = \frac{1}{2}RI$. Par conséquent (405), le sommet K décrit une lemniscate des pistons.

En second lieu, l'axe *a* de la courbe produite par K est moitié de l'axe A de la courbe due à C, car la relation $CE = \frac{BC}{2,499}$, établie dans le problème *b* (406), étant générale, donne pour la figure 5,

$$2CE = \frac{2BC}{2,499} \quad \text{ou} \quad \frac{EF}{A} = \frac{1}{2,499}, \quad \text{et} \quad \frac{IK}{a} = \frac{1}{2,499};$$

d'où suit

$$\frac{EF}{A} = \frac{IK}{a}, \quad \frac{a}{A} = \frac{IK}{EF} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{2}A.$$

APPLICATIONS : Le quadrilatère REFR'R (P. IX, F. 5) a été employé dans les premières machines à vapeur. On l'appelle mécanisme *à fléau*, parce que les mouvements simultanés de l'un des côtés égaux et du plus petit ont de l'analogie avec ceux des deux parties de l'instrument qui sert à battre le blé.

Dans la pratique, DR forme une horizontale ; RE est la moitié d'un balancier qui oscille autour d'un essieu fixe R, et à l'autre extrémité L duquel se trouve articulée une bielle LM destinée à faire tourner l'arbre de la machine ouvrière ; R'F est un contre-balancier qui oscille autour d'un autre essieu fixe R' ; enfin, le fléau EF est une barre dont les extrémités et le milieu C ont des articulations. C'est à celle de C qu'aboutit la tige verticale CP du piston à vapeur.

Ordinairement RL, RE, R'F ont chacun 4 mètres ; la distance horizontale DR des centres d'oscillation a 8 mètres ; leur distance verticale DR' est de 2 mètres ; la même longueur se donne au fléau ; la vapeur fait parcourir au balancier un angle d'environ 15°, tant au-dessus qu'au-dessous de sa position horizontale. Il en résulte que la course verticale du piston est d'à peu près 2 mètres ; que le milieu de cette course se trouve à $0^m,029$ au-dessus du milieu R'' de la droite RR' des centres ; que le bout supérieur de la tige, qui suit l'arc EF de la lemniscate (F. 4), est seulement à $0^m,0016$ de la verticale issue de C, quand s'achève la descente, et que ce bout est à $0^m,0022$ de la même verticale, quand se termine l'ascension. Or, d'aussi faibles déviations ne peuvent avoir une influence bien nuisible sur le jeu du piston. On est donc fondé à regarder comme exacte la verticalité donnée à ce jeu par le mécanisme à fléau (406).

Le parallélogramme fut inventé pour rendre disponible l'espace qu'exigeait le contre-balancier. Il porte, comme qualificatif, le nom de l'anglais *Watt*, son inventeur. Le balancier LRE auquel on l'adapte (F. 5) est le même que celui du fléau, sauf qu'il a une articulation de plus en I. Les articulations des deux autres sommets C, K sont doubles ou triples, pour recevoir des tiges de pistons, en même temps que les barres CE, CK, KI, R″K. Ainsi, non-seulement le parallélogramme de Watt diminue de beaucoup la place nécessaire à la machine motrice, mais encore il a l'avantage de faire jouer verticalement une pompe par son sommet K, tandis que son sommet C conduit le piston à vapeur (408).

VÉSICOÏDE.

409. La lemniscate dont nous avons maintenant à nous occuper est nommée *vésicoïde*, parce qu'elle rappelle la vessie natatoire d'une carpe. Elle a pour courbe régulatrice la circonférence dont son axe limité AB forme le diamètre (P. IX, F. 6).

Le point générateur E *d'une vésicoïde chemine sur le véhicule droit* OF, *de manière que sa distance au centre* O *égale toujours le rayon du cercle régulateur diminué du sinus de l'arc qui, sur le même cercle, se trouve compris entre l'axe limité et le véhicule.*

Pour démontrer qu'une telle génération produit effectivement une lemniscate, nous prendrons, en fonction du rayon OB, l'expression générale de la perpendiculaire EH abaissée sur ce rayon, d'une position quelconque E du point générateur.

L'arc de cercle BF, compris entre l'axe AB et le véhicule droit OEF, a pour sinus la perpendiculaire FG abaissée sur OB, et

$$\mathrm{EH} : \mathrm{FG} :: \mathrm{OE} : \mathrm{OF}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{EH} : \mathrm{FG} :: \mathrm{OF}-\mathrm{EF} : \mathrm{OF},$$

$$\text{ou encore} \quad \mathrm{EH} : \mathrm{FG} :: \mathrm{OB}-\mathrm{FG} : \mathrm{OB},$$

ce qui donne

$$\mathrm{EH} = \frac{\mathrm{FG}(\mathrm{OB}-\mathrm{FG})}{\mathrm{OB}}.$$

Soit $\mathrm{FG} = n \times \mathrm{OB}$, il en résulte

$$\mathrm{EH} = \frac{n \times \mathrm{OB}(\mathrm{OB}-n\times \mathrm{OB})}{\mathrm{OB}} = (n-n^2)\,\mathrm{OB} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{EH}} = \frac{1}{n-n^2}.$$

Ainsi,

Le rayon du cercle régulateur contient chaque ordonnée de la vésicoïde, comme l'unité contient l'excès du rapport du sinus correspondant et du rayon sur le quarré de ce même rapport.

Plaçons maintenant le véhicule droit sur OB. L'arc BF devient nul, $\mathrm{FG} = 0$, $n = 0$ et $\mathrm{EH} = (n-n^2)\,\mathrm{OB} = 0$, ce qui montre que le point générateur est alors en B.

Quand le véhicule prend la position OC perpendiculaire à OB, FG devient CO, $n = 1$, $n - n^2 = 0$, EH $= 0$ de nouveau, et le point générateur est en O.

Dans une position intermédiaire OF, le sinus FG devient une certaine partie de OB, n est une fraction, n^2 forme une fraction plus petite, EH a une valeur plus grande que zéro, et le point générateur est en E, à une certaine distance de OB. Cette distance continue de croître ensuite avec FG et n, mais elle atteint son maximum lorsque $n = \frac{1}{2}$ ou que le sinus $F'G' = \frac{1}{2}$OB; puis elle décroît, pour redevenir nulle.

En effet, $n = \frac{1}{2}$ donne $E'H' = (\frac{1}{2} - \frac{1}{4})\,OB = \frac{1}{4}\,OB$. Or, si nous posons $n = \frac{1}{2} - \frac{1}{d}$,

$$EH = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{d} - \frac{1}{4} + \frac{1}{d} - \frac{1}{d^2}\right) OB = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{d^2}\right) OB < E'H';$$

si $n = \frac{1}{2} + \frac{1}{d}$,

$$EH = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{d} - \frac{1}{4} - \frac{1}{d} - \frac{1}{d^2}\right) OB = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{d^2}\right) OB < E'H'.$$

Ainsi, la génération donne, dans le quart de cercle BOC, un arc de courbe BEE'O soutendu par OB. Dans le quart de cercle AOC, elle produira évidemment un arc soutendu par OA, tout-à-fait pareil à BEE'O, et dans l'autre moitié du cercle, elle formera deux arcs égaux et symétriques aux deux premiers. La courbe totale est donc fermée, composée de deux ganses égales, et tangente à son axe illimité CD, puisqu'elle n'a que son centre O sur cette droite. Par conséquent, CD coupe et touche la courbe en O, ce centre est un point de double inflexion (8), et le mouvement du point générateur produit bien une lemniscate (400).

Il peut être utile de remarquer que la plus grande ordonnée E'H' répond à un arc BF' de 30°. Effectivement, le sinus F'G' prolongé jusqu'au point I de la circonférence se double, de sorte que F'I = OB. En conséquence, l'arc IBF' est de 60° et l'arc BF', de 30°.

PROBLÈME: *Tracer une vésicoïde dont l'axe limité est donné.*

Décrivez une circonférence dont l'axe donné AB soit diamètre (P. IX, F. 6); tracez deux autres diamètres FK, F''K'' qui fassent des angles égaux avec le premier; abaissez de F une perpendiculaire FG sur AB; décrivez, du même point, avec FG, un arc qui coupe FK; puis, avec la distance OE du centre à l'intersection, décrivez de ce centre un second arc qui coupe OF'', OK, OK''; les trois intersections E'', E''', E$^{\text{IV}}$, ainsi que le point E, appartiendront à la vésicoïde demandée, et chaque couple de diamètres, tirés comme FK, F''K'', vous donnera de la même manière quatre autres points de cette courbe.

Pour marquer les points E', etc., les plus éloignés de AB, c'est-à-dire les contacts des tangentes parallèles à l'axe limité, il faut tracer l'axe illimité perpendiculairement à l'autre; y porter la moitié du rayon OB, à partir du centre; mener, par les points L, etc., qui en résultent, des parallèles à AB, afin d'obtenir les extrémités F', etc., des arcs BF', etc., dont le sinus est moitié de OB; tirer les rayons F'O, etc., et y porter OL, de F' en E'.

Observation : Si l'on prenait, pour courbe régulatrice, l'ellipse ou l'ovale de Cassini, au lieu de la circonférence, le mode de génération relatif à la vésicoïde circulaire produirait évidemment deux autres variétés de cette lemniscate.

MÉRIDIENNE DU TEMPS MOYEN.

410. La *méridienne du temps moyen* est une lemniscate irrégulière qu'on trace quelquefois sur les cadrans solaires, afin qu'ils puissent toujours suffire au réglement des montres et des horloges. Elle n'a point d'axe de symétrie, ni de centre, mais elle coupe en quatre points la méridienne du temps vrai, qui est droite, et deux des intersections sont si rapprochées qu'elles semblent se confondre. Ainsi, la méridienne droite passe à bien peu près par le croisement de la méridieme courbe.

PROBLÈME : *Tracer la méridienne du temps moyen sur un cadran dont on a la méridienne droite et les autres lignes horaires.*

Du centre du trou par lequel les rayons solaires traversent la plaque, abaissez une perpendiculaire sur le plan du cadran et mesurez-la exactement; joignez son pied P au centre O, concours de toutes les lignes horaires O.X, O.XI, O.XII, O.I, O.II, etc. (P. IX, F. 7); tracez, sur le cadran, la droite PT, perpendiculaire à OP; portez-y, de P en T, la longueur mesurée; du point T, décrivez une circonférence, avec un rayon arbitraire; tirez, par le même point, AD perpendiculaire à TO; au point D, où AD rencontre le prolongement de OP, menez DE parallèle à TP, et rapportez de O en H la ligne O.X, de O en H' la ligne O.XI, de O en H'' la ligne O.XII, de O en H''' la ligne O.I, de O en H^{IV} la ligne O.II.

Après cette préparation, prenez l'arc AB de $23° \frac{1}{2}$; tirez BT transversale de OH, OH', OH'', etc.; rapportez OF de O en K, OF' de O en K', OF'' de O en K'', OF''' de O en K''', OF^{IV} de O en K^{IV}, et unissez par une courbe les cinq points K, K', K'', K''', K^{IV}; cette courbe sera suivie par le spectre solaire, le jour du solstice d'hiver, de dix heures à deux.

Pour avoir la courbe analogue LL'L''L'''L^{IV} relative au 1er de novembre, vous chercherez ce quantième dans une table de l'*Annuaire du bureau des longitudes :* sur la même ligne, colonne intitulée *déclinaison du Soleil à midi,* on trouve 14° 28', pour l'année 1837; mais cette déclinaison peut être employée, sans inconvénient, de

10^h à 2^h et dans toute autre année. Vous la porterez sur l'arc AB, de A en B′, puis tirant la transversale B′T, vous répéterez toutes les opérations faites après le tracé de BT.

Déterminez de même les courbes du 24 décembre, du 10 février, du 15 avril, du 15 mai, du 15 et du 21 juin, du 27 juillet, du 1er septembre, mais en ayant soin de porter sur la circonférence T, à partir de A et à l'opposite de B, les déclinaisons marquées comme *boréales* dans l'annuaire. Les intersections de la méridienne droite O.XII avec les courbes du 24 décembre, du 15 avril, du 15 juin et du 1er septembre seront des points de la lemniscate ; le croisement se fera entre le deuxième et le quatrième.

Mais il faut encore trouver les points où la méridienne courbe touche les courbes du 21 décembre et du 21 juin, ceux où elle coupe la courbe ou plutôt la droite DE des deux équinoxes, ceux enfin où elle coupe les courbes du 10 février, du 15 mai, du 27 juillet et du 1er novembre, points qui sont les contacts de ses tangentes parallèles à la méridienne droite.

Il est nécessaire, pour cela, de tracer quelques lignes des minutes entre les lignes horaires O.XI, O.XII, O.I. A cet effet, rapportez DT de D en T′, sur le prolongement de OP ; décrivez de T′ une circonférence quelconque ; joignez au centre les points XI, XII, I, pour marquer deux arcs d'heure ; partagez chacun de ces arcs en douze parties égales, qui représenteront chacune cinq minutes ; par les points de division et par T′, tirez des droites qui coupent DE, et joignez les intersections au point O ; vous aurez ainsi les lignes de $11^h\,5'$, $11^h\,10'$, $11^h\,15'$, etc., $12^h\,5'$, $12^h\,10'$, etc.

Alors, recourez de nouveau à l'annuaire ; cherchez, par exemple, le 21 décembre, dans la table déjà employée ; vous trouverez, sur la même ligne, colonne intitulée *temps moyen à midi vrai*, $11^h\,58'\,24''$ pour l'heure que doit marquer une horloge, quand, ce jour là, le Soleil marque midi. Ainsi, l'horloge retarde de $12^h - 11^h\,58'\,24''$ ou de $1'\,36''$ sur le Soleil, et quand elle sonne midi, l'astre doit être à $12^h\,1'\,36''$. Tracez donc, à vue, entre les lignes horaires de XII et de I, une droite qui passe par O et réponde à environ $12^h\,1'\,36''$; l'intersection de cette droite et de la courbe du 21 décembre sera le contact de la lemniscate.

Vous trouverez d'une manière analogue les autres points mentionnés ; il ne s'agira plus que de les unir entre eux et avec les points déjà obtenus, par une courbe qui les prenne dans l'ordre suivant, en commençant par le plus élevé sur la méridienne O.XII : 24 décembre, 10 février, 21 mars, 15 avril, 15 mai, 15 juin, 21 juin, 27 juillet, 1er septembre, 21 septembre, 1er novembre, et 21 décembre.

Démonstration : Le plan qui contient le centre du Soleil et l'axe terrestre peut être supposé fixe pendant la rotation de notre globe, et il passe toujours par l'étoile polaire. Les lignes horaires données sont les diverses intersections de ce plan et du cadran, qui participe à la rotation de la Terre. Mais elles sont aussi les intersections du cadran et des plans que déterminent leur concours O, le centre T de la plaque et le centre du Soleil. Comme ce dernier point et les lignes horaires sont communs à ces plans et au plan fixe, tous renferment aussi l'axe terrestre et l'étoile polaire. Donc, leur intersection passe par cette étoile; elle se trouve parallèle à l'axe, à cause de l'extrême éloignement de la rencontre, et TO, qui est cette intersection rabattue sur le cadran, peut remplacer le même axe, quant à la direction.

Dans chaque jour équinoxial, l'équateur peut être considéré comme renfermant, de 10^h à 2^h, la droite qui joint les centres de la Terre et du Soleil. Cette droite se trouve donc alors d'équerre sur l'axe. Or, la droite qui joint le centre de la plaque au centre du Soleil est toujours parallèle à la précédente, à cause du grand éloignement de l'astre; par conséquent, ATD perpendiculaire sur TO, donne, dans le plan rabattu, la direction qu'ont les rayons solaires qui traversent la plaque à son centre, de 10^h à 2^h, un jour d'équinoxe. Ainsi, ces rayons forment un plan perpendiculaire à la *verge* du cadran, que représente TO.

Relevons le plan du triangle TPO et du cercle T, en le faisant tourner autour de OP ou OD, droite du cadran; le point D ne bougera pas; il appartient donc à la trace du plan formé par les rayons d'équinoxe. Mais ce plan est perpendiculaire au plan DTO, et ce dernier l'est au cadran. Conséquemment, l'intersection du premier et du troisième se trouve d'équerre sur le second et sur OD. Ainsi, DE est la ligne que parcourra le rayon solaire reçu par le centre de la plaque, de 10^h à 2^h, un jour d'équinoxe.

La verge, chaque ligne horaire et le rayon équinoxial correspondant forment un triangle rectangle; l'angle droit de ce triangle est déjà rabattu en DTO. Si donc on ramène en H, sur le prolongement de TD, le sommet X, par exemple, du triangle qui répond à la dixième heure d'un équinoxe, HTO sera ce triangle rabattu sur le plan du cadran.

Au solstice d'hiver, la droite qui joint le centre du Soleil à celui de la Terre perce la surface du dernier globe sur le tropique du capricorne, de 10^h à 2^h; autrement, elle fait un angle de $23° \frac{1}{2}$ avec sa position des équinoxes, et ces degrés doivent être comptés au-dessous de l'équateur, par rapport à nous. La droite BTF est donc, en rabattement, le rayon qui tombe au centre de la plaque, de 10^h à 2^h, le jour du solstice d'hiver, et puisque OH est la ligne horaire O.X rabattue, FTO donne le triangle formé par ce rayon, cette ligne et la verge. Mais OK $=$ OF; en conséquence, K est le point où le même rayon frappe le cadran à 10^h, et la courbe KK'K''.... est le chemin qu'il suit de 10^h à 2^h.

On verrait de même que LL'L''.... est la courbe tracée par le pied du rayon B'T, le premier jour de novembre, et que MM'M''.... forme le lieu où se trouve le centre du spectre solaire dans la journée du 15 avril. A cette époque, le Soleil étant au-dessus de l'équateur, il faut que le rayon parte d'un point B'' situé au-dessus de A, sur le cercle T, qui est, pour le centre de la plaque, ce qu'est un méridien pour le centre de la Terre.

De même, le plan conçu par AD, perpendiculairement à la verge, est, relativement à cette verge, comme l'équateur par rapport à l'axe terrestre. Rabattons ce plan sur celui de la figure, en le faisant tourner autour de sa trace DE. La droite ATD, qui est dans le plan DTO, perpendiculaire à DE, tombe nécessairement sur le prolongement de OD; T vient en un point T', tel que DT' = DT, et le cercle T' est, dans le rabattement, l'équateur du cadran. Or, les 24 heures du jour répondent à des arcs égaux de l'équateur terrestre, et les lignes horaires de l'équateur du cadran sont évidemment les droites X.T', XI.T', XII.T', I.T', etc. Ces droites doivent donc partager la circonférence T' en arcs égaux; le soixantième d'un de ces arcs répond à 1', le douzième à 5'; les droites tirées de T' aux points de séparation des douzièmes divisent les distances horaires de DE en parties qui répondent à 5', et les droites menées de O aux extrémités de ces parties sont, par conséquent, les lignes horaires des douzièmes d'heure, sur le cadran.

Le reste du tracé de la méridienne courbe dépend des données de l'annuaire et n'a pas besoin de démonstration. Nous ajouterons seulement qu'on pourrait former de la même manière, pour chaque ligne horaire, une lemniscate, analogue à celle de midi, sur laquelle le spectre marquerait chaque heure des horloges.

Lois de la nature : Il convient toutefois d'expliquer la différence de la marche des horloges et de celle du Soleil.

La longueur du balancier d'une horloge, ou la tension du ressort d'une montre, est telle que la machine accuse vingt-quatre de ses heures d'un certain midi solaire au suivant, et quand cette machine a un mouvement parfaitement uniforme, la durée de ses deux tours de cadran reste constante pendant toute l'année. Or, le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du méridien par le centre du Soleil est très-variable : tantôt il est moindre qu'il n'était à un jour donné, tantôt il est plus grand. L'horloge, réglée ce jour-là, doit donc, dans le reste de l'année, tantôt avancer relativement au Soleil et tantôt retarder.

La variation de la durée du jour solaire a deux causes. La Terre, décrivant une ellipse autour de l'astre placé à l'un des foyers, est plus attirée à son périhélie qu'à son aphélie; de là résulte que sa vitesse, sur son orbite, augmente du solstice d'été au solstice d'hiver et diminue de la seconde époque à la première.

Soit donc *tt'* (P. IX, F. 8) l'arc d'ellipse parcouru entre midi du 21 décembre et midi du 22. Le temps employé pour ce trajet se compose du temps qu'exige la rotation de la Terre, qui est complète quand le méridien *ab* a pris une position parallèle *a'b'*, et du temps qu'il faut à ce méridien pour parcourir *b't's* = *tst'*, à l'effet de passer encore par le centre du Soleil. Soit aussi *t''t'''* l'arc d'ellipse parcouru entre midi du 21 juin et midi du 22. Le temps employé pour ce trajet se compose du temps nécessaire à la rotation de la Terre et de celui qu'exige le parcours de l'angle $a'''t'''s = t''st'''$. Le jour solaire du solstice d'hiver surpasse donc celui du solstice d'été de tout le temps qu'emploie le méridien à parcourir un angle égal à $tst' - t''st'''$. Or, l'observation donne 0° 61′ 11″ pour le premier, et seulement 0° 57′ 11″ pour le second; leur différence vaut 0° 4′, ainsi que celle des angles $b't's$, $a'''t'''s$, et cette dernière exige 16″ d'heure, puisque la rotation s'effectue à raison de 15° dans une heure ou 60′. Par conséquent, le jour solaire diminue de 16″, du commencement de l'hiver à la fin du printemps, et il augmente d'autant, du commencement de l'été à la fin de l'automne.

La seconde cause est l'obliquité de l'écliptique par rapport au plan de l'équateur. Supposons que l'arc tt', relatif à un jour solaire, soit de 1°, ce qui diffère peu de la vérité, et regardons la circonférence t' comme l'intersection de la surface terrestre et du plan de l'orbite. L'arc $b'c$ de cette courbe sera aussi de 1°. S'il appartenait à l'équateur, il serait d'équerre sur les méridiens; la rotation le ferait passer constamment en 4′ devant le centre du Soleil, et, à part la variation due au mouvement annuel de la Terre, les jours solaires seraient tous égaux. Mais ce même arc, étant incliné sur l'équateur, passe devant l'astre plus vite qu'un degré de ce cercle quand il en est voisin; aux solstices, il passe moins vite qu'un degré des tropiques, puisqu'il est plus long et de même direction; un degré des tropiques passe dans le même temps qu'un degré de l'équateur. L'obliquité de l'écliptique met donc tantôt moins, tantôt plus de 4′ de différence entre la durée constante de la rotation et le jour solaire.

Les deux causes se secondent dans certaines parties de l'année, pour augmenter l'avance ou le retard des horloges par rapport aux cadrans; dans d'autres, elles les diminuent en se contrariant, et il y a même quatre jours où leur opposition produit l'accord du midi moyen avec le midi vrai.

SPIRALES.

411. Les *spirales* sont des courbes ouvertes, dont le point générateur s'éloigne du point fixe, à mesure que tourne le véhicule droit. Elles s'étendent de ce point, qui se nomme *pôle*, jusqu'à l'infini, et n'ont ni axes, ni centre: une droite peut les couper une infinité de fois. On nomme *spire* l'arc de courbe engendré pendant chaque révolution complète du véhicule droit.

Il y a autant d'espèces de spirales qu'on peut employer de lignes régulatrices, pour établir le rapport de la vitesse du point générateur à la vitesse du véhicule; mais nous en bornerons l'étude aux deux seules espèces qui aient de l'importance.

APPLICATIONS : Les spirales sont fréquemment employées en architecture, pour former les volutes des chapiteaux, pour terminer soit les consoles, soit les contre-forts, et pour cintrer les arcs rempants, dans quelques cas où toute autre courbe ne produirait pas un aussi bon effet.

Les serruriers s'en servent, comme d'un moyen d'ornement, dans plusieurs de leurs produits et surtout dans les potences de reverbère.

Les charpentiers et les tailleurs de pierres forment des arêtes en spirales sur le dessus et le dessous de la pièce appelée *colimaçon*, par laquelle ils terminent les limons des escaliers soignés.

C'est aussi en spirale que se trouvent roulés le ressort visible du balancier d'une montre et celui qui, renfermé dans le barillet, force à s'enrouler sur cette pièce la chaîne dont la fusée est entourée.

Enfin, la nature forme en spirale certains coquillages et les cornes de quelques animaux.

La plupart des artistes tracent ces courbes à vue, et il leur suffit qu'elles plaisent aux yeux; les ouvriers emploient des arcs de cercle raccordés; mais les uns et les autres parviendraient plus sûrement à les rendre agréables, s'ils employaient les moyens que nous allons enseigner, car ils en obtiendraient des contours qui, soumis à une loi constante dans toute leur étendue, seraient plus satisfaisants que ceux auxquels conduit la seule adresse de la main ou l'emploi de lignes circulaires, la génération de ces derniers n'étant jamais uniforme.

SPIRALE D'ARCHIMÈDE.

412. La spirale dont le géomètre Archimède découvrit les principales propriétés est la plus importante du genre et en même temps la plus simple. Elle a pour ligne régulatrice une droite qui forme un angle de 45° sur l'axe de ses abscisses, et dont chaque ordonnée égale, par conséquent, l'abscisse correspondante.

La loi de la génération est que le chemin droit du point générateur vaut une ordonnée de la droite régulatrice, pour laquelle l'abscisse se trouve contenue dans le rayon d'un cercle quelconque, décrit du pôle, comme est contenu dans la circonférence l'arc qu'un point du véhicule y a parcouru; ou bien, puisque l'ordonnée égale l'abscisse,

Le chemin droit du point générateur de la spirale d'Archimède est au rayon d'un cercle quelconque, décrit du pôle, comme est à la circonférence l'arc qu'un point du véhicule y a parcouru dans le même temps, et toutes les spires sont soutendues par des cordes égales au rayon.

Cette loi produit en effet une spirale. Soit P le pôle, où se trouve le point générateur, et prenons le véhicule dans sa position PD (P. IX, F. 9). Quand son point D aura parcouru le quart de la circonférence décrite de P, avec le rayon PD, le point générateur sera en E′, au quart de PD′; après une moitié de révolution, il sera en E″, au milieu de PD″; après les trois quarts d'une révolution, il sera en E‴, aux trois quarts de PD‴; une révolution entière l'amènera en D, et donnera une première spire PE'E''E'''D, soutendue par la corde PD.

Mais, il n'y a pas de raison pour que le véhicule s'arrête, après son retour à la position du départ. Cette droite continuera donc de tourner autour de P, et le point générateur sortira du cercle, pour cheminer sur le prolongement de PD. Après $\frac{5}{4}$ de tour, il se trouvera en e' et aura parcouru, hors du cercle, $D'e' = \frac{1}{4}PD'$; puis il arrivera successivement en e'' où $D''e'' = \frac{1}{2}PD''$, en e''' où $D'''e''' = \frac{3}{4}PD'''$, en e^{IV} où $De^{\text{IV}} = PD$, et l'on aura une seconde spire $De'e''e'''e^{\text{IV}}$, soutendue par la corde De^{IV}.

Alors, commencera une troisième révolution, à laquelle succéderont une quatrième, une cinquième, etc., pendant chacune desquelles le point générateur augmentera toujours de PD sa distance au pôle. Or, cette augmentation est évidemment la corde qui soutend la spire produite.

Problème : *Tracer une spirale d'Archimède dont chaque spire soit soutendue par une corde donnée.*

Décrivez une circonférence avec la corde connue PD (P. IX, F. 9); divisez cette courbe en un certain nombre d'arcs égaux, douze, par exemple, et numérotez les points de division, à partir d'un quelconque; faites la même opération sur le rayon PD qui aboutit au point XII, et numérotez en allant de P vers D; enfin, décrivez de P, avec les rayons P.1, P.2, P.3, etc., des arcs qui coupent, le premier la droite P.I, le second la droite P.II, le troisième la droite P.III, et ainsi de suite; puis unissez par une courbe toutes les intersections; vous aurez une première spire PE'E''E'''D soutendue par PD.

Pour former la seconde spire, il suffit de porter la corde donnée sur chacun des douze rayons, à partir du point de la première spire qui s'y trouve. Prenez, par exemple, $E'e' = PD$, $E''e'' = PD$, etc.; les points D, e', e'', etc., appartiendront à la seconde spire, et cet arc de spirale sera soutendu par $De^{\text{IV}} = PD$.

On obtiendrait la troisième spire en portant la corde PD à la suite des rayons vecteurs de la seconde, la quatrième en portant PD à la suite des rayons vecteurs de la troisième, et ainsi des autres.

Démonstration : La construction de la première spire, étant basée sur la génération, se trouve toute justifiée. Quant à celle de la seconde, il est clair que si $E'e' = PD$,

$$Pe' = PE' + PD = \tfrac{1}{4}PD + PD = \tfrac{5}{4}PD.$$

Or, le véhicule droit a fait un tour complet, ou bien son point D a parcouru la circonférence $2\pi \times PD$, pendant la production de la première spire; le même point a parcouru ensuite l'arc DD' ou $\frac{1}{4} 2\pi \times PD$, pour donner le point e'. Son trajet circulaire est donc en totalité

$$2\pi \times PD + \tfrac{1}{4}\, 2\pi \times PD = \tfrac{5}{4}\, 2\pi \times PD,$$

et parce que $\frac{5}{4}$PD : PD :: $\frac{5}{4}2\pi \times$ PD : $2\pi \times$ PD, le point e' appartient bien à la spirale demandée (412).

413. Des spirales sont dites *compagnes*, quand, soumises à la même génération, et issues du même pôle, elles ne se confondent pas.

Dans les spirales d'Archimède compagnes, la différence des rayons vecteurs situés sur la même droite est constante.

Deux spirales d'Archimède qui ont une génération et un pôle communs ne sauraient évidemment commencer au même rayon sans se confondre. Si donc l'une PE'E''E''' commence au rayon PD (P. IX, F. 9), sa compagne doit commencer à un rayon différent, PD' par exemple. Alors,

$$PE'' : PD :: DD'D'' : 2\pi \times PD, \quad PF' : PD :: D'D'' : 2\pi \times PD,$$

et par suite,

$$PE'' : DD'D'' :: PF' : D'D'',$$

ce qui donne

$$PE'' - PF' : DD'D'' - D'D'' :: PE'' : DD'D'' :: PD : 2\pi \times PD.$$

Or, ce dernier rapport est constant; la différence des arcs parcourus sur la circonférence de rayon PD est invariable aussi. Donc, PE'' — PF', celle des rayons vecteurs situés sur la même droite, ne peut changer.

PROBLÈME : *Tracer une spirale compagne d'une spirale d'Archimède donnée.*

Avec la différence P.3 qu'on veut mettre entre les rayons vecteurs de même direction (P. IX, F. 9), décrivez, du pôle P, un arc de cercle qui coupe la spirale donnée PE'E''E''' en un point E'; portez PE' ou P.3 sur les rayons vecteurs de PE'E''E''', à partir de cette courbe, du côté de la concavité; vous marquerez ainsi les points F', F'', F''', D', etc., d'une spirale qui commencera au rayon PE'D' et sera compagne de la spirale donnée.

Si l'on demandait une compagne de PF'F''F''', qui embrassât cette courbe, vous décririez encore de P, avec la différence P.3 indiquée, un arc de cercle; il couperait la spirale donnée en F'; PD, prolongement de F'P, serait le rayon auquel devrait commencer la compagne, et vous porteriez PF' ou P.3 sur les rayons vecteurs de PF'F''F''', à partir de cette courbe, du côté de la convexité, pour marquer les points E', E'', E''', etc., de la spirale cherchée.

APPLICATIONS : I. Les moulures des volutes ont, pour arêtes, des spirales compagnes. L'un des contours doit donc être tracé d'après le problème du n° 412, et l'autre d'après le problème du n° 413.

II. Les grilles en fer et les rosaces de l'architecture gothique offrent parfois des *spirales croisées* qui forment en quelque sorte un cœur. Elles commencent au même rayon; mais le véhicule de l'une tourne dans un sens, tandis que celui de l'autre tourne dans le sens contraire. Quand ce sont des spirales d'Archimède, on les trace en appliquant le problème du n° 412 et en leur donnant même corde de spire.

414. La sous-tangente d'une spirale est la perpendiculaire PM élevée au pôle, sur le rayon vecteur du contact E'' (P. IX, F. 9), et prolongée jusqu'à la tangente E''M.

Pour la spirale d'Archimède, la sous-tangente PM *égale l'arc circulaire* E''K.6 *qui, décrit du pôle, avec le rayon vecteur du contact* E'', *sépare ce contact de la première position* PD *du véhicule.*

Arrivé en E'', le point générateur se trouve animé de deux mouvements uniformes, dont les directions se coupent d'équerre: l'un rectiligne, selon le rayon vecteur, de E'' vers D''; l'autre circulaire, selon l'élément de la circonférence $2\pi \times PE''$. La tangente de la spirale, au point E'', est donc (10) la diagonale d'un rectangle dont la droite E''PD et sa perpendiculaire E''O sont, en directions, deux côtés contigus. Les longueurs de ces côtés doivent égaler respectivement les chemins que le point générateur pourrait parcourir, dans des temps égaux, sur E''PD et sur la circonférence $2\pi \times PE''$, s'il était libre de se mouvoir d'abord sur la droite, puis sur la courbe. Or, pendant que ce point va de P en E'', chacun de ceux du rayon vecteur fait une portion de tour qui correspond à l'arc E''K.6. C'est donc seulement cet arc que le point générateur pourrait parcourir sur $2\pi \times PE''$, s'il s'y mouvait uniformément pendant un temps égal à celui qu'exige le parcours de PE''.

En conséquence, le rayon vecteur du contact étant pris pour la longueur du côté dont il est déjà la direction, il faut achever le rectangle en prenant l'arc E''K.6 pour longueur du côté E''O ou du côté égal PM.

Il suit de là que *la tangente au pôle d'une spirale d'Archimède est la première position* PD *du véhicule.*

Le rayon vecteur du pôle P, quoique infiniment petit, se dirige selon PD, et sa perpendiculaire en P est PD'''. Mais l'arc à porter sur cette perpendiculaire, pour sous-tangente, a une longueur nulle. Donc, la tangente se trouve elle-même confondue avec PD.

Probl. (*a*): *Tracer une droite qui soit tangente à la spirale d'Archimède en un point donné sur cette courbe, mais autre que le pôle.*

Tirez le rayon vecteur PE'' du point assigné (P. IX, F. 9); prenez-y, à partir du contact, une longueur quelconque E''H qui ait un rapport connu avec la corde PD d'une spire, qui en soit, par exemple, la sixième partie; élevez en H une perpendiculaire; décrivez de P une circonférence, avec le rayon PE'', et cherchez-en le sixième K.6; partagez cet arc en un nombre de parties égales ou inégales, assez petites pour être regardées comme des lignes droites; portez toutes ces parties, bout à bout, sur la perpendiculaire; il en résultera une longueur $HL = K.6$, et la droite LE'' sera la tangente demandée.

Démonstration : Soit prolongée $E''L$ jusqu'à PM, perpendiculaire élevée sur PE''. On aura

$$E''H : E''P :: HL : PM \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{6}PD : E''P :: \tfrac{1}{6}\,2\pi \times E''P : PM.$$

Or (412),

$$PD : E''P :: 2\pi \times PD : BD'D'' :: 2\pi \times E''P : E''K.6.$$

Par conséquent,

$$\tfrac{1}{6}PD : E''P :: \tfrac{1}{6}\,2\pi \times E''P : E''K.6;$$

$PM = E''K.6$, et ME'' ou LE'' est tangente à la spirale (414).

PROBL. (*b*) : *Déterminer la tangente au pôle d'une spirale d'Archimède.*

Solution 1 : Si la longueur de la corde des spires est connue, décrivez du pôle P, avec cette longueur (P. IX, F. 9), un arc de cercle qui coupe la courbe. L'intersection D sera l'extrémité de la première spire, et la droite PD formera la tangente demandée.

Solution 2 : Si la longueur de la corde des spires n'est pas connue, menez une tangente $E''M$ en un point quelconque E'' de la courbe, au moyen de l'un des procédés généraux (10); élevez, au pôle P, une perpendiculaire sur le rayon vecteur PE'', jusqu'à la rencontre de $E''M$, et partagez cette perpendiculaire PM en un grand nombre de petites parties; décrivez de P, avec PE'', une circonférence; portez-y, à partir de E'' et du côté de M, toutes les parties de PM, chacune au bout de la précédente; vous marquerez ainsi l'extrémité 6 de l'arc $E''K.6$; la droite P.6 se trouvera dirigée selon la corde PD de la première spire, et par conséquent, elle sera la tangente demandée.

PROBL. (*c*) : *Trouver la corde des spires d'une spirale d'Archimède tracée.*

Menez la tangente du pôle; le point où elle coupera la courbe pour la première fois sera l'autre extrémité de la corde demandée.

APPLICATIONS : I. Il faut recourir au problème (*a*) précédent, pour déterminer les joints des arcades rampantes dont le cintre est un arc de la spirale d'Archimède, car ces joints doivent être dirigés selon des normales de la courbe, c'est-à-dire selon des perpendiculaires aux tangentes des incidences.

II. La même obligation existe, quand il s'agit de composer une volute avec plusieurs pierres. Mais, si cette volute a des moulures, elle renferme des spirales compagnes, et les joints ne peuvent être à la fois normaux aux deux courbes. Ce qu'il y a de mieux à faire dans une telle circonstance, pour rendre l'appareil moins désagréable à l'œil, c'est de tracer une spirale qui passe par le milieu de chaque partie de rayon vecteur comprise entre les deux compagnes, et de rendre les lignes de joint normales à la spirale auxiliaire. La fausse coupe se trouve alors répartie sur les deux arêtes et beaucoup moins sensible.

III. Une potence de reverbère n'est bien faite qu'autant qu'elle ne présente aucun jarret, soit dans sa partie courbée en spirale, soit au raccordement de cette partie et de la tige. On doit donc, en la forgeant, la présenter, à plusieurs reprises, sur une épure en grand, et pour tracer cette épure avec exactitude, le serrurier ne peut se dispenser de mener géométriquement la tangente qui représente la tige.

415. *Tout segment de la spirale d'Archimède, compris entre un rayon vecteur et l'arc qui joint au pôle l'autre extrémité de ce rayon, égale le produit fait avec le cube du rapport du même rayon à la corde des spires et le tiers de l'aire du cercle dont cette corde est le demi-diamètre.*

Augmentons d'une quantité infiniment petite δ, l'arc circulaire E'.3 qui, décrit du pôle P (P. IX, F. 9), passe par le point quelconque E'; nommons r le rayon vecteur PE', R la corde PD des spires, A l'arc DD', et d l'augmentation de A, infiniment petite aussi, qui répond à δ, étant comprise entre les côtés du même angle. L'arc δ et ses deux rayons extrêmes forment un secteur circulaire, infiniment petit, qu'on peut prendre pour le secteur de spirale s, infiniment petit aussi, qu'il couvre. Ainsi

$$s = \frac{r\delta}{2},$$

et comme $\delta = \frac{d}{R}r$,

$$s = \frac{r^2 d}{2R}.$$

Mais (412), $r : R :: A : 2\pi R$ ou $r = \frac{AR}{2\pi R}$. Par conséquent,

$$s = \frac{A^2R^2d}{8\pi^2R^3} = \frac{A^2d}{8\pi^2R}.$$

Rien n'empêche de supposer δ tel qu'il soit contenu un très-grand nombre de fois n dans l'arc E'.3. Alors d est aussi la n^e partie de l'arc DD', et le segment de spirale que limite PE' se compose de n secteurs extrêmement petits, à chacun desquels peut s'appliquer la formule $s = \frac{1}{8\pi^2R}A^2d$, A étant l'arc compris entre PD et d.

Pour le premier s', dont PD est l'un des rayons, $A = 0$, et $s' = 0$.

Pour le second, $A = d$, et................ $s'' = \frac{1}{8\pi^2 R} d^3$.

Pour le troisième, $A = 2d$, et............ $s''' = \frac{1}{8\pi^2 R} 4d^3$.

Pour le quatrième, $A = 3d$, et............ $s^{\text{IV}} = \frac{1}{8\pi^2 R} 9d^3$.

....

Pour le dernier, ou le n^e, $A = (n-1)d$, et.. $s^{(n)} = \frac{1}{8\pi^2 R}(n-1)^2 d^3$.

Ainsi, le segment limité par PE',

$$S = s' + s'' + s''' .. + s^{(n)} = \frac{1}{8\pi^2 R}[0 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 .. + (n-1)^2] d^3.$$

Or (298), la somme des n quarrés renfermés entre les crochets vaut $\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$. Par conséquent,

$$S = \frac{1}{8\pi^2 R}\left(\frac{n^3 d^3}{3} - \frac{n^2 d^2}{2} d + \frac{nd}{6} d^2\right),$$

et comme $nd = DD' = A$,

$$S = \frac{1}{8\pi^2 R}\left(\frac{A^3}{3} - \frac{A^2 d}{2} + \frac{A d^2}{6}\right).$$

Négligeant les termes infiniment petits $\frac{A^2 d}{2}$, $\frac{A d^2}{6}$, on a

$$S = \frac{A^3}{3 \times 8\pi^2 R}.$$

Mais, d'après la proportion écrite précédemment, $A = \frac{r}{R} 2\pi R$. Donc

$$S = \left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{8\pi^3 R^3}{3 \times 8\pi^2 R} = \left(\frac{r}{R}\right)^3 \frac{\pi R^2}{3},$$

résultat conforme au principe énoncé.

416. *L'espace renfermé entre la première spire d'une spirale d'Archimède et sa corde est le tiers de l'aire du cercle dont cette corde forme le rayon.*

Dans ce cas, en effet, $r = R$, et par conséquent,

$$S = \frac{\pi R^2}{3}.$$

PROBL. (*a*) : *Mesurer l'aire d'un segment de la spirale d'Archimède, compris entre un arc qui part du pôle, et le rayon vecteur de l'autre extrémité.*

Cherchez le rapport numérique du rayon vecteur donné et de la corde des spires ; élevez-le au cube, et multipliez par ce cube, le tiers de la superficie du cercle dont la corde serait le rayon.

PROBL. (*b*) : *Mesurer l'aire d'un secteur* E'PE''E' *de la spirale d'Archimède* (P. IX, F. 9).

Calculez l'aire du segment PE''E'NP et celle du segment PE'NP, puis retranchez la seconde de la première.

SPIRALE HYPERBOLIQUE.

417. La *spirale hyperbolique* a pour courbe régulatrice une branche d'hyperbole. Le pôle, arbitrairement placé sur l'une des asymptotes, est l'origine des coordonnées (6) ; l'asymptote qui le contient forme l'axe des abscisses, et les ordonnées sont parallèles à l'autre.

L'hyperbole régulatrice est ordinairement équilatère (240) ; mais ce qui va être dit convient aussi aux cas où les asymptotes se coupent sous un angle plus ou moins ouvert que l'angle droit.

La distance du point générateur au pôle égale une ordonnée de la courbe régulatrice, pour laquelle l'abscisse se trouve contenue dans le rayon d'un cercle quelconque, décrit du pôle, comme est contenu dans la circonférence l'arc qu'un point du véhicule y a parcouru.

D'après cette loi, tout à fait pareille à celle de la spirale d'Archimède (412), la courbe commence au point B (P. IX, F. 10), où PB, droite tirée du pôle P, parallèlement à l'asymptote DE, rencontre la branche régulatrice ABC ; car le point XII du véhicule P.XII n'a encore parcouru aucune partie de la circonférence dont P.XII est le rayon, puisque l'abscisse qui répond à l'ordonnée PB est nulle. A mesure que l'extrémité de l'abscisse s'avance vers H, le rapport de cette abscisse au rayon PH surpasse zéro de plus en plus, et le véhicule P.XII prend, en conséquence, les positions successives P.I, P.II, P.III, etc. Mais, l'ordonnée diminue en même temps, puisque la branche ABC se rapproche constamment de l'asymptote EPF. La distance BP du point générateur au pôle diminue donc, pendant que le véhicule tourne, et il en est de même évidemment durant toutes les révolutions de ce véhicule.

418. *Les cordes des spires d'une spirale hyperbolique vont toujours en diminuant, et le pôle est un point asymptotique de la courbe.*

La corde BG de la première spire (P. IX, F. 10) égale l'excès de l'ordonnée PB sur l'ordonnée HN ; celle de la seconde égale l'excès de HN sur l'ordonnée qui répond à l'abscisse 2PH. Mais, puisque la branche d'hyperbole et l'asymptote EF vont concourir à l'infini (233), ces deux lignes sont sensiblement parallèles, quand l'abscisse atteint une certaine longueur n.PH, et alors les ordonnées, que sépare une distance PH, peuvent être regardées comme égales. En conséquence, il y a constamment diminution dans la différence des ordonnées extrêmes de la longueur PH portée plusieurs fois de suite sur EF, et PB — HN surpasse l'excès de HN sur l'ordonnée qui répond à l'abscisse 2PH.

Le pôle P est asymptotique, si la spirale hyperbolique, qui s'en rapproche sans cesse (417), ne peut l'atteindre qu'après une infinité de révolutions. Or, la courbe passera par P seulement lorsque l'ordonnée de l'hyperbole sera nulle, c'est-à-dire quand l'abscisse sera infiniment grande ou vaudra une infinité de fois PH.

419. *La spirale hyperbolique dont le pôle est au croisement des asymptotes n'a ni commencement, ni fin, et présente une partie sensiblement droite.*

Nous venons de voir que, dans tous les cas, le point générateur de la courbe tourne sans cesse autour du pôle, sans pouvoir jamais l'atteindre. Mais, si ce pôle est en E (P. IX, F. 10), l'origine B passe sur l'asymptote DE, et se trouve conséquemment à l'infini.

Dans un tel cas, une partie KL de la spirale hyperbolique (F. 11) doit évidemment se confondre, à bien peu près, avec une droite parallèle à PE.

420. *La spirale hyperbolique dont le pôle diffère du croisement des asymptotes n'a non plus, en réalité, ni commencement, ni fin, et la droite* EF *qui joint les deux points est asymptote de la courbe aussi bien que de l'hyperbole régulatrice, quand* EP $= \frac{5}{12}$ PH (P. IX, F. 10).

Faisons tourner le véhicule en sens inverse, de manière qu'il passe de la position PO à la position PB; le point générateur, parti de P, passera successivement, après une infinité de révolutions, par G, O, B. Mais, celle qui donnera ces points ne sera pas la dernière, car il n'y a pas de raison pour que le mouvement s'arrête en B. Les ordonnées comprises entre P, E donnent donc aussi des points de la spirale, étant portées sur P.XI, P.X, P.IX ou PF, etc. Or, si EP $= \frac{5}{12}$ PH, c'est sur PF qu'il faudra porter la dernière ordonnée ED, celle dont l'abscisse est zéro, et comme elle est infiniment grande, la spirale ne pourra rencontrer PF qu'à l'infini.

PROBL. (*a*) : *Tracer une spirale hyperbolique dont le pôle n'est pas au centre de l'hyperbole régulatrice.*

Marquez le pôle P sur EF, l'une des asymptotes, à une certaine distance du centre E de l'hyperbole (P. IX, F. 10); décrivez un cercle, du point P, avec un rayon arbitraire PH; partagez ce rayon et la circonférence en un même nombre de parties égales, douze par exemple, de manière qu'un des rayons diviseurs se confonde avec l'ordonnée PB d'équerre sur EF; numérotez les points de division, à partir de P pour PH et à partir de PB pour la circonférence; élevez des ordonnées de l'hyperbole, 1.K, 2.L, etc., par tous les points de PH; portez 1.K sur P.I, 2.L sur P.II, 3.M sur P.III, etc., et HN sur P.XII; en joignant, par une courbe, tous les points ainsi marqués, vous aurez la première spire BOG.

Pour obtenir la seconde, portez douze fois une des parties de PH sur le prolongement de cette droite, à partir de H; élevez encore, par les points de division, des ordonnées de l'hyperbole régulatrice, et employez-les comme les précédentes.

La troisième spire résulterait d'une nouvelle longueur PH, portée à la suite des deux premières et divisée de la même façon; ainsi des autres.

Probl. (*b*): *Tracer une spirale hyperbolique dont le pôle est au centre de l'hyperbole régulatrice.*

D'un point D (P. IX, F. 11), pris à volonté sur une partie de l'hyperbole ABC, très-voisine de l'asymptote PE, menez une parallèle D.1 à cette droite, jusqu'à l'autre asymptote PF; portez, sur cette dernière, la longueur P.1 un certain nombre de fois, à partir de P, douze par exemple, pour former le rayon PH d'un cercle dont le centre soit au pôle, et achevez comme dans le problème précédent. L'ordonnée D.1, portée sur le rayon P.I, donnera un premier point de la courbe; la droite KL, menée parallèlement à PE, différera peu de l'arc compris entre K et l'infini; la première spire, terminée en G, aura pour corde la droite infiniment grande GE.

Application : La spirale hyperbolique convient mieux que la spirale d'Archimède aux volutes qui doivent se terminer, vers le pôle, par le petit cercle qu'on appelle *œil* en architecture, puisque les spires qui viennent après la seconde, et parfois celle-là, se confondent presque avec des circonférences dont le pôle est le centre. Ainsi, au lieu de tracer la volute du chapiteau ionique en imitant la spirale d'Archimède, au moyen d'arcs de cercle raccordés, il est préférable de la faire en spirale hyperbolique: cette forme lui donne plus de régularité et de grâce, surtout parce qu'elle permet de placer le centre de l'œil au pôle même, sans nuire d'une manière sensible à l'exactitude du raccordement entre la circonférence et la spire qui la précède.

421. *Les spirales hyperboliques compagnes ont, pour courbes régulatrices, des hyperboles différentes, mais de mêmes asymptotes; la différence entre leurs rayons vecteurs de même direction n'est pas constante.*

Des spirales compagnes doivent avoir une génération et un pôle communs. Or, deux spirales hyperboliques qui seraient dans ce cas, se confondraient, si en outre elles avaient la même régulatrice, puisque leurs origines formeraient alors un seul point.

Les deux branches d'hyperbole ont des asymptotes communes, pour que les origines des spirales soient sur des rayons vecteurs de même direction, et que ces courbes ne se coupent pas.

La différence des rayons vecteurs situés sur la même droite doit être variable, car quelle que fût la longueur constante retranchée des rayons vecteurs de la spirale BOGP (P. IX, F. 10), la courbe qui résulterait de la soustraction couperait nécessairement l'autre avant d'atteindre le pôle P. Or, l'emploi de deux branches d'hyperboles, qui ont des asymptotes communes, rend en effet variable la différence dont il s'agit, puisqu'elle égale toujours la différence de deux ordonnées correspondantes, et que celle-ci diminue à mesure que les deux courbes approchent de leur concours infiniment éloigné.

Problème : *Tracer deux spirales hyperboliques compagnes.*

L'une des deux s'obtient comme dans les problèmes du n° 420. Si l'autre doit embrasser celle-là, tracez une seconde branche d'hyperbole qui ait mêmes asymptotes que la première et un axe transverse plus grand ; puis, appliquez les problèmes cités. Dans le cas contraire, diminuez l'axe transverse.

422. *Dans une spirale hyperbolique dont le pôle est au centre de l'hyperbole équilatère régulatrice, tous les arcs circulaires décrits de ce pôle, entre la courbe et la première position du véhicule, ont la même longueur.*

Soit PB le demi-axe transverse de l'hyperbole ABC (P. IX, F. 11). Nous ferons voir d'abord qu'entre l'ordonnée y et l'abscisse x d'un point quelconque de cette courbe, existe la relation

$$y = \frac{\overline{PB}^2}{2x}.$$

Supposons, pour plus de généralité, que les asymptotes SE, SF se coupent à angle aigu (F. 12). Les angles ESB, BSF n'en seront pas moins égaux (237) ; GH, parallèle à SE, formera le triangle symétrique SHI, et GK, BE, perpendiculaires à l'axe SB, donneront

$$GK : SC :: GI : SE, \quad GK = GI\frac{SC}{SE}, \quad \overline{GK}^2 = (GH - HI)^2\frac{\overline{SC}^2}{\overline{SE}^2}.$$

On a aussi

$$IK : SB :: GI : SE, \quad IK = (GH - HI)\frac{SB}{SE}.$$

Mais $SI = 2SL$, si HL est menée perpendiculairement à SB ; $SL : SB :: SH : SE$ ou $SL = HI\frac{SB}{SE}$. Donc

$$SI = 2HI\frac{SB}{SE};$$

$$SI+IK = 2HI\frac{SB}{SE}+(GH-HI)\frac{SB}{SE} = (GH+HI)\frac{SB}{SE},$$

et

$$\overline{SK}^2 = (GH+HI)^2\frac{\overline{SB}^2}{\overline{SE}^2}.$$

Or (243), $\overline{GK}^2 = (\overline{SK}^2-\overline{SB}^2)\frac{\overline{SC}^2}{\overline{SB}^2}$. En conséquence,

$$(GH-HI)^2\frac{\overline{SC}^2}{\overline{SE}^2} = (GH+HI)^2\frac{\overline{SC}^2}{\overline{SE}^2}-\overline{SC}^2,$$

$$(GH-HI)^2 = (GH+HI)^2-\overline{SE}^2,$$

$$\overline{GH}^2-2GH\times HI+\overline{HI}^2 = \overline{GH}^2+2GH\times HI+\overline{HI}^2-\overline{SE}^2,$$

$$4GH\times HI = \overline{SE}^2,\quad GH\times HI = \frac{\overline{SB}^2+\overline{SC}^2}{4},$$

et enfin

$$GH = \frac{\overline{SB}^2+\overline{SC}^2}{4SH}.$$

Si l'hyperbole est équilatère, les angles ESF, GHF sont droits, GH devient y, SH devient x, $SC = SB$, et l'on a effectivement

$$y = \frac{\overline{SB}^2}{2x}.$$

Soit maintenant l'arc $KR = \frac{2\pi\times PK}{m}$, m étant un nombre quelconque. Comme la circonférence $2\pi\times PH$ et son rayon sont divisés de la même manière, la première par les rayons vecteurs de la spirale, le second par les ordonnées qui égalent respectivement ces rayons, PK vaut l'ordonnée dont l'abscisse est $\frac{PH}{m}$; ainsi

$$PK = \frac{\overline{SB}^2}{2\frac{PH}{m}}.$$

Si nous considérons un autre arc quelconque NQ, tel que son rayon $PN = \frac{PK}{n}$, n étant aussi un nombre quelconque, nous aurons

$$PN = \frac{\overline{SB}^2}{2\frac{n}{m}PH},$$

ce qui montre que l'abscisse de l'ordonnée égale à PN vaut $\frac{n}{m}PH$, et que $NQ = \frac{n}{m} 2\pi \times PN$. Donc

$$NQ = \frac{n}{m} 2\pi \frac{PK}{n} = \frac{2\pi \times PK}{m} = KR.$$

423. *Dans une spirale hyperbolique dont le pôle se trouve au croisement des asymptotes, la sous-tangente est constante: elle égale l'arc circulaire décrit du pôle, depuis le contact jusqu'à la première position du véhicule.*

Ainsi, la tangente NT au point N de la spirale (P. IX, F. 11) a, pour sous-tangente (414), PT = NQ.

Le point générateur n'a pas un mouvement uniforme, comme pour la spirale d'Archimède, puisque des augmentations égales dans son chemin circulaire en produisent d'inégales dans son chemin rectiligne. Cependant, arrivé de Q en N, par exemple, il peut être regardé comme devant parcourir ensuite, uniformément et dans le même temps, l'arc infiniment petit $\frac{NQ}{n}$ et l'infiniment petite ligne droite $\frac{NP}{m}$. Ces deux chemins étant d'équerre, il faut développer le premier sur NU, perpendiculaire à NP. Alors (10), la tangente PT se confond, en direction, avec la diagonale NS du rectangle NOSU, dont les côtés NO, OS valent respectivement $\frac{NP}{m}$, $\frac{NQ}{n}$.

Représentons NP par r, et posons $NQ = \frac{2\pi r}{k}$. Les deux triangles semblables NPT, NOS donnent

$$PT : \frac{2\pi r}{kn} :: r : \frac{r}{m} \quad \text{et} \quad PT = \frac{2\pi}{kn} r^2 : \frac{r}{m}.$$

Or, NS étant une droite infiniment petite, peut être regardée comme un élément de la spirale, ce qui met le point S sur cette courbe, et rend égal à NQ ou à $\frac{2\pi r}{k}$ l'arc décrit de P avec PO pour rayon (422). Ce dernier vaut évidemment $VO + OS = \frac{2\pi}{k}\left(r - \frac{r}{m}\right) + \frac{2\pi r}{kn}$. Par conséquent,

$$\frac{2\pi r}{k} - \frac{2\pi r}{km} + \frac{2\pi r}{kn} = \frac{2\pi r}{k}, \quad \frac{2\pi r}{kn} = \frac{2\pi r}{km}, \quad m = n,$$

et

$$PT = \frac{2\pi r}{k} = NQ.$$

424. *Dans une spirale hyperbolique dont le pôle se trouve éloigné du croisement des asymptotes, la sous-tangente est variable; mais elle égale toujours un multiple de l'arc circulaire* OQ, *décrit*

du pôle entre le contact O *et la première position* PB *du véhicule* (P. IX, F. 10); *le facteur de cet arc vaut le quotient de la somme de deux rapports divisée par l'un des deux; ce dernier forme le nombre de fois que la distance* EP *du pôle au croisement des asymptotes est contenue dans l'abscisse* PH *qui répond à la fin* G *de la première spire; l'autre exprime le nombre de fois que la circonférence* $2\pi\times$ PO *contient l'arc* OQ.

Le point générateur a un mouvement varié; mais on peut admettre qu'après son arrivée en O, il parcourt uniformément, dans le même temps, l'arc infiniment petit $\frac{OQ}{n}$, et la ligne droite, infiniment petite aussi, $\frac{OP}{n'}$ ou $\frac{r}{n'}$. Comme ces deux chemins sont d'équerre, la tangente en O est dirigée (10) selon la diagonale du rectangle qui a pour côtés contigus $\frac{OQ}{n}$, $\frac{r}{n'}$, et si $OQ=\frac{2\pi}{m}r$, on a

$$PT : \frac{2\pi}{m}\times\frac{r}{n} :: r : \frac{r}{n'},$$

puis

$$PT=\frac{2\pi r^2}{mn} : \frac{r}{n'}=\frac{2\pi rn'}{mn}.$$

Cherchons maintenant une relation entre le chemin circulaire $\frac{2\pi r}{m}$ et le chemin droit $PB-r$ ou $R-r$ parcouru, dans le même temps, d'un mouvement varié. En désignant par a le demi-axe transverse de l'hyperbole régulatrice et par d la distance EP, nous aurons, d'après la propriété démontrée au n° 422,

$$R=\frac{a^2}{2d}.$$

Mais, l'abscisse de l'ordonnée qui répond à PO est $EP+\frac{PH}{m}$, ou $d+\frac{kd}{m}$, si k indique le rapport de PH à EP. Par conséquent,

$$r=\frac{a^2}{2\left(d+\frac{kd}{m}\right)}=\frac{ma^2}{2d(m+k)},\quad R-r=\frac{a^2}{2d}-\frac{ma^2}{2d(m+k)}=\frac{ka^2}{2d(m+k)},$$

$$\frac{2\pi r}{m}=\frac{2\pi}{m}\times\frac{ma^2}{2d(m+k)}=\frac{\pi a^2}{d(m+k)},\quad \frac{2\pi r}{m} : R-r :: \pi : \frac{k}{2},$$

et

$$\frac{2\pi r}{m}=(R-r)\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi R}{k}-\frac{2\pi r}{k}.$$

Les quantités susceptibles de varier, dans la relation qui vient d'être trouvée, sont $\frac{2\pi}{m}$ et r. Quand la première croît de $\frac{2\pi}{mn}$ et que la seconde décroît de $\frac{r}{n'}$, cette relation, qui existe encore, puisqu'elle est générale, devient

$$\left(\frac{2\pi}{m}+\frac{2\pi}{mn}\right)\left(r-\frac{r}{n'}\right)=\frac{2\pi R}{k}-\frac{2\pi}{k}\left(r-\frac{r}{n'}\right),$$

ce qui donne

$$\frac{2\pi r}{m}-\frac{2\pi r}{mn'}+\frac{2\pi r}{mn}-\frac{2\pi r}{mnn'}=\frac{2\pi R}{k}-\frac{2\pi r}{k}+\frac{2\pi r}{kn'}.$$

Or, le premier terme du premier membre vaut l'ensemble des deux premiers du second membre, et l'on peut négliger $\frac{2\pi r}{mnn'}$ dont le diviseur a deux facteurs infiniment grands. En conséquence,

$$\frac{2\pi r}{mn}=\frac{2\pi r}{n'}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m}\right)=\frac{2\pi r}{n'}\times\frac{m+k}{km},$$

et

$$PT=\frac{2\pi r}{m}\times\frac{m+k}{k},$$

résultat conforme au principe énoncé.

Probl. (*a*) : *Mener une tangente à la spirale hyperbolique, par un point donné sur cette courbe, quand le pôle se confond avec le centre de l'hyperbole équilatère régulatrice.*

Du pôle P (P. IX, F. 11), avec le rayon vecteur PN du point de contact, décrivez un arc de cercle NQ qui se termine à l'asymptote PE, sur laquelle se trouve l'origine; partagez cet arc en un nombre de parties assez grand pour qu'elles puissent être regardées comme des droites; portez toutes ces parties, à partir de P et bout à bout, sur une perpendiculaire élevée en ce point au rayon PN. Vous marquerez ainsi un point T qui, joint au contact N, donnera la tangente NT demandée (423).

Probl. (*b*) : *Mener une tangente à la spirale hyperbolique, par un point donné sur cette courbe, quand le pôle se trouve hors du centre de l'hyperbole équilatère régulatrice.*

Du pôle P (P. IX, F. 10), avec le rayon vecteur PO du contact, décrivez une circonférence; cherchez son rapport numérique m à l'arc OQ, compris entre le contact et la première position PB du véhicule; cherchez aussi le rapport numérique k de l'abscisse PH, relative à l'origine B, et de la distance EP, comprise entre le centre de l'hyperbole et le pôle; déterminez une droite qui contienne le développement de l'arc OQ comme $m+k$ contient k, et portez-la sur PT, perpendiculaire au rayon PO. En joignant au contact O le point T ainsi marqué, vous aurez la tangente TO demandée (424).

Applications : Ces constructions servent à tracer les joints d'une volute exécutée en pierre, selon la spirale hyperbolique, et la projection horizontale du limon droit d'un escalier, lorsqu'elle doit se raccorder avec celle d'un *colimaçon* terminal. Dans ce dernier cas, le pôle de la spirale est placé au centre de l'hyperbole régulatrice, afin que la projection du limon, se confondant, pour ainsi dire, avec la partie presque droite de la courbe (419), semble être la continuation de la volute.

Il y a deux raisons à donner de la préférence qu'on accorde à la spirale hyperbolique, pour le plan du colimaçon d'un escalier soigné : l'œil produit un meilleur effet (appl., page 308) et le raccordement du limon se fait avec plus de grâce. Peut-être même ce dernier motif devrait-il déterminer les serruriers à l'emploi de la spirale hyperbolique pour les potences de reverbère.

425. *Dans une spirale hyperbolique dont le pôle est au centre de l'hyperbole équilatère régulatrice, tout segment compris entre un rayon vecteur et la courbe, terminée au pôle, vaut le secteur circulaire formé par ce rayon et la première position du véhicule.*

Par exemple, le segment limité à PK (P. IX, F. 11) égale le secteur circulaire KPR.

Représentons PK par r, par m le rapport de la circonférence $2\pi r$ à l'arc KR, par $\frac{KR}{n}$ un accroissement infiniment petit du même arc, et par $\frac{r}{n'}$ un décroissement simultané de r. Le secteur circulaire infiniment petit que forment r et $\frac{KR}{n}$ a pour superficie

$$\frac{1}{2}\frac{KR}{n}r,$$

et peut être regardé comme égal au secteur de spirale qu'il couvre. En conséquence, l'élément du segment que limite PK,

$$s=\frac{1}{2}\frac{2\pi r}{mn}r.$$

Mais, entre la première position PE du véhicule et le point de la courbe qui termine l'élément s, il y a un arc de cercle égal à KR (422), et comme cet arc vaut évidemment $\left(\frac{2\pi}{m}+\frac{2\pi}{mn}\right)\left(r-\frac{r}{n'}\right)$, on a

$$\frac{2\pi r}{m}-\frac{2\pi r}{mn'}+\frac{2\pi r}{mn}-\frac{2\pi r}{mnn'}=\frac{2\pi r}{m}.$$

Le terme $\frac{2\pi r}{mnn'}$, dont le diviseur renferme deux facteurs infiniment grands, pouvant être négligé, il s'ensuit

$$\frac{2\pi r}{mn} = \frac{2\pi r}{mn'}, \quad n = n' \quad \text{et} \quad s = \frac{1}{2}\frac{2\pi r}{m} \times \frac{r}{n'}.$$

Le secteur infiniment petit suivant, et chacun des autres, jusqu'à l'épuisement des n' parties de r, c'est-à-dire jusqu'au pôle, auront nécessairement la même valeur que s. Leur somme, qui forme le segment S limité par PK, vaut donc $n's$, et

$$S = \frac{1}{2}\frac{2\pi r}{m} r,$$

comme le dit le principe.

426. *Dans une spirale hyperbolique dont le pôle est au centre de l'hyperbole équilatère régulatrice, tout secteur égale la moitié du produit fait avec la différence de ses deux rayons extrêmes et l'arc circulaire qui, décrit du pôle, va de l'extrémité du plus grand à la première position du véhicule.*

Le secteur KPN, par exemple (P. IX, F. 11), vaut

$$\frac{1}{2}\text{KR}(\text{PK} - \text{PN}).$$

En effet (425), le segment que limite PK,

$$S = \frac{1}{2}\frac{2\pi r}{m} r;$$

le segment que limite PN,

$$S' = \frac{1}{2}\frac{2\pi r'}{m'} r',$$

si r' représente PN, et m' le rapport de la circonférence $2\pi r'$ à son arc NQ. Or (422), NQ = KR, ou $\frac{2\pi r'}{m'} = \frac{2\pi r}{m}$. Par conséquent,

$$S' = \frac{1}{2}\frac{2\pi r}{m} r',$$

et

$$\text{KPN} = S - S' = \frac{1}{2}\frac{2\pi r}{m}(r - r').$$

427. *Dans une spirale hyperbolique dont le pôle est hors du centre de l'hyperbole équilatère régulatrice, tout segment compris entre un rayon vecteur et la courbe, terminée au pôle, vaut le triangle rectangle formé avec ce rayon, la tangente et la sous-tangente relatives à l'extrémité du même rayon.*

Ainsi (424), le segment que limite OP (P. IX, F. 10),

$$S = \frac{1}{2} PT \times OP = \frac{1}{2}\frac{m+k}{k} \times \frac{2\pi r}{m} r.$$

Le secteur élémentaire (425),

$$s = \frac{1}{2}\frac{2\pi r}{mn} r.$$

Mais (424), $\frac{1}{n} = \frac{m+k}{kn'}$. Par conséquent,

$$s = \frac{1}{2}\frac{m+k}{k} \times \frac{2\pi r}{m} \times \frac{r}{n'},$$

et

$$S = s + s' + s'' + \text{etc.} = \frac{1}{2}\frac{m+k}{k} \times \frac{2\pi r}{m} r \left(\frac{1}{n'} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n'} + \text{etc.}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{m+k}{k} \times \frac{2\pi r}{m} r.$$

Probl. (a) : *Mesurer un secteur quelconque* KPN (P. IX, F. 11) *d'une spirale hyperbolique dont le pôle est au centre de l'hyperbole équilatère régulatrice.*

Décrivez du pôle, avec le plus grand PK des rayons qui limitent le secteur, un arc KR qui aille de PK à la première position PE du véhicule, et multipliez la moitié du développement de cet arc par l'excès de PK sur PN (426).

Probl. (b) : *Mesurer un secteur quelconque* OPR (P. IX, F. 10) *d'une spirale hyperbolique dont le pôle est hors du centre de l'hyperbole équilatère régulatrice.*

Cherchez la sous-tangente pour le point R (424, probl. *b*), et prenez la moitié de son produit par PR; vous aurez l'aire du segment que limite PR. Cherchez la sous-tangente pour le point O, et prenez la moitié de son produit par PO; vous obtiendrez le segment que termine PO (427). Retranchez ce second segment du premier; la différence sera évidemment l'aire du secteur donné OPR.

CONCHOÏDES.

428. Les *conchoïdes* (concoïdes) sont des courbes dont le point générateur se meut sur un véhicule droit à point fixe, de manière que les parties de ce véhicule, comprises entre une ligne régulatrice et les diverses positions du point mobile, aient des longueurs données. Le nom de ce genre de courbe vient de ce qu'une des deux espèces, la conchoïde proprement dite, offre sensiblement le profil

ou la coupe d'une valve de coquille d'huître. L'autre espèce, appelée *caméroïde*, sans avoir précisément la même forme, s'en rapproche dans quelques-unes de ses variétés.

CONCHOÏDE.

429. La conchoïde proprement dite BAC a pour régulatrice une droite D'DD'' (P. IX, F. 13), et toutes les parties AD, BD', CD'', etc. des rayons vecteurs, comprises entre les deux lignes, sont égales. Le point fixe P, autour duquel tourne le véhicule est le pôle de la courbe ; le point A, situé sur PD, perpendiculaire à la régulatrice, forme le sommet, et cette même perpendiculaire est un axe de symétrie.

Le même pôle, la même régulatrice et la même distance constante AD répondent toujours à deux conchoïdes : l'une BAC, qui est dite *concave*, parce qu'elle tourne sa concavité vers le pôle P ; l'autre B'A'C', qui est dite *convexe*, parce qu'elle tourne sa convexité vers le même point.

430. *Si l'on prend l'axe de symétrie d'une conchoïde pour celui des abscisses, et la régulatrice pour axe des ordonnées, le rectangle de l'abscisse et de l'ordonnée, d'un point quelconque de la courbe, égale le rectangle formé avec la distance du pôle au pied de l'ordonnée, et le troisième côté d'un triangle rectangle qui a pour hypothénuse la distance constante, pour second côté l'abscisse.*

Considérons la conchoïde concave BAC (P. XI, F. 13), et désignons par x l'abscisse DE du point F, par y l'ordonnée EF, par a la distance constante AD, et par b celle du pôle P à l'origine D. Il faut démontrer que

$$xy = (b+x)\sqrt{a^2-x^2},$$

car PE $= b+x$, et $\sqrt{a^2-x^2}$ est le troisième côté du triangle rectangle dont a, x sont respectivement l'hypothénuse et le second côté.

Le triangle rectangle PEF donne

$$\overline{PF}^2 = (b+x)^2+y^2,$$

et comme PF $=$ PG $+$ GF, on a aussi

$$\overline{PF}^2 = \overline{PG}^2+2PG\times GF+\overline{GF}^2.$$

Mais GF $= a$, PG : PD :: GF : DE, PG $= \frac{ab}{x}$. Par conséquent,

$$\overline{PF}^2 = \frac{a^2b^2}{x^2}+2\frac{ab}{x}a+a^2,\quad (b+x)^2+y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2}+\frac{2a^2b}{x}+a^2,$$

$$x^2(b+x)^2+x^2y^2 = a^2b^2+2a^2bx+a^2x^2 = a^2(b^2+2bx+x^2)$$
$$= a^2(b+x)^2,$$

$$x^2y^2 = (a^2-x^2)(b+x)^2,\quad \text{et}\quad xy = (b+x)\sqrt{a^2-x^2}.$$

On verrait de même que, dans la conchoïde convexe B'A'C',

$$xy = (b - x)\sqrt{a^2 - x^2},$$

x représentant alors l'abscisse DH, y l'ordonnée HI du point I de la courbe, et a la distance constante A'D. Or $b - x$ ou PD — DH = PH, distance du pôle au pied H de l'ordonnée.

431. *La régulatrice d'une conchoïde en est asymptote.*

A mesure que les rayons vecteurs PB, PC s'éloignent de l'axe AP (P. IX, F. 13), ils s'inclinent de plus en plus sur la régulatrice D'D'', et comme les obliques BD', CD'' ne changent point de longueur, les points B, C se rapprochent constamment de D'D''. Mais, évidemment, leurs plus courtes distances à cette droite ne peuvent jamais devenir nulles, ou bien ce n'est qu'à l'infini qu'il est permis de les considérer comme telles. En conséquence, la conchoïde concave ou convexe se rapproche continuellement de sa régulatrice, de chaque côté du sommet, sans pouvoir la rencontrer ailleurs qu'à l'infini (232).

Probl. (*a*) : *Tracer une conchoïde concave.*

Tirez une droite indéfinie D'D'', pour avoir la régulatrice (P. IX, F. 13); élevez une perpendiculaire ADP en un point quelconque de cette droite; marquez arbitrairement le pôle P sur la perpendiculaire; menez de ce point plusieurs transversales de D'D''; portez, sur chacune de ces concourantes, une longueur donnée ou arbitraire, à partir de la régulatrice et du côté opposé au pôle; puis joignez par une courbe tous les points B, F, A...., C.... ainsi marqués.

Probl. (*b*) : *Tracer une conchoïde convexe.*

Opérez comme dans le problème précédent; mais marquez le pôle à une distance de la régulatrice plus grande que la longueur constante à prendre sur les concourantes, et portez cette longueur du côté où se trouve le pôle.

Applications : I. Le facile tracé d'une conchoïde concave suffit pour résoudre ce problème : *Mener, d'un point* P *assigné hors d'un angle* CKD'' (P. IX, F. 13), *une transversale* PC *dont la partie* CD'', *comprise entre les côtés, ait une longueur donnée.*

On prend le point P pour le pôle, et le côté KD'' pour la régulatrice d'une conchoïde concave dont la distance constante égale la longueur donnée. Cette courbe coupe en un point C l'autre côté KC de l'angle, et la droite PC est la transversale cherchée, puisque sa partie CD'' vaut la distance constante.

II. Le problème précédent sert à *déterminer, sans tâtonnement, ni procédé mécanique, deux moyennes proportionnelles entre deux droites données.*

Il faut placer d'équerre les deux droites AB, BC (P. IX, F. 14); élever une perpendiculaire au milieu D de la plus petite; couper cette perpendiculaire en un point E, par un arc décrit de B, avec la moitié de BC; achever le rectangle ABCF; tirer CG par le milieu du côté AF; marquer le point H où CG coupe le prolongement de BA; mener la droite indéfinie BI parallèlement à EH, et du point E, une transversale de l'angle IBK, dont la partie IK égale FG; puis enfin, tirer KC jusqu'au prolongement de AF. Alors, AB, FL, BK, BC forment une progression par quotient, et FL, BK sont les deux moyennes demandées.

D'abord, les triangles semblables CFL, KBC donnent

$$\mathrm{CF}\ \text{ou}\ \mathrm{AB} : \mathrm{FL} :: \mathrm{BK} : \mathrm{BC}.$$

Reste donc à démontrer que, par exemple,

$$\mathrm{FL} : \mathrm{BK} :: \mathrm{BK} : \mathrm{BC} \quad \text{ou que} \quad \mathrm{FL} : \mathrm{BK} :: \mathrm{AK} : \mathrm{AL},$$

car $\mathrm{BK} : \mathrm{BC} :: \mathrm{AK} : \mathrm{AL}$.

Or, la première proportion revient à cette autre

$$\mathrm{AB} : \mathrm{FL} :: \mathrm{BK} : \mathrm{AF}, \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{AB} : \mathrm{FL} :: \mathrm{BK} : \tfrac{1}{2}\mathrm{AF},$$

ou

$$2\mathrm{AB} : \mathrm{FL} :: \mathrm{BK} : \mathrm{FG},$$

et parce que les triangles AGH, FGC rendent égaux les côtés AH, CF ou AB,

$$\mathrm{BH} : \mathrm{FL} :: \mathrm{BK} : \mathrm{FG}.$$

D'ailleurs, $\mathrm{BH} : \mathrm{EI} :: \mathrm{BK} : \mathrm{IK}$, $\mathrm{IK} = \mathrm{FG}$. Donc

$$\mathrm{FL} = \mathrm{EI} \quad \text{et} \quad \mathrm{GL} = \mathrm{EK}.$$

Mais, $\mathrm{AL} \times \mathrm{FL} = (\mathrm{FL} + 2\mathrm{FG})\mathrm{FL} = \overline{\mathrm{FL}}^2 + 2\mathrm{FG} \times \mathrm{FL}$; $\overline{\mathrm{GL}}^2 = (\mathrm{FL}+\mathrm{FG})^2 = \overline{\mathrm{FL}}^2 + 2\mathrm{FL} \times \mathrm{FG} + \overline{\mathrm{FG}}^2$. Ainsi

$$\mathrm{AL} \times \mathrm{FL} + \overline{\mathrm{FG}}^2 = \overline{\mathrm{GL}}^2 = \overline{\mathrm{EK}}^2.$$

D'un autre côté, $\mathrm{AK} \cdot \mathrm{BK} = (\mathrm{AB}+\mathrm{BK})\mathrm{BK} = (2\mathrm{BD}+\mathrm{BK})\mathrm{BK} = 2\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BK} + \overline{\mathrm{BK}}^2$; $\overline{\mathrm{DK}}^2 = (\mathrm{BD}+\mathrm{BK})^2 = \overline{\mathrm{BD}}^2 + 2\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BK} + \overline{\mathrm{BK}}^2$. Par conséquent,

$$\mathrm{AK} \times \mathrm{BK} + \overline{\mathrm{BD}}^2 = \overline{\mathrm{DK}}^2, \quad \mathrm{AK} \times \mathrm{BK} + \overline{\mathrm{BD}}^2 + \overline{\mathrm{DE}}^2 = \overline{\mathrm{DK}}^2 + \overline{\mathrm{DE}}^2,$$

$$\mathrm{AK} \times \mathrm{BK} + \overline{\mathrm{BE}}^2 = \overline{\mathrm{EK}}^2, \quad \mathrm{AL} \times \mathrm{FL} + \overline{\mathrm{FG}}^2 = \mathrm{AK} \times \mathrm{BK} + \overline{\mathrm{BE}}^2,$$

$$\mathrm{AL} \times \mathrm{FL} = \mathrm{AK} \times \mathrm{BK}, \quad \text{et} \quad \mathrm{FL} : \mathrm{BK} :: \mathrm{AK} : \mathrm{AL}.$$

III. La conchoïde, déterminant les deux moyennes qui peuvent être insérées entre deux droites données, permet toujours de *trouver la longueur des arêtes d'un cube multiple d'un autre cube donné.*

Supposons qu'il s'agisse de faire un cube égal à n fois celui dont les arêtes ont une longueur a. On cherche les deux moyennes de a, na, et la première est la longueur des arêtes à donner au cube demandé.

En effet, si x, y sont les deux moyennes,

$$a : x :: y : na \quad \text{et} \quad a : x :: x : y.$$

Conséquemment,

$$y = \frac{x^2}{a}, \quad x = \frac{na^2}{y} = \frac{na^3}{x^2}, \quad x^3 = na^3.$$

De là une solution de la duplication du cube plus simple que celle de la page 214, car une seule conchoïde, au lieu de deux paraboles, fournit deux moyennes entre l'arête a du cube donné et le double $2a$ de cette arête, et la première de ces moyennes est l'arête du cube double.

IV. A une certaine époque, les architectes prenaient, pour génératrice des colonnes, un arc de conchoïde concave, afin que ces supports, sous le plus petit volume possible, opposassent à l'écrasement la même résistance dans toutes leurs sections horizontales. L'axe de la courbe, placé horizontalement, coupait celui de la colonne au tiers de la hauteur, à partir de la base, et la distance constante était prise de manière qu'il en résultât un diamètre suffisant pour l'extrémité supérieure du fût.

On inventa même un instrument, nommé *té*, propre à tracer, d'un mouvement continu, le profil conchoïdal d'une colonne. Il se composait de trois règles AB, CD, EF (P. IX, F. 15), mortaisées dans le milieu, sur presque toute leur longueur. Les deux premières étaient assemblées à angles droits; la troisième portait une pointe directrice F et une pointe traçante G; elle tournait et glissait sur une vis rendue fixe en un certain point E de CD, pendant que la pointe directrice, fixée en F, parcourait la mortaise de AB. La pointe traçante restait aussi constamment au même point de EF. Par conséquent, cette pointe décrivait une conchoïde concave GHI qui avait E pour pôle, AB pour régulatrice, DH pour axe, et FG pour distance constante.

Le té à conchoïde n'est plus employé aujourd'hui: on préfère les colonnes en troncs de cône aux colonnes renflées. Les premières, renfermant, à leur partie inférieure, un peu plus de matière, ont un plus grand poids et coûtent parfois plus cher; mais leur forme est beaucoup plus agréable.

CAMÉROÏDES.

432. Les *caméroïdes* sont des courbes qui entrent, comme l'indique leur nom, dans le profil des voûtes; elles forment l'intersection de la surface extérieure et d'un plan perpendiculaire à l'axe du berceau, quand on veut que la résistance à l'enfoncement soit partout la même. Aussi les architectes les nomment-ils *courbes d'extrados*, par opposition à la courbe du cintre qui est dite *d'intrados*.

Une voûte qu'on n'a pas extradossée est limitée extérieurement soit par un plan parallèle au plan de naissance, soit par une courbe équidistante au cintre. Dans le premier cas, la résistance est en excès vers les piédroits, si elle est suffisante à la clef, et dans le second, elle se trouve surabondante à la clef, si elle convient aux coussinets. Voilà donc la voûte chargée, par ses propres voussoirs, d'un poids inutile, qui nuit même à la solidité, et les frais de construction sont augmentés, non-seulement en pure perte, mais encore au préjudice de la durée.

433. Chaque caméroïde a pour régulatrice la courbe d'intrados; son pôle se trouve au milieu de la ligne de naissance; cette droite est asymptote, et les parties des rayons vecteurs comprises entre la caméroïde et sa régulatrice sont inégales. Mais, dans la plupart des cas, on substitue à ces rayons, les normales du cintre, parce que ce sont les épaisseurs des voussoirs qui servent à déterminer les points de la courbe.

Probl. (*a*) : *Tracer la courbe d'extrados d'une voûte en plein-cintre.* Divisez en un nombre impair de parties égales le demi-cercle ABC d'intrados (P. IX, F. 16); tirez les lignes de joint par les points de division et le centre D; portez, de D en E, sur la ligne de naissance AC, la moitié de la plus petite épaisseur qui puisse être donnée à la clef; élevez en E une perpendiculaire sur AC, jusqu'à la rencontre de la ligne de joint DG; menez, par l'intersection H, une parallèle HI à AC. Les parties de HI, comprises entre les lignes de joint, seront les épaisseurs moyennes qu'il conviendra de donner aux voussoirs.

Tracez donc les bissectrices DK, DL, etc., des arcs de douelle; portez HM sur la première, de K en N, puis MI sur la seconde, de L en O; ainsi des autres; prenez la distance BP égale au double de DE, et par les points P, N, O, etc., tracez une courbe; elle sera la moitié de la caméroïde demandée.

L'autre moitié s'obtient de la même manière, mais on peut aussi porter les lignes de joint GQ, RS, etc., sur leurs correspondantes situées à gauche de l'axe DP.

Ainsi, c'est à la courbe ...ONPN'O'... que devraient se terminer tous les voussoirs, pour que la voûte, réduite à la moindre masse possible, eût toute la solidité dont elle est susceptible. Mais on arrête ordinairement la caméroïde aux prolongements des faces internes AA', CC' des piédroits, et il en est de même pour les joints que cette courbe ne rencontre pas: la solidité de la voûte n'en est que plus grande, car alors on ajoute un joint horizontal au joint incliné dont une partie se trouve supprimée.

Probl. (*b*) : *Tracer la courbe d'extrados d'une voûte elliptique.* Divisez en un nombre impair de parties égales la demi-ellipse ABC d'intrados (P. IX, F. 17); menez, par les points de division, des normales à la courbe, pour avoir les directions des lignes de joint; portez, de D en E, sur la ligne de naissance AC, la moitié de la moindre épaisseur que puisse recevoir la clef; tirez, par E, une parallèle au joint FG, jusqu'à la rencontre du petit axe BD de l'ellipse, si la voûte est surbaissée, ou jusqu'à la rencontre du grand axe, si le cintre est surhaussé; tirez aussi, par l'intersection H, des parallèles HI, HK, HL, etc., aux lignes de joint M, N, O, etc. Les parties de la ligne de naissance, comprises entre les droites issues de H, seront les épaisseurs moyennes à donner aux voussoirs.

Marquez donc les milieux des arcs de douelle GM, MN, NO, etc.; tracez, par ces points, des normales de l'ellipse; portez, à partir du cintre, EI sur la première, IK sur la seconde, KL sur la troisième, etc.; prenez la distance BP égale au double de DE, et, par les points ainsi marqués, faites passer une courbe; elle sera la moitié de la caméroïde demandée.

Le reste du dessin de la voûte se fait comme dans le problème précédent.

Remarque : Ce tracé, appliqué à la voûte parabolique, donne, pour les voussoirs, des épaisseurs moyennes qui vont en diminuant de la clef aux piédroits. La plus grande épaisseur d'une telle voûte est donc au point culminant, ce qui s'accorde avec ce que nous avons établi dans l'application I (page 231).

PROBL. (*c*): *Tracer la courbe d'extrados d'une voûte gothique en tiers-point.*

Comme le cintre est composé de deux arcs de cercle égaux AB, BC, qui ont leurs centres en C, A (P. IX, F. 18), la courbe d'extrados sera formée de deux caméroïdes égales qui se couperont aussi sur BD, perpendiculaire au milieu de la ligne de naissance AC.

Pour obtenir l'une des deux courbes, portez, de A en E, sur AC, la moitié de la moindre épaisseur qu'on puisse donner à la clef; tirez, par E, une parallèle à la corde AB, jusqu'à la ligne de joint AG, et par l'intersection H, une parallèle HI à la ligne de naissance. Les parties HK, KI, etc., de cette dernière parallèle, comprises entre les lignes de joint, seront les épaisseurs moyennes des voussoirs, et vous acheverez comme dans le problème (*a*).

SINUSOÏDES.

434. Nous voici arrivés au second ordre de la première classe des courbes planes, où le véhicule droit se meut le long d'une directrice droite. Pour les *sinusoïdes*, qui forment un genre de cet ordre, les diverses positions du véhicule sont perpendiculaires à la directrice, et le mouvement du point générateur sur ces parallèles est réglé par une courbe fermée.

Nous étudierons seulement la sinusoïde proprement dite, dont la régulatrice est une circonférence; celles où le mouvement dépend d'une ovale n'offrent aucun intérêt.

SINUSOÏDE.

435. *Les distances de la directrice au point générateur d'une sinusoïde égalent les sinus d'arcs de la circonférence régulatrice, et* *ces arcs sont proportionnels aux chemins parcourus sur la directrice par le véhicule.*

Le nom imposé à la courbe vient de cette définition, ou bien de ce que, serpentant sur la directrice, elle forme autant de sinuosités qu'elle la coupe de fois.

En effet, plaçons le point générateur en un point quelconque A de la directrice AB (P. IX, F. 19), et supposons que, dans la position DE du véhicule, la distance DE de la directrice au même point générateur égale le sinus D'E' du huitième A'E' de la régulatrice C. Quand le véhicule, toujours d'équerre sur AB, aura parcouru un chemin AF double de AD, le point générateur se trouvera en un point G, tel que FG égalera le sinus d'un arc double de A'E'; c'est-à-dire que FG vaudra le sinus du quart A'G' de la circonférence ou le rayon CG'. Pour un chemin triple AH, la distance HI sera H'I', sinus des $\frac{3}{8}$ de la circonférence; pour un chemin quadruple AK, la distance du point générateur égalera le sinus des $\frac{4}{8}$, A'G'K', de la circonférence, et sera nulle; pour un chemin quintuple AL, la distance LM vaudra H'M', sinus des $\frac{5}{8}$ de la régulatrice; pour un chemin sextuple AN, la distance NO sera encore le rayon, sinus des $\frac{6}{8}$ ou des $\frac{3}{4}$, A'G'O', de la circonférence; le chemin septuple AP rendra la distance PQ égale à D'Q', sinus des $\frac{7}{8}$ de la régulatrice, et enfin la distance sera nulle de nouveau, comme le sinus de la circonférence entière, quand le chemin AB contiendra huit fois AD.

Or, il est visible que ce qui s'est passé de A en B, se reproduira de B en R, si BR = AB. Par conséquent, la courbe, partie de la directrice, s'en écarte d'une quantité égale au rayon de la régulatrice, s'en rapproche ensuite, la croise pour faire un second écart égal au premier, revient la couper de nouveau, s'écarte encore autant que les deux premières fois, et continue toujours ainsi indéfiniment.

436. L'arc de sinusoïde AGKOB (P. IX, F. 19), qui répond à un tour complet du point A' autour de C, forme une *évolution;* la corde AB de cet arc, ou son égale BR, est la *base* de la courbe. La directrice AR se nomme aussi *axe*, parce qu'elle partage évidemment la sinusoïde en deux parties égales; mais ce n'est pas un axe de symétrie. Enfin, *chaque intersection de la courbe et de son axe est un point d'inflexion* (8).

Effectivement, les sinus n'étant point proportionnels à leurs arcs, ne le sont pas non plus aux chemins du véhicule, et la partie GIK, par exemple, ne peut être une droite. D'un autre côté, les mêmes sinus diminuent lentement, de G' en I', puis rapidement, de I' en K'. Par conséquent, il en est de même pour les ordonnées de la sinusoïde, de F en H et de H en K, ce qui fait que l'arc GIK tourne sa concavité vers FG. Or, pour des raisons analogues, la concavité de l'arc KMO est tournée du côté de NO. La courbure change donc de sens au point K.

PROBLÈME : *Tracer une sinusoïde.*

En un point C du prolongement de l'axe AR (P. IX, F. 19), décrivez la circonférence régulatrice, et divisez-la en un nombre pair de parties égales, à partir de son intersection A′ avec l'axe; divisez de la même manière la base arbitraire AB; élevez sur cette base des perpendiculaires, à chaque point de division; menez des parallèles à la même base, par les points de division du cercle. Les intersections des perpendiculaires et des parallèles de même numéro seront des points de la sinusoïde. Le point E, par exemple, est à la rencontre de la première perpendiculaire DE et de la première parallèle E′E; le point G se trouve au concours de la seconde perpendiculaire FG et de la seconde parallèle G′G; le point K est donné par la quatrième perpendiculaire et par la quatrième parallèle K′K qui se confond avec l'axe.

APPLICATIONS : La sinusoïde est propre à l'ornement des grilles et des balcons. Les peintres décorateurs peuvent aussi l'employer. Mais, c'est surtout pour le dessin exact d'une vis qu'elle est utile, car elle forme la projection de chaque arête du filet sur un plan parallèle à l'axe de la machine.

437. *Les sommets* G, S, etc. *d'une sinusoïde, situés du même côté de l'axe* (P. IX, F. 19), *sont sur une droite parallèle à cet axe et tangente à la courbe.*

La droite GS est parallèle à l'axe AR, parce que les distances FG, ST, etc., des sommets à la directrice, sont toutes égales au rayon de la régulatrice (435), et la même droite GS touche la sinusoïde à tous les sommets qu'elle contient, parce que aucun autre point, situé du même côté de l'axe, n'en étant aussi écarté que ceux-là, il est impossible à GS de passer par deux points de l'arc AGK, ou de l'arc BSU, ou de tout autre arc analogue.

PROBLÈME : *Tracer une tangente de la sinusoïde, par un point donné sur cette courbe.*

Au point d'inflexion K, le plus voisin du contact donné M (P. IX, F. 19), élevez une perpendiculaire KV à l'axe AR, et menez par M une parallèle MV au même axe; portez, sur la tangente en M′, la longueur de l'arc M′K′ de la régulatrice, qui correspond à l'arc MK de la sinusoïde; projetez cette longueur M′X′ sur KV, au moyen d'une parallèle à l'axe; puis joignez M au point X ainsi marqué. La droite MX sera la tangente demandée.

Démonstration : La sinusoïde peut être engendrée par l'extrémité A′ du rayon CA′, si ce rayon tourne autour du centre C, pendant que le même centre chemine sur l'axe comme le véhicule (435). En effet, élevons d'abord le point C d'une quantité A′A, pour placer A′ sur A; puis, élevons-le encore d'une quantité AD $= \frac{1}{8}$AB, tout en faisant tourner CA′ d'un angle A′CE′ qui ait pour indication

$\frac{360°}{8}$; l'extrémité A', devenue E', se trouvera nécessairement sur le point E de la sinusoïde.

Ainsi, le point générateur, arrivé en M, peut être regardé comme animé d'un mouvement parallèle à l'axe et d'un mouvement circulaire, en vertu desquels il parcourrait, dans un temps donné, la même fraction, $\frac{1}{8}$ par exemple, de la base AB et de la circonférence régulatrice : c'est-à-dire VM et K'M'. Or, le parcours de l'arc K'M' peut être remplacé par celui d'une partie égale X'M' de la tangente au cercle, et ce dernier revient au parcours, sur KV, d'une longueur XV, égale à la projection de X'M'. En conséquence (16), la tangente du point M est la diagonale du rectangle MVXY.

Remarque: Les tangentes de la sinusoïde, à l'exception de celles qui sont, comme GS, parallèles à l'axe, coupent toujours la courbe quelque part. Mais celles des points d'inflexion la coupent seules au contact.

LOGARITHMIQUES.

438. Les diverses positions du véhicule droit des *logarithmiques* sont d'équerre sur la directrice, comme dans les sinusoïdes ; mais il n'y a point de régulatrice : elle est remplacée par cette condition, que la distance DE (P. IX, F. 20), du point générateur E à la directrice AB, égale le logarithme de la distance AD du véhicule DE à un point fixe A, arbitrairement marqué. En d'autres termes, *chaque ordonnée* DE *est le logarithme de l'abscisse correspondante* AD. De là vient le nom du genre de courbes qui nous occupe.

Ce sont les différents systèmes de logarithmes qu'on peut employer, qui diversifient les logarithmiques. La courbe est dite *népérienne*, si les ordonnées sont prises dans les tables de Néper ; elle est dite *décimale*, quand les logarithmes des abscisses sont cherchés parmi ceux dont le nombre 10 forme la base.

439. *Pour toute logarithmique, l'axe* AC *des ordonnées est une asymptote* (P. IX, F. 20) ; *l'abscisse* AF, *comprise entre l'origine et la courbe, égale l'unité ; cette abscisse forme le paramètre* (51).

L'ordonnée dont le pied est à l'origne A vaut le logarithme de zéro (438) ; elle se trouve, en conséquence, infiniment grande et négative ; d'où il suit que le prolongement AC' de l'axe AC des ordonnées coïncide avec la courbe à l'infini (232).

L'abscisse AF, répondant à une ordonnée nulle, a zéro pour logarithme, et, dans tous les systèmes, zéro est le logarithme de l'unité.

440. *Si l'on porte des parties égales sur l'axe des ordonnées d'une logarithmique, à partir de celui des abscisses, chacune des abscisses issues des points de division est moyenne proportionnelle entre ses deux voisines.*

Soit AG = AH = HI = IK (P. IX, F. 20). Les ordonnées AG o, AH, AI, AK, etc. forment une progression par différence, car $+AG - o = AG$, $o - (-AH) = AH = AG$, $-AH - (-AI) = -AH + 2AH = AH$, $-AI - (-AK) = -2AH + 3AH = AH$, etc. Conséquemment, les abscisses GL, AF, HM, IE, KN, etc., dont ces ordonnées sont les logarithmes (438), doivent former une progression par quotient; d'où il suit que, par exemple, GL : AF :: AF : HM, et que HM : IE :: IE : KN.

Probl. (*a*) : *Tracer la logarithmique népérienne.*

Tirez deux droites d'équerre AB, AC (P. IX, F. 20); prenez, sur la première, une longueur quelconque AF pour unité; portez cette même longueur sur l'autre, de A en C; élevez, au point C, une abscisse CO égale à 2,72 AF; les points F, O appartiendront à la courbe (439), car 2,72 étant, à moins de 0,01 près, la base du système népérien, ou hyperbolique, a l'unité AC pour logarithme.

Vous aurez le point L, dont l'ordonnée $AG = \frac{1}{2}AC$, en cherchant une moyenne proportionnelle GL entre CO et AF (440). Le point E, dont l'ordonnée $AI = -AC$, a pour abscisse IE ou AD, troisième proportionnelle de CO, AF. Enfin, à l'aide de moyennes et de troisièmes proportionnelles aux abscisses déjà connues, vous pourrez trouver autant de points qu'il en faudra pour bien déterminer la courbe.

Probl. (*b*) : *Tracer la logarithmique décimale.*

Tirez deux droites d'équerre AB, AC (P. IX, F. 21); prenez, sur la première, une longueur quelconque AF pour unité; portez cette même longueur neuf fois de suite sur son prolongement; au point B qui en résulte, élevez une ordonnée BD = AF; prenez encore AE = AF; puis, élevez en E une abscisse EG = 0,1 AF; les points D, F, G appartiendront à la courbe (439), car $BD = +1$ est le logarithme vulgaire de AB ou 10, $AE = -1$ est le logarithme vulgaire de EG ou 0,1.

Vous trouverez le point qui répond à l'ordonnée $\frac{1}{2}AE$, en cherchant une abscisse moyenne proportionnelle entre EG et AF (440). Le point relatif à l'ordonnée $\frac{1}{2}BD$ ou $\frac{1}{2}AD'$ a pour abscisse une moyenne proportionnelle entre AF et D'D. Le point dont l'ordonnée est AC ou 2AD' exige une abscisse qui soit troisième proportionnelle à AF, D'D. Ainsi des autres.

Applications : I. Les logarithmiques peuvent servir à trouver, sans calculs et sans tables, les logarithmes de droites données par un plan. Si, par exemple, on porte une de ces droites de A en D, sur l'axe des abscisses d'une logarithmique dont le paramètre AF soit l'unité de l'échelle du plan (P. IX, F. 20), et qu'on mène, par D, une parallèle à l'axe des ordonnées, jusqu'à la courbe LMN, cette parallèle DE sera le logarithme de AD, dans le système employé pour la construction de la logarithmique.

II. La logarithmique népérienne sert principalement au tracé de la courbe nommée *chainette* qui fera le sujet du chapitre suivant.

III. La trajectoire qu'un projectile suit dans l'air est divisée, par son point culminant, en deux arcs de natures différentes, et l'arc descendant forme une variété de la logarithmique népérienne. Son paramètre vaut $\frac{1}{m}$, m étant un nombre relatif à la résistance de l'air et dépendant de la densité de ce fluide, de celle du projectile et du diamètre. En d'autres termes, les ordonnées égalent les logarithmes népériens ou hyperboliques des abscisses, si celles-ci sont prises à partir d'une parallèle à l'asymptote, qui en soit éloignée de $m - 1$ fois le paramètre.

Dans le vide, la gravité est la seule force qui agisse sur le projectile, une fois que la poudre enflammée a donné l'impulsion, et de la bouche à feu E au point culminant P (P. VI, F. 12), elle détruit toute la vitesse verticale. Donc, à la fin du parcours de l'arc descendant PG, cette force doit avoir rendu au projectile la vitesse du départ, et nécessairement il lui a fallu pour cela un temps égal à celui de l'ascension. Par conséquent, les distances horizontales EH, HG ont été parcourues dans le même temps. Mais la gravité ne saurait altérer la vitesse horizontale, puisqu'elle lui est perpendiculaire. Ainsi, cette vitesse reste toujours la même, EH = HG, et comme, pour les mêmes raisons, IL = LK, à une hauteur quelconque, les arcs EP, PG sont symétriques.

Il suit encore d'une vitesse horizontale constante, que la gravité ne peut rendre vertical un élément de l'arc PG, qu'après avoir donné à la vitesse verticale une valeur infiniment grande, ou qu'au bout d'un temps infiniment long, ou qu'à une distance infinie de l'axe PH. Donc, comme la parabole (338), l'arc PG a pour asymptote une parallèle à PH, infiniment éloignée de cet axe, et il en est de même pour l'arc EP (p. 200, appl. II).

Dans l'air, pendant l'ascension, la résistance du fluide, proportionnelle au quarré numérique de la vitesse, concourt avec la gravité pour atténuer la vitesse verticale. Pendant la descente, au contraire, la même résistance détruit à chaque instant une partie de la vitesse due à la gravité, et dans les deux cas, elle diminue sans cesse la vitesse horizontale. Par conséquent, la vitesse tangentielle en N n'égale pas celle qui a lieu en M; la résultante de cette vitesse et de celle que donne la gravité dans un temps très-court, n'a pas la même direction qu'au point M; le très-petit arc NK n'est pas le symétrique de l'arc correspondant MI, et les arcs EP, PG ne se ressemblent nullement.

En second lieu, la vitesse horizontale, décroissant toujours et rapidement, arrive à une valeur infiniment petite, au bout d'une distance limitée E*h*. Alors, elle est nulle, par rapport à l'effet fini de la gravité, et le mouvement se continue selon la verticale *ph*. Cette droite se trouve donc tangente à l'arc PG, dès que la vitesse horizontale devient infiniment petite. Or, cela ne peut avoir lieu qu'après un temps infini, puisque la vitesse horizontale perd, à chaque instant, la même fraction de ce qu'elle était dans l'instant précédent. Donc enfin, l'arc descendant PG a une asymptote pk analogue à celle d'une logarithmique (439).

Pour les boulets, les obus et les balles de fusil, le point culminant de la trajectoire a une si petite élévation, et l'arc ascendant une si faible courbure, que cet arc peut être regardé comme appartenant à la logarithmique dont l'arc descendant fait partie. Ainsi, ces sortes de projectiles ont une logarithmique pour trajectoire; mais il n'en est pas de même des bombes, qu'on lance ordinairement sous un grand angle.

441. *Dans toute logarithmique, la sous-tangente est constante, prise sur l'axe des ordonnées.*

Soient ET la tangente pour le point E d'une logarithmique quelconque (P. IX, F. 22), et EI l'abscisse du même point. La droite IT sera la sous-tangente prise sur l'axe AC des ordonnées.

Marquons, sur la courbe, un point e infiniment près de E; il se trouvera aussi sur le prolongement de la tangente TE. Par conséquent, son abscisse ei et l'ordonnée EP forment un triangle rectangle epE semblable à EIT, ce qui donne

$$\mathrm{IT} : \mathrm{E}p :: \mathrm{EI} : ep,$$

puis

$$\mathrm{IT} = \mathrm{EI}\frac{\mathrm{E}p}{ep} = \mathrm{EI}\frac{\mathrm{AI}-\mathrm{A}i}{ei-\mathrm{EI}} = \mathrm{EI}\frac{\mathrm{Log\,EI} - \mathrm{Log}\,ei}{ei-\mathrm{EI}}.$$

Considérons maintenant un autre contact E′ et le point e' infiniment voisin. Si $\mathrm{E'I'} = k \times \mathrm{EI}$, k étant un multiplicateur quelconque, on aura aussi, à bien peu près, $e'i' = k \times ei$. D'ailleurs, nous verrions, comme tout-à-l'heure, que

$$\mathrm{I'T'} = \mathrm{E'I'}\frac{\mathrm{Log\,E'I'} - \mathrm{Log}\,e'i'}{e'i'-\mathrm{E'I'}}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathrm{I'T'} &= k\times\mathrm{EI}\frac{\mathrm{Log}\,k\times\mathrm{EI} - \mathrm{Log}\,k\times ei}{k\times ei - k\times\mathrm{EI}}\\ &= \mathrm{EI}\frac{\mathrm{Log}\,k + \mathrm{Log\,EI} - \mathrm{Log}\,k - \mathrm{Log}\,ei}{ei-\mathrm{EI}}\\ &= \mathrm{EI}\frac{\mathrm{Log\,EI} - \mathrm{Log}\,ei}{ei-\mathrm{EI}},\end{aligned}$$

et enfin

$$\mathrm{I'T'} = \mathrm{IT}.$$

442. *Dans la logarithmique népérienne, toute sous-tangente égale le paramètre.*

Il suffit (441) de démontrer que telle est la valeur de la sous-tangente AT du point F (P. IX, F. 20), ou (439) que

$$AT = 1 = AF.$$

Or, le point f, infiniment voisin, fournit le triangle rectangle fpF qui est semblable à FAT. Donc,

$$AT : Fp :: AF : fp,$$

et

$$AT = AF\frac{Fp}{fp} = \frac{Aa - 0}{af - AF} = \frac{\text{Log}'\, af - \text{Log}'\, AF}{af - AF},$$

si nous représentons les logarithmes népériens par *Log'*. Mais, dans le système de Néper, le module est l'unité, ou, ce qui revient au même, la différence de deux nombres très-voisins vaut celle de leurs logarithmes. Par conséquent,

$$\frac{\text{Log}'\, af - \text{Log}'\, AF}{af - AF} = 1.$$

443. *Dans la logarithmique décimale, toute sous-tangente égale les 4343 dix-millièmes du paramètre.*

On a, en effet, pour le contact F (P. IX, F. 21), comme dans le cas précédent,

$$AT = \frac{\text{Log}\, af - \text{Log}\, AF}{af - AF},$$

puis

$$AT = 0{,}434\,294\,482,$$

valeur du module pour le système dont la base est 10; ou bien, parce qu'un logarithme de ce système vaut le produit fait avec le logarithme népérien du même nombre et la fraction 0,4343, à fort peu près,

$$AT = \frac{0{,}4343\, \text{Log}'\, af - 0{,}4343\, \text{Log}'\, AF}{af - AF}$$

$$= 0{,}4343\frac{\text{Log}'\, af - \text{Log}'\, AF}{af - AF} = 0{,}4343.$$

Probl. (*a*) : *Mener une tangente à la logarithmique népérienne, par un point* E *pris sur cette courbe* (P. IX, F. 22).

Tirez l'abscisse EI du contact; portez le paramètre AF sur l'axe des ordonnées, à partir de I et du côté où la tangente doit couper cet axe. Vous marquerez ainsi un point T, et la droite ET sera la tangente demandée (442).

Probl. (*b*) : *Mener une tangente à la logarithmique décimale, par un point pris sur cette courbe.*

Agissez comme dans le problème précédent; mais, au lieu de prendre le paramètre entier pour sous-tangente, prenez-en seulement les 0,43 augmentés du tiers du dixième suivant (443).

CHAINETTE.

444. On appelle *chaînette, caténaire, lintéaire*, ou encore *funiculaire*, la courbe que forme naturellement une chaîne à très-petites mailles, ou une corde, parfaitement flexible et uniformément pesante, quand elle est suspendue à deux points fixes, situés sur des verticales différentes.

Il faut entendre, par les mots *uniformément pesante*, que les parties de même longueur doivent être de même poids, quels que soient les points qui les terminent.

445. *La chaînette est une courbe ouverte et infiniment grande.*

La corde suspendue B'BACC' (P. IX, F. 23) a toutes ses parties en équilibre, puisque aucune ne prend le moindre mouvement, et cet état de choses ne sera nullement troublé, si l'on rend les points B, C fixes comme les points A', B' de suspension. La chaînette peut donc être arbitrairement rognée par les deux bouts, et perdre ses plus grandes cordes horizontales, sans que la forme du reste soit altérée.

Réciproquement, l'arc BAC pourrait être arbitrairement allongé par les deux bouts, au moyen de deux autres points fixes B', C', sans que sa forme changeât, même après la suppression des points de suspension B, C, et rien ne limite l'accroissement qu'en recevraient les cordes horizontales.

Ainsi, une chaîne suspendue à deux points infiniment éloignés de l'horizontale BC et de la verticale AD, pourrait couvrir l'arc BAC.

446. *Le point* A *le plus bas d'une chaînette en est le sommet* (P. IX, F. 23), *et la verticale* AD *forme l'axe de la courbe* (5).

Supposons que l'horizontale BC soit une lame flexible, uniforme, fixée en B et en C, avec la même solidité. Partageons cette lame en un nombre de parties égales quelconque, mais impair, et attachons le même poids au milieu de chacune de ces parties. Le poids du milieu D de BC, agissant avec un plus grand bras de levier qu'aucun autre, sur les résistances qu'opposent les points B, C à la flexion, à l'allongement de la lame, descendra le plus bas selon la verticale DA, et s'arrêtera en A, par exemple. Les deux poids voisins, à droite et à gauche, descendront un peu moins, mais également; les deux poids symétriques suivants descendront moins encore, mais ils s'arrêteront à la même distance de BC; ainsi des autres. La lame formera donc un polygone que AD partagera en deux parties symétriques. Or, la courbe due à une chaîne attachée aux points B, C et descendue jusqu'en A, ne diffère du polygone qu'en ce que ses éléments droits sont infiniment plus petits que les côtés (444). Conséquemment, cette courbe doit être partagée aussi en deux arcs symétriques, par la verticale de son sommet A, et cette verticale est un axe qui divise en deux parties égales les cordes horizontales.

447. *La différence de deux demi-cordes horizontales et infiniment voisines, dans la chaînette, contient la différence des deux abscisses correspondantes, prises sur l'axe, à partir du sommet, comme la longueur de chaîne dont le poids égale la tension au sommet, contient l'hypothénuse d'un triangle rectangle formé avec la plus courte abscisse et la moyenne proportionnelle entre cette abscisse et le double de la longueur indiquée.*

Soient a la différence infiniment petite DE ou CF des abscisses AE, AD ou x (P. IX, F. 23); b la différence FC′ des ordonnées correspondantes EC′, DC ou y; c la longueur de chaîne dont le poids vaut la tension de l'élément horizontal A, tension qui ne varie pas, quelle que soit la longueur totale de la chaîne ou la position de chaque point de suspension sur B′AC′ (445). Le produit $2cx$ donne le quarré de la moyenne proportionnelle entre x et $2c$; $\sqrt{x^2+2cx}$ est la longueur de l'hypothénuse du triangle rectangle construit avec x et $\sqrt{2cx}$, et l'on a

$$b : a :: c : \sqrt{x^2+2cx}.$$

En effet, c'est le poids de l'arc AC qui tend la chaîne en A et en C, selon les tangentes de ces points. Il égale donc la résultante de ces tensions; sa direction verticale passe par leur concours G, et, puisqu'il y a équilibre entre les trois forces, le rapport de l'une au sinus de l'angle formé par les deux autres est le même pour toutes. Si donc p indique le poids d'une longueur de chaîne égale à l'unité, s la longueur de l'arc AC, ps sera le poids total de cet arc, pc vaudra la tension horizontale qui a lieu selon AG, et l'on aura

$$ps : pc :: \sin AGC : \sin CGH,$$

ou, parce que $\sin AGC = \sin CGI = \sin GCH$,

$$s : c :: \sin GCH : \sin CGH.$$

Mais, les sinus des angles d'un triangle sont proportionnels aux côtés opposés. Donc,

$$s : c :: GH : CH.$$

Puisque CF est infiniment petit, l'arc CC′ l'est aussi et peut être regardé comme le prolongement de la tangente GC. Il en résulte un triangle rectangle CFC′ semblable à GHC, la proportion

$$GH : CH :: CF : C'F,$$

puis cette autre

$$s : c :: a : b, \quad \text{et} \quad b = \frac{ac}{s}.$$

L'arc CC′, que nous représenterons par d, est la différence infiniment petite des arcs AC′, AC, ou l'accroissement que prend AC, quand x et y augmentent respectivement de a, b, et

$$d^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \frac{a^2c^2}{s^2} = \frac{a^2s^2 + a^2c^2}{s^2}.$$

Par conséquent,

$$d = a\frac{\sqrt{(s^2+c^2)}}{s} \quad \text{et} \quad a = \frac{sd}{\sqrt{(s^2+c^2)}}.$$

Posons $\sqrt{(s^2+c^2)} = z$ ou $s^2+c^2 = z^2$. Si l'arc s croît de la quantité infiniment petite d, l'inconnue z croîtra d'une autre quantité infiniment petite e, et l'on aura évidemment

$$(s+d)^2+c^2 = (z+e)^2,$$

puis

$$s^2+2sd+d^2+c^2 = z^2+2ez+e^2.$$

Retranchant l'équation $s^2+c^2=z^2$, il vient

$$2sd+d^2 = 2ez+e^2, \quad \text{ou} \quad 2sd = 2ez,$$

si l'on néglige les quarrés d^2, e^2 des accroissements infiniment petits. En conséquence,

$$e = \frac{sd}{z} = \frac{sd}{\sqrt{(s^2+c^2)}}, \quad a = e \quad \text{et} \quad na = ne,$$

n étant un nombre quelconque. Prenons n infiniment grand; il exprimera le nombre de fois que x contient a, et le nombre de fois que z ou $\sqrt{(s^2+c^2)}$ contient e. Donc

$$x = \sqrt{(s^2+c^2)}, \quad x^2 = s^2+c^2, \quad s = \sqrt{(x^2-c^2)},$$

et

$$b : a :: c : \sqrt{(x^2-c^2)}.$$

Or, rien n'empêche de placer l'origine des coordonnées sur le prolongement de l'axe DA, en un point O tel que AO $= c$. L'ordonnée y ni son accroissement FC′ ne changent pas; x devient OD ou x', mais son accroissement CF reste le même; x' vaut na, comme x, et l'on a

$$b : a :: c : \sqrt{(x'^2-c^2)}.$$

Mais $x' = \text{AD}+\text{AO} = x+c$, ce qui donne

$$\sqrt{(x'^2-c^2)} = \sqrt{[(x+c)^2-c^2]} = \sqrt{(x^2+2cx+c^2-c^2)}$$
$$= \sqrt{(x^2+2cx)}.$$

Donc enfin, conformément au principe énoncé,

$$b : a :: c : \sqrt{(x^2+2cx)}.$$

448. *Si l'origine des coordonnées est prise sur le prolongement de l'axe d'une chaînette, à une distance du sommet qui soit la longueur de chaîne dont le poids vaut la tension qu'éprouve l'élément horizontal de ce sommet, deux points symétriques de la courbe ont, pour abscisse commune, la demi-somme des abscisses relatives aux points de mêmes ordonnées, dans la logarithmique népérienne dont le paramètre égale l'abscisse du sommet.*

Soient la chaînette BAC (P. IX, F. 23), OA $= c$ longueur de chaîne dont le poids vaut la tension de l'élément du sommet A, KAL la logarithmique népérienne dont OA est le paramètre (439), K et L les points de cette courbe qui ont des ordonnées égales à celles des points symétriques B, C de la chaînette. L'abscisse commune à ces derniers, $OD = \frac{1}{2}(OP + OQ) = \frac{1}{2}(x' + x'')$, si x', x'' représentent respectivement les deux abscisses de la logarithmique.

Sans rien statuer sur la nature de la courbe BAC, nous supposerons que ses points B, C aient été déterminés au moyen des parallèles MB, NC de OD, également distantes de cette verticale, et au moyen d'une horizontale BC, menée par un point D, tel que $OD = \frac{1}{2}(NK + ML)$. Admettant de plus que tous les autres points de BAC aient été trouvés, par couple, d'une manière analogue, nous aurons évidemment démontré le principe, si nous faisons voir que cette courbe se confond avec l'arc de chaînette qui contient les points B, A, C.

Pour que la confusion ait effectivement lieu, il suffit que la courbe BAC satisfasse au principe 447, c'est-à-dire qu'entre l'accroissement FC′ ou b de l'ordonnée DC et l'accroissement DE ou a de l'abscisse OD, existe le rapport $\frac{c}{\sqrt{(x^2 + 2cx)}}$ qu'établit la chaînette, x étant la partie AD de l'axe.

Or, puisque ON = OM, la logarithmique (440) donne cette proportion:

$$NK : OA :: OA : ML, \quad \text{ou} \quad x' : c :: c : x'',$$

d'où l'on tire

$$x'' = \frac{c^2}{x'}.$$

Il s'ensuit

$$OD \text{ ou } c + x = \frac{1}{2}\left(x' + \frac{c^2}{x'}\right) = \frac{x'^2 + c^2}{2x'},$$

$$x'^2 + c^2 = 2(c+x)x', \quad x'^2 - 2(c+x)x' = -c^2,$$

$$x' = c + x + \sqrt{[(c+x)^2 - c^2]} = c + x + \sqrt{(x^2 + 2cx)}.$$

Le signe + suffit devant le radical, attendu que x' ou NK doit surpasser $c + x$ ou OD.

Cherchons maintenant l'accroissement e' que prend $\sqrt{(x^2 + 2cx)}$, quand x croît de a, comme OD. En imitant ce qui a été fait dans la démonstration précédente pour $\sqrt{(s^2 + c^2)}$, nous aurons

$$\sqrt{(x^2 + 2cx)} = s', \quad x^2 + 2cx = s'^2, \quad (x+a)^2 + 2c(x+a) = (s' + e')^2,$$

$$x^2 + 2ax + a^2 + 2cx + 2ca = s'^2 + 2e's' + e'^2,$$

puis négligeant a^2, e'^2 et retranchant $x^2 + 2cx = s'^2$,

$$2ax + 2ca = 2e's', \quad e' = \frac{(c+x)a}{s'} = \frac{(c+x)a}{\sqrt{(x^2 + 2cx)}}.$$

Mais, l'accroissement a de x en produit un f dans x', et par conséquent,

$$x'+f=c+x+a+\sqrt{(x^2+2cx)}+\frac{(c+x)a}{\sqrt{(x^2+2cx)}}.$$

Retranchant x' d'un côté et sa valeur de l'autre, on trouve

$$f=a+\frac{(c+x)a}{\sqrt{(x^2+2cx)}}.$$

D'ailleurs, le paramètre c est la sous-tangente constante de la logarithmique népérienne (442), et (441) pour le point K, dont l'ordonnée PK doit croître de b, afin de rester égale à DC, devenue EC',

$$c=\frac{x'b}{f},\quad \text{ou bien}\quad f=\frac{x'b}{c}.$$

Ainsi,

$$a+\frac{(c+x)a}{\sqrt{(x^2+2cx)}}=\frac{b}{c}[c+x+\sqrt{(x^2+2cx)}]$$

et

$$\frac{ac\sqrt{(x^2+2cx)}+(c+x)ac}{\sqrt{(x^2+2cx)}}=b[c+x+\sqrt{(x^2+2cx)}].$$

Divisant les deux membres par $c+x+\sqrt{(x^2+2cx)}$, on obtient enfin

$$\frac{ac}{\sqrt{(x^2+2cx)}}=b\quad\text{ou}\quad\frac{b}{a}=\frac{c}{\sqrt{(x^2+2cx)}}.$$

449. *La chaînette est une courbe à véhicule droit* MB *ou* OA (P. IX, F. 23), *toujours perpendiculaire aux cordes horizontales, ou à une directrice droite* MN, *sur lequel le point générateur* B *se meut de manière que sa distance à la directrice égale constamment la demi-somme des distances de cette droite à deux points aussi éloignés de l'axe* OD *que ce point générateur, et situés sur une certaine logarithmique* KAL, *qui a pour paramètre la partie d'axe* OA *comprise entre la directrice et le sommet; de sorte que cette logarithmique est la régulatrice de la chaînette.*

D'abord, ce principe est vrai quand le paramètre OA de la logarithmique KAL égale la longueur de chaîne dont le poids vaut la tension qu'éprouve l'élément horizontal du sommet A (448), ou quand la logarithmique est népérienne; mais il l'est encore dans toutes les circonstances qu'indique l'énoncé suivant:

Pour qu'une logarithmique L'AK' *soit la régulatrice d'une chaînette, il suffit que la plus petite* M'L' *des deux abscisses de la première courbe qui répondent à une abscisse donnée* O'D *de la seconde, égale cette dernière diminuée de la moyenne proportionnelle entre son excès* AD *sur le paramètre* O'A, *et la longueur qu'elle forme, étant ajoutée au même paramètre.*

Désignons par z une droite telle, qu'on ait

$$O'D - O'A : z :: z : O'D + O'A,$$

et supposons que $M'L' = O'D - z$. Il s'ensuit

$$z = O'D - M'L', \quad z^2 = \overline{O'D}^2 - \overline{O'A}^2, \quad \overline{O'D}^2 - z^2 = \overline{O'A}^2,$$

puis

$$O'D + z : O'A :: O'A : O'D - z.$$

Mais $O'D + z = O'D + O'D - M'L' = 2O'D - M'L'$; en conséquence,

$$2O'D - M'L' : O'A :: O'A : M'L',$$

et parce que (440) $N'K'$, l'autre abscisse qui répond à $O'D$, donne la proportion $N'K' : O'A :: O'A : M'L'$, on a

$$N'K' = 2O'D - M'L' \quad \text{ou} \quad O'D = \frac{N'K' + M'L'}{2} = M'B.$$

Si la logarithmique LAK est construite de la même manière, c'est-à-dire si $OD - OA : z' :: z' : OD + OA$ et que $ML = OD - z'$, la relation $OD = \frac{NK + ML}{2}$ aura lieu aussi. Par conséquent,

$$N'K' + M'L' = 2O'D = 2OD + 2O'O = NK + ML + 2O'O$$

et

$$N'K' - NK = ML - M'L' + 2O'O.$$

Mais $LL' = O'O + ML - M'L'$, $KK' = N'K' - NK - O'O = ML - M'L' + 2O'O - O'O = ML - M'L' + O'O$. Ainsi, $LL' = KK'$; il y a égalité entre les distances des deux logarithmiques, sur les verticales $M'L'$, $N'K'$; ces distances verticales vont en diminuant par degrés, de gauche à droite et de droite à gauche, jusqu'au croisement A où elles deviennent nulles; et de la loi de continuité suit qu'il y a aussi égalité entre les distances ll', kk' des deux courbes, prises sur des verticales quelconques $m'l$, $n'k'$, situées à égales distances des paramètres OA, O'A.

Or, l'une des deux logarithmiques, LAK par exemple, peut être supposée népérienne, et alors

$$\frac{ml + nk}{2} = mb.$$

En outre, $m'l' = O'O + ml - ll'$, $n'k' = O'O + nk + kk'$. Par conséquent,

$$m'l' + n'k' = 2O'O + ml + nk = 2O'O + 2mb = 2(O'O + mb);$$

puis enfin,

$$\frac{m'l' + n'k'}{2} = m'b,$$

ce qui montre qu'une abscisse quelconque de la chaînette vaut la demi-somme des abscisses relatives à la même ordonnée, dans toute logarithmique construite d'après l'énoncé du principe.

450. *La chaînette et sa régulatrice logarithmique interceptent des parties égales, sur les parallèles à l'axe qui en sont également éloignées.*

Si la logarithmique LAK (P. IX, F. 23) est une régulatrice de la chaînette BAC, et que $OM = ON$, on a (449)

$$MB = NC = \frac{NK + ML}{2},$$

NK, MB étant parallèles à l'axe OD.

Or, la partie de NK qu'interceptent les deux courbes, $CK = NK - NC = NK - \frac{NK + ML}{2} = \frac{NK - ML}{2}$; la partie interceptée sur MB, $LB = MB - ML = \frac{NK + ML}{2} - ML = \frac{NK - ML}{2}$. Donc, $CK = LB$.

PROBL. (*a*) : *Tracer un arc de chaînette.*

Solution 1 : Attachez à deux points B, C (P. IX, *F.* 23), une chaîne métallique, dont les mailles soient égales, très-courtes, très-mobiles, et qui ait une longueur plus grande que l'intervalle des points de suspension; elle se courbera d'elle-même selon un arc de caténaire (444). Marquez donc plusieurs points de cet arc, puis employez un des moyens du n° 2.

Solution 2 : Tracez une logarithmique népérienne LAK (440, probl. *a*); portez sur l'asymptote MN, à partir du paramètre OA et de chaque côté, des parties égales O*m*, *m*M, O*n*, *n*N, etc.; menez, par les points de division, des perpendiculaires à MN ou des parallèles à OA, jusqu'à la courbe; prenez la demi-somme des parallèles ML, NK, également distantes du paramètre, et portez-la sur chacune, à partir de l'asymptote, de M en B, de N en C; prenez la demi-somme des parallèles *ml*, *nk*, et portez-la sur chacune, de *m* en *b*, de *n* en *c*; ainsi de suite. La courbe que vous ferez passer par les points B, *b*, A, *c*, C sera un arc de chaînette (449).

PROBL. (*b*) : *Tracer un arc de chaînette dont la corde horizontale et la flèche sont données.*

La flèche AD (P. IX, F. 23) est une partie de l'axe, et se trouve, par conséquent, perpendiculaire au milieu de la corde horizontale BC.

Solution 1 : Employez une chaîne métallique fine; attachez-la aux points B, C, de manière qu'elle couvre le point A; puis, achevez comme dans la première solution du problème précédent.

Solution 2 : Marquez un point quelconque O′ sur le prolongement de DA; menez, par A, O′, des parallèles AI, M′N′ à BC, et par B, C, des parallèles BM′, CN′ à DO′; décrivez de O′, avec O′D, un arc de cercle qui coupe AI, puis joignez l'intersection R au centre O′; décrivez de R, avec RA, un autre arc qui coupe RO′;

portez la distance de l'intersection S au point O', sur l'une des parallèles de DO', sur M'B par exemple, à partir de M'N', afin de marquer la plus petite abscisse M'L' de la logarithmique régulatrice; portez L'B de C en K', sur le prolongement de N'C, pour avoir la plus grande abscisse N'K' de la même courbe (450); cherchez la moyenne proportionnelle $m'l'$ de M'L', O'A, puis $n'k'$ celle de O'A, N'K'; prenez leur demi-somme et portez-la, à partir de M'N', sur des parallèles à O'D, menées par les milieux de O'M', O'N'; les points b, c, ainsi marqués, appartiendront à l'arc de chaînette BAC (440 et 449).

Pour obtenir deux autres points, cherchez la moyenne proportionnelle de M'L, $m'l'$ et celle de $n'k'$, N'K'; puis, portez leur demi-somme, à partir de M'N', sur des parallèles à O'D, menées par les milieux m'', n'' de M'm', n'N'.

Deux nouveaux points de la chaînette résultent des moyennes proportionnelles entre $m'l'$, O'A, et entre O'A, $n'k'$; leur demi-somme se porte, à partir de M'N', sur des parallèles à O'D, menées par les milieux o', o'' de m'O', O'n'.

Il est clair, d'ailleurs, qu'en opérant d'une manière analogue, on trouvera les huit points situés sur les parallèles à O'D, menées par les milieux des huit divisions de M'N'; que ceux-là permettront d'en déterminer seize autres, et ainsi de suite.

Démonstration : Nous avons seulement à faire voir que l'arc de logarithmique qui a O'A pour paramètre et M'L', N'K' pour abscisses extrêmes, peut être régulateur de l'arc caténaire BAC. Or, d'après la construction, $M'L' = RO' - RA = O'D - RA$, et

$$DA : RA :: RA : 2O'D - DA,$$

ou bien

$$O'D - O'A : RA :: RA : O'D + O'A.$$

Par conséquent, la moindre abscisse M'L', qui répond à la même ordonnée DB que O'D, satisfait à la condition du n° 449.

451. ***Tout arc de chaînette limité au sommet est moyen proportionnel entre la différence du paramètre de la logarithmique népérienne régulatrice, à l'abscisse de l'autre extrémité de l'arc, prise depuis l'asymptote de cette courbe, et la somme de ce paramètre ajoutée à la même abscisse.***

Soient OA (P. IX, F. 23) le paramètre de la logarithmique népérienne employée pour tracer l'arc de chaînette BAC (450, probl. *a*), et MN l'asymptote de cette courbe (439); CN ou DO sera l'abscisse de l'extrémité la plus élevée de l'arc AC, prise par rapport à cette asymptote, et l'on aura

$$OD - OA : AC :: AC : OD + OA.$$

En effet, la démonstration du n° 447 établit que l'arc AC ou $s = \sqrt{(x'^2 - c^2)}$, expression dans laquelle $x' = OD$ et $c = OA$.

Par conséquent,

$$\overline{AC}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{OA}^2 = (OD - OA)(OD + OA),$$

relation conforme au principe.

452. *Tout arc de chaînette soutendu par une corde horizontale, égale la différence des abscisses extrêmes de la logarithmique népérienne régulatrice.*

De OD, il faut (449) retrancher la moyenne entre OD — OA et OD + OA, pour avoir la plus petite abscisse ML de la logarithmique régulatrice (P. IX., F. 23). Or, cette moyenne est l'arc BA, quand OA forme le paramètre d'une logarithmique népérienne (451). Donc,

$$OD - BA = ML \quad \text{et} \quad BA = OD - ML.$$

Mais (450), OD — ML = MB — ML = BL = CK = NK — NC = NK — OD ; à cause de la symétrie de la chaînette, CA = BA ; par conséquent,

$$CA = NK - OD$$

et

$$BAC = BA + CA = OD - ML + NK - OD = NK - ML.$$

PROBL. (*a*) : *Mesurer un arc de chaînette limité au sommet, quand la courbe a été tracée au moyen d'une logarithmique népérienne.*

Abaissez, de l'extrémité supérieure C de l'arc AC donné (P. IX, F. 24), une perpendiculaire CD sur l'axe AD ; puis, du point O, extrémité du paramètre AO de la logarithmique népérienne régulatrice, décrivez, avec OD, un arc de cercle qui coupe l'horizontale du sommet A ; la distance de l'intersection R au point A sera la longueur cherchée.

Démonstration : La construction donne effectivement

$$AD : AR :: AR : 2OD - AD,$$

ou bien

$$OD - OA : AR :: AR : OD + OA,$$

ce qui fait voir que AR = AC (451).

PROBL. (*b*) : *Mesurer un arc quelconque* Bb *d'une chaînette tracée au moyen de la logarithmique népérienne* (P. IX, F. 24).

Abaissez, des extrémités B, *b* de l'arc, les perpendiculaires BD, *bd* sur l'axe AD ; puis, du point O, extrémité du paramètre de la logarithmique régulatrice, décrivez, avec OD, O*d*, des arcs de cercle qui coupent l'horizontale du sommet A ; la distance R'*r* des deux intersections sera la longueur de l'arc B*b*.

Démonstration : D'après le problème précédent, AR' = AB, A*r* = A*b* ; en conséquence,

$$Bb = AB - Ab = AR' - Ar = R'r.$$

Probl. (*c*) : *Mesurer un arc* BAC *de chaînette, soutendu par une corde horizontale* BC, *quand la courbe a été tracée au moyen d'une logarithmique népérienne* (P. IX, F. 24).

Solution 1 : Prenez pour centre l'extrémité O du paramètre AO de la logarithmique régulatrice, et décrivez, avec OD, un arc de cercle qui coupe deux fois l'horizontale du sommet A ; la distance RR′ des intersections vaudra l'arc BAC.

Solution 2 : Tirez des parallèles à la corde BC (F. 23), par les extrémités supérieures des abscisses extrêmes ML, NK de la logarithmique régulatrice ; la distance PQ des points où ces parallèles couperont l'axe OP, sera la longueur de l'arc BAC (452).

Probl. (*d*) : *Mesurer un arc quelconque d'une chaînette qui n'a pas pour régulatrice la logarithmique népérienne.*

Employez un des moyens donnés dans le n° 21, pour trouver la longueur d'une courbe qui n'est pas rectifiable.

453. *La tangente en un point quelconque de la chaînette fait, avec la corde horizontale qui contient ce point, un angle dont la tangente trigonométrique est le quotient de l'arc compris entre le contact et le sommet, divisé par le paramètre de la logarithmique népérienne régulatrice.*

La tangente d'un point quelconque C (P. IX, F. 23) fait, avec la corde horizontale CB, l'angle DCG qui a GH pour tangente trigonométrique relative au rayon CH. Ainsi,

$$\text{Tang DCG} = \frac{\text{GH}}{\text{CH}}.$$

Or, il a été établi (447) que $s : c :: \text{GH} : \text{CH}$, proportion dans laquelle $s = \text{AC}$ et $c = \text{OA}$, paramètre de la logarithmique népérienne régulatrice (449) ; conséquemment,

$$\text{AC} : \text{OA} :: \text{GH} : \text{CH},$$

et

$$\text{Tang DCG} = \frac{\text{AC}}{\text{OA}}.$$

454. *La sous-tangente* DT, *prise sur l'axe d'une chaînette* (P. IX, F. 23), *est la quatrième proportionnelle du paramètre* OA *de la logarithmique népérienne régulatrice, de l'ordonnée* CD *du contact et de l'arc* AC *qui sépare ce contact du sommet.*

La sous-tangente DT, faisant partie du triangle rectangle CDT, semblable à CHG, donne la proportion

$$\text{CH} : \text{GH} :: \text{CD} : \text{DT}.$$

Or (453), $\text{CH} : \text{GH} :: \text{OA} : \text{AC}$. Donc,

$$\text{OA} : \text{AC} :: \text{CD} : \text{DT}.$$

PROBL. (*a*) : ***Mener, par un contact donné, la tangente d'une chaînette tracée au moyen de la logarithmique népérienne.***

Solution 1 : Cherchez la longueur AR de l'arc AC, compris entre le contact donné C et le sommet A (P. IX, F. 24) ; tirez la droite OR, et tracez, par C, une autre droite CT qui fasse, avec l'horizontale CB, un angle égal à AOR ; cette droite CT sera tangente en C (453), car

$$\text{Tang}\,\text{DCT} = \text{Tang}\,\text{AOR} = \frac{\text{AR}}{\text{OA}} = \frac{\text{AC}}{\text{OA}}.$$

Solution 2 : Après avoir trouvé AR, déterminez le quatrième terme de la proportion OA : AR :: CD : DT ; puis, portez-le sur l'axe, à partir du pied de l'ordonnée CD et vers le point O (454).

PROBL. (*b*) : ***Mener, par un contact donné, la tangente d'une chaînette qui n'a pas pour régulatrice la logarithmique népérienne.***

Rectifiez, sur l'horizontale du sommet (21), l'arc AC compris entre ce point et le contact donné C (P. IX, F. 24) ; élevez une perpendiculaire au milieu de la droite DR, qui joint le pied de l'ordonnée CD du contact à l'extrémité de la longueur AR de l'arc. Le point O, où cette perpendiculaire coupera l'axe DA, sera le centre de la circonférence DR, décrite avec OD, et l'extrémité du paramètre AO de la logarithmique népérienne qui pourrait être régulatrice de la chaînette BAC (451 et 452, probl. *a*). Vous pourrez donc achever comme dans le problème précédent.

455. ***La chaînette n'a pas de tangentes verticales, et son sommet est le seul point dont la tangente soit horizontale.***

Une tangente verticale formerait un angle droit avec l'horizontale du contact. Donc, d'après la solution 1 du problème (*a*), l'angle AOR serait droit aussi (P. IX, F. 24) ; OR se trouverait parallèle à l'horizontale AR ; le point R passerait à l'infini, et par suite, l'arc AC deviendrait infiniment grand. Ainsi, c'est seulement à l'infini qu'une chaînette peut avoir une tangente verticale.

Pour que la tangente devienne horizontale, il faut (453) que $\text{Tang}\,\text{DCT} = \frac{\text{AC}}{\text{OA}} = 0$. Or, le rapport $\frac{\text{AC}}{\text{OA}}$ n'est nul que dans le cas où l'arc AC l'est lui-même, c'est-à-dire dans le cas où le contact C se confond avec le sommet A.

APPLICATIONS : I. De ce que chaque partie *bc* d'une chaînette (P. IX, F. 24) est en repos, en équilibre (445), parce que son poids est détruit par la résultante des tensions qui ont lieu selon les tangentes en *b*, *c*, il suit qu'un fil métallique, courbé selon BAC, puis mis dans la position BA'C, par un mouvement de révolution autour de BC, aura aussi en équilibre chacune de ses parties *b'c'* ; seulement, le poids de chaque petit arc sera détruit alors, non plus par des tensions, mais par des pressions exercées selon les tangentes en b', c', et dirigées vers le concours de ces droites. Aucun affaissement ne se produira, ni au point culminant A′, ni ailleurs, et au contraire, il y aurait au moins tendance à dépression, si la courbure était toute autre que celle de la chaînette. Supposons des solutions de continuité infiniment étroites, opérées en b', c', selon des plans normaux au fil; l'état des choses n'en sera nullement troublé: le petit arc $b'c'$, soutenu par les deux pressions tangentielles, conservera toujours sa position.

Ainsi, la chaînette est la courbe à employer pour le cintre des voûtes d'une épaisseur constante: quand elles ont cette forme, leurs voussoirs ne tendent point à glisser.

Rondelet a mis le fait en évidence, au moyen de sphères égales, posées sur un cintre en chaînette renversée BA′C, chacune étant tangente à ses deux voisines, et les deux extrêmes se trouvant appuyées sur trois plans fixes, l'un BC horizontal, les deux autres BB′, CC′ verticaux. Après le retrait du cintre, opéré avec beaucoup de précautions, les boules restèrent accolées en voûte, par suite de leurs pressions mutuelles. L'habile architecte conclut, de cette expérience, que la chaînette pouvait être employée avec avantage dans les voûtes d'un grand diamètre qui doivent supporter une forte charge; aussi s'en servit-il, tant pour les grands arcs qui soutiennent la colonnade circulaire du Panthéon français, que pour la voûte très-surhaussée qu'il a placée entre la coupole intérieure et la coupole extérieure, comme base d'une tour construite dans la seconde. Les lunettes pratiquées à la partie inférieure de la même voûte, ont aussi un arc de chaînette pour cintre.

Mais les voûtes en chaînette ont besoin de piédroits d'une grande résistance, car ne pouvant être tangentes aux faces verticales par les extrémités de leur courbe (455), elles exercent de fortes poussées horizontales contre ces piédroits.

II. Le hamac, où couche le matelot, étant formé d'une toile suspendue, se courbe nécessairement en chaînette, quand il n'est chargé d'aucun corps étranger.

III. La voile enflée par le vent prend aussi la courbure caténaire, si l'air ne s'y arrête pas; mais les axes de ses génératrices courbes sont inclinés, de sorte que le plan horizontal qui partage la voile en deux parties égales n'est pas un plan de symétrie. L'axe d'une chaînette doit être, en effet, parallèle à la direction de la force constante qui sollicite chaque point. Or, dans une voile tendue, cette force a une direction inclinée, car elle est la résultante de la pression du vent et de la pesanteur.

IV. Le tablier d'un pont suspendu est soutenu par des tiges verticales qui s'attachent à des câbles en fil de fer, et ces câbles ont leurs points d'appui sur deux pyramides inébranlables. Ils doivent donc former un polygone caténaire, c'est-à-dire un polygone dont les sommets se trouvent sur une chaînette.

DÉVELOPPANTES.

456. La développante d'une courbe est engendrée par un point qui reste fixe sur une tangente, pendant que cette droite change continuellement de contact (12). Les développantes sont donc des courbes à véhicule droit, qui ont leurs développées pour directrices, et dont le point générateur ne prend aucun mouvement particulier.

Cette définition s'applique même aux développantes des caustiques. C'est afin d'en rendre les tracés indépendants de ceux des développées, que nous les avons considérées comme ayant un véhicule droit à point fixe (390).

Les développantes qu'on est obligé de déduire des développées, n'ont pas assez d'utilité pour qu'il en soit fait une étude particulière; celle du cercle fait seule exception, probablement parce que sa développée est, de toutes les courbes, la plus facile à tracer.

DÉVELOPPANTE DU CERCLE.

457. *Le cercle n'a qu'une seule développante.*

La courbure de la circonférence étant uniforme (17), il est clair qu'un fil enroulé décrira toujours la même courbe, quel que soit le point où commence le déroulement (12).

458. *La développante du cercle a pour origine un point de la circonférence, et fait une infinité de révolutions autour du centre, dont elle s'éloigne de plus en plus.*

L'origine doit être sur la circonférence, puisque tous les points du fil enroulé sont sur cette courbe, et que l'extrémité la quitte au moment même où le déroulement commence à produire la développante.

Le nombre infini des révolutions vient de ce que rien ne limite le nombre de tours que peut faire le fil tangent, pendant son déroulement. L'accroissement continuel de la distance du point générateur au centre, tient à ce que cette distance, d'abord égale au rayon, augmente évidemment de toute la longueur de la circonférence, dans chaque tour complet.

PROBLÈME : *Tracer la développante d'un cercle.*

Divisez la circonférence A en un certain nombre d'arcs égaux, 8 par exemple, au moyen de diamètres (P. IX, F. 25); menez, aux extrémités de ces droites, des tangentes qui ne se croisent pas; choisissez un des contacts B pour origine; rectifiez, sur la tangente suivante, à partir du contact C, l'arc BC, égal à $\frac{1}{8}$ de la circonférence (21); portez 2 fois la longueur obtenue CB_1, sur la troisième tangente DB_2, à partir du contact D; portez la même longueur 3 fois sur la tangente EB_3, 4 fois sur FB_4, 5 fois sur GB_5, 6 fois sur HB_6, 7 fois sur IB_7, 8 fois sur BB_8, 9 fois sur le prolongement de CB_1, à partir de B_1, 10 fois sur le prolongement de DB_2, à partir de B_2, et ainsi de suite ; les points que vous aurez marqués de cette façon sur les tangentes, étant tous unis par une courbe, formeront un arc de la développante $BB_1B_2B_3B_4$....... du cercle donné.

Applications : La développante du cercle doit, dans plusieurs cas, former le profil à donner aux dents des engrenages et aux cammes tournantes, pour que la vitesse de rotation transmise à l'organe conduit ait un rapport constant avec la vitesse de l'organe conducteur. Ces cas sont les suivants : 1° pignon conduisant une crémaillère ; 2° pignon conduit par une vis sans fin ; 3° roue conduisant plusieurs pignons de diamètres différents, soit qu'il y ait parallélisme entre les axes, soit que ces axes concourent ; 4° cammes soulevant des pilons.

459. *La tangente à l'origine d'une développante de cercle est le rayon qui aboutit à ce point.*

Puisque la tangente menée au cercle A par l'origine B (P. IX, F. 25) est normale à la développante (13), le rayon AB, perpendiculaire sur cette tangente, doit être tangent à la courbe BB_1B_2... (4).

Probl. (*a*) : *Tracer une tangente à la développante d'un cercle, par un point donné sur la première courbe.*

Menez, du contact donné B_3 (P. IX, F. 25), une tangente B_3E au cercle A ; puis (13), élevez au même point, sur cette droite, la perpendiculaire B_3K.

Probl. (*b*) : *Tracer une tangente à la développante d'un cercle, par un point donné hors de la première courbe.*

Menez plusieurs tangentes au cercle, de manière que la position présumée du contact cherché les partage en deux groupes ; abaissez, du point K donné (P. IX, F. 25), des perpendiculaires sur ces tangentes, et joignez leurs pieds par une courbe ; le point B_3, où cette courbe coupera la développante BB_1B_2...., sera aussi le pied d'une perpendiculaire abaissée de K sur une certaine tangente du cercle, normale à la développante, et par conséquent, la droite KB_3 formera la tangente demandée.

Application : La camme destinée à soulever verticalement un pilon (P. IX, F. 26), a pour profil un arc BC de la développante d'un cercle dont le rayon surpasse celui de l'arbre tournant A, afin qu'elle puisse toucher d'abord le mentonnet D par son origine B. Il s'ensuit que ce mentonnet, étant horizontal, doit se trouver au niveau de l'axe A de l'arbre, quand la camme le rencontre (459). Le mouvement circulaire fait ensuite cheminer le contact sur la courbe BC, mais en le maintenant au même point du mentonnet. En effet, ce contact passe successivement sur les différentes normales de BC, tangentes au cercle développé; pour qu'elles soient perpendiculaires à la face inférieure du mentonnet, ou pour que cette face soit tangente à la camme, il faut qu'elles deviennent verticales. Or, elles ne peuvent avoir une telle position qu'au moment où leurs contacts sur le cercle ponctué arrivent au niveau de A, et alors elles se confondent avec la verticale DD'. Donc, le contact de la camme reste constamment sur cette verticale, et par suite, au même point de la face inférieure du mentonnet; le pilon EF est toujours poussé verticalement; le frottement seul de la camme le presserait contre les moises ou *prisons* Ee, Ff, si le mentonnet ne dépassait pas la tige, c'est-à-dire si DD' formait l'axe de cette tige, disposition toujours possible, moyennant une mortaise à jour GH.

De là suit que le chemin du contact d'une camme et d'un mentonnet (374) est une ligne droite, quand le véhicule courbe à point fixe forme une développante de cercle; mais il n'en serait pas toujours de même, si la courbe BC était telle que ses normales prissent des positions différentes en devenant verticales, car le contact se mouvrait aussi sur la face inférieure du mentonnet.

460. *Tout arc de la développante d'un cercle, dont l'origine forme une des extrémités, est la troisième proportionnelle du diamètre et de l'arc correspondant de la circonférence.*

Il s'agit de démontrer que

$$2AE : BCE :: BCE : BB_2B_3 \quad (P.\ IX,\ F.\ 25),$$

ou que

$$BB_2B_3 = \frac{a^2}{2r},$$

si r désigne le rayon du cercle, et a l'arc BCE qu'a développé la génération de l'arc BB_2B_3.

Menons la tangente eb, par un point e pris infiniment près de E, et nommons δ, d les arcs infiniment petits Ee, B_3b. Ces éléments forment des angles droits avec les normales AE, EB_3; l'élément Ee est le prolongement de la tangente B_3E, et l'angle EAe a ses côtés d'équerre sur ceux de B_3eb. Par conséquent, les triangles AEe, eB_3b sont semblables, ce qui donne

$$AE : EB_3 :: Ee : B_3b, \quad \text{ou} \quad r : a :: \delta : d,$$

ou encore

$$d = \frac{a\delta}{r},$$

car $EB_3 = BCE$; de là suit que chaque petite partie d de BB_2B_3 est la quatrième proportionnelle du rayon, de la petite partie correspondante δ, prise sur BCE, et de l'arc qui précède cette partie δ.

Rien n'empêche de prendre δ tel que ce très-petit arc soit contenu un nombre de fois n dans BCE. Soient d_1, d_2, d_3.... d_n les n parties correspondantes de BB_2B_3. Le premier arc δ a l'une de ses extrémités sur l'origine B, et l'arc a qui le précède est nul; le second arc δ est précédé du premier; le troisième est précédé de la somme des deux premiers, ou de 2δ; le quatrième est précédé de 3δ; ainsi de suite. En conséquence,

$$d_1 = \frac{o\delta}{r} = o,$$

$$d_2 = \frac{1\delta}{r} = \frac{\delta^2}{r},$$

$$d_3 = \frac{2\delta\delta}{r} = \frac{2\delta^2}{r},$$

$$d_4 = \frac{3\delta\delta}{r} = \frac{3\delta^2}{r},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d_n = \frac{(n-1)\delta\delta}{r} = \frac{(n-1)\delta^2}{r},$$

et

$$BB_2B_3 = d_1 + d_2 + d_3 \ldots + d_n = [o+1+2+3\ldots+(n-1)]\frac{\delta^2}{r}.$$

Or, le multiplicateur de $\frac{\delta^2}{r}$ est la somme des n termes d'une progression par différence, et vaut $[o+(n-1)]\frac{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$. Donc,

$$BB_2B_3 = \frac{n^2-n}{2} \times \frac{\delta^2}{r} = \frac{n^2\delta^2 - n\delta \times \delta}{2r} = \frac{a^2 - a\delta}{2r} = \frac{a^2}{2r},$$

puisque $a\delta$ est une quantité infiniment petite qui peut être négligée.

PROBL. (a): *Mesurer un arc de la développante d'un cercle, compris entre l'origine et un point quelconque.*

Joignez le centre A au point donné B_3 (P. IX, F. 25); élevez sur AB_3 la perpendiculaire B_3L; menez la tangente B_3E; prolongez le rayon AE du contact jusqu'à la perpendiculaire B_3L. La moitié de la distance de l'intersection L au contact E sera la longueur de l'arc BB_2B_3.

Démonstration: Puisque les triangles AB_3L, AEB_3 sont rectangles,

$$AE : EB_3 :: EB_3 : EL, \quad \text{ou} \quad r : a :: a : EL.$$

Par conséquent,

$$a^2 = r \times EL, \quad \text{et} \quad BB_2B_3 = \frac{a^2}{2r} = \frac{EL}{2}.$$

PROBL. (b): *Mesurer un arc de la développante d'un cercle, compris entre deux points différents de l'origine.*

Déterminez la longueur des arcs B_4B, B_3B (P. IX, F. 25), compris entre les points donnés B_4, B_3 et l'origine B de la développante ; l'excès de la première longueur sur la seconde sera celle de l'arc B_3B_4.

461. *Le segment limité par la tangente d'un cercle, l'arc de circonférence et l'arc de la développante, compris entre cette tangente et l'origine, égale le produit du second arc multiplié par le tiers du premier.*

Ainsi (P. IX, F. 25), le segment

$$BB_2B_3ECB = BB_2B_3 \times \frac{ECB}{3},$$

ou bien (460),

$$S = \frac{a^2}{2r} \times \frac{a}{3} = \frac{a^3}{6r}.$$

Le secteur infiniment petit B_3eb peut être regardé comme un triangle ; il vaut donc

$$\frac{d(B_3E+Ee)}{2} = \frac{d\times B_3E + d\times Ee}{2} = \frac{d\times B_3E}{2},$$

parce qu'on peut négliger le produit des deux quantités infiniment petites d, Ee ou δ. Mais $B_3E = ECB = a$ et $d = \frac{a\delta}{r}$. Conséquemment,

$$B_3eb = \frac{a\delta}{r} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2\delta}{2r}.$$

Partageons, comme dans le n° 460, l'arc ECB en n parties égales à δ, et formons, sur ces parties, des secteurs s_1, s_2, $s_3 \ldots s_n$, analogues à B_3eb, nous aurons

$$s_1 = \frac{(o)^2\delta}{2r} = o,$$

$$s_2 = \frac{\delta^2\delta}{2r} = \frac{\delta^3}{2r},$$

$$s_3 = \frac{(2\delta)^2\delta}{2r} = 4\frac{\delta^3}{2r},$$

$$s_4 = \frac{(3\delta)^2\delta}{2r} = 9\frac{\delta^3}{2r},$$

....

$$s_n = \frac{(n-1)^2\delta^2\delta}{2r} = (n-1)^2\frac{\delta^3}{2r},$$

et

$$S = [o+1+4+9\ldots\ldots+(n-1)^2]\frac{\delta^3}{2r}.$$

Or (298), $0+(1)^2+(2)^2+(3)^2\ldots+(n-1)^2=\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$.
Par conséquent,

$$S=\frac{n^3\delta^3}{6r}-\frac{n^2\delta^2}{4r}\delta+\frac{n\delta}{12r}\delta^2,$$

et comme $n\delta=a$,

$$S=\frac{a^3}{6r}-\frac{a^2}{4r}\delta+\frac{a}{12r}\delta^2=\frac{a^3}{6r},$$

parce qu'on peut négliger tout produit qui a pour facteurs une quantité finie et une quantité infiniment petite.

PROBL. (*a*) : *Mesurer un segment limité par la tangente d'un cercle, l'arc de circonférence et l'arc de la développante, compris entre cette tangente et l'origine.*

Opérez comme dans le problème (*a*) du n° 460, pour trouver le point L (P. IX, F. 25), et mesurez le triangle rectangle B_3EL. Le tiers de la superficie sera celle du segment BB_2B_3ECB.

Démonstration : Le triangle $B_3EL=\frac{B_3E\times EL}{2}=\frac{1}{2}a\frac{a^2}{r}=\frac{a^3}{2r}$.
Par conséquent,

$$BB_2B_3ECB=\frac{a^3}{6r}=\frac{1}{3}\frac{a^3}{2r}=\frac{B_3EL}{3}.$$

PROBL. (*b*) : *Mesurer un segment limité par le prolongement d'un rayon du cercle, l'arc de circonférence et l'arc de la développante, compris entre ce prolongement et l'origine.*

Opérez comme dans le problème (*a*) du n° 460, pour former le triangle B_3EL (P. IX, F. 25) ; puis, du tiers de ce triangle, retranchez le secteur de cercle BAM. Le reste sera l'aire du segment BB_2B_3MCB.

Démonstration : Le segment $BB_2B_3MCB=BB_2B_3ECB-EMB_3$ $=\frac{B_3EL}{3}-EMB_3$, d'après le problème précédent. Il reste donc à faire voir que

$$EMB_3=BAM.$$

Or, $AEB_3=\frac{EB_3\times AE}{2}=\frac{ECB\times AE}{2}=BAE$. Retranchant EAM des deux membres, on obtient

$$AEB_3-EAM=BAE-EAM,\quad \text{ou}\quad EMB_3=BAM.$$

APPLICATION : Le dernier problème a trait au mesurage des faces planes et latérales d'une camme en développante de cercle, car une des limites ordinaires du profil est le prolongement d'un rayon de l'arbre tournant (P. IX, F. 26). La solution du problème donne l'aire comprise entre ce prolongement, l'arc de la développante et celui du cercle ponctué. On obtient la surface totale, en ajoutant à cette aire celle qui répond au talon et au tenon.

DÉVELOPPÉES.

462. Comme une courbe quelconque est la développée d'une autre à laquelle ses tangentes sont normales (13), le genre des développées pourrait comprendre toutes les courbes; mais on y place seulement celles pour lesquelles il n'a pu être trouvé une génération autre que le mouvement d'un point sur les tangentes, et les caustiques, que la nature fait former aux droites qui les touchent (388).

Les développées ne sont pas toutes engendrées par un point assujetti à se mouvoir, d'après une certaine loi, sur un véhicule droit toujours normal à la développante. Dans beaucoup de cas, où le tracé préalable de cette développante serait au moins une opération fort longue, on emploie une autre courbe pour directrice et régulatrice de la développée.

DÉVELOPPÉES DES SECTIONS CONIQUES.

463. *La développée d'une circonférence est une circonférence concentrique d'un rayon infiniment petit.*

Cet énoncé n'est qu'une autre manière d'exprimer que la développée d'une circonférence est le centre (14).

464. *La développée de l'ellipse est une courbe fermée qui a les mêmes axes de symétrie et le même centre; ses quatre arcs égaux tournent leur convexité vers ce centre, et forment, sur les axes, quatre points de rebroussement de la première espèce* (9)*; deux des pointes sont toujours près des foyers; les deux autres se trouvent tantôt hors de l'ellipse, tantôt en dedans.*

La partie d'une tangente à la développée comprise entre cette courbe et la développante est le rayon de courbure de celle-ci, pour l'incidence (20, probl.). Ainsi, les divers rayons de courbure de l'ellipse ont chacun un point de la développée pour leur extrémité opposée au contact du cercle osculateur. Par conséquent, les intersections E, E′ du grand axe et de la développée (P. X, F. 1) sont toujours entre les foyers F, F′ (147); tandis que les intersections G, G′ du petit axe dépendent, pour leurs positions, du rapport des deux axes (148).

Les normales de l'arc d'ellipse BC, autres que les deux extrêmes, coupent le grand axe entre O, E′, et forment, par leurs intersections mutuelles, un polygone dont la convexité est tournée vers le centre O. Il doit donc en être de même pour celle de l'arc E′H′G′ de développée tangent à toutes ces normales, et pour celles des trois autres arcs E′G, GE, EG′. D'ailleurs, l'égalité de ces quatre arcs et leur symétrie, relativement aux axes, résultent de l'égalité et de la symétrie des arcs correspondants de l'ellipse.

Enfin, les points E, E′, G, G′ sont des rebroussements, parce que les deux arcs qui se terminent à chacun, ayant un axe pour tangente commune, y sont tangents l'un à l'autre (9).

PROBLÈME : *Tracer la développée d'une ellipse.*

Elevez, au foyer F, une perpendiculaire sur le grand axe (P. X, F. 1), et portez le demi-paramètre FK de A en E, de B en E′, pour marquer deux des pointes (147) ; cherchez la troisième proportionnelle de OC, OA, et portez-la de C en G′, de D en G, pour marquer les deux autres pointes (148) ; déterminez les centres de courbure H′, I′, etc. des points L, M, etc. (149), vous aurez autant de points de la développée, sur l'arc E′G′. D'ailleurs, les points H et I, H″ et I″, symétriques de H′, I′, appartiennent aux arcs EG′, E′G, et les points H‴, I‴, symétriques de H″, I″, sont sur l'arc EG.

468. *La développée de l'hyperbole est une courbe à deux branches ouvertes, qui a les mêmes axes de symétrie et le même centre ; à une distance de ce centre plus grande que celle des foyers, se trouvent ses sommets, situés sur l'axe transverse ; ils forment des rebroussements de la première espèce (9) ; la moitié de chaque branche a sa concavité opposée à celle de l'arc d'hyperbole correspondant.*

Les intersections E, E′ de la développée et de l'axe transverse AB (P. X, F. 2) sont toujours plus éloignés du centre S que les foyers F, F′ (281) ; ces intersections forment les sommets de la développée, c'est-à-dire ses points les plus voisins du centre, parce que toutes les normales de l'hyperbole, autres que celles des sommets, coupent l'axe transverse entre E, E′ et l'infini (280), et que celles d'une demi-branche se coupent, deux à deux, au-delà du même axe, par rapport à leurs incidences. Cette dernière raison est aussi celle du sens de la concavité, puisque la développée est tangente aux côtés du polygone formé par les normales.

La développée a deux branches, parce que les normales des deux branches de l'hyperbole lui donnent deux systèmes de tangentes qui n'ont rien de commun ; ses branches sont ouvertes, ou, ce qui est la même chose, elles ont à l'infini des cordes infiniment grandes, attendu que l'hyperbole est elle-même sans limites, que sa courbure diminue sans cesse (232) et que ses dernières normales se coupent à une distances infinies de leurs incidences.

Les deux arcs E′I′, E′I″, que sépare l'axe transverse, doivent être symétriquement placés par rapport à cet axe, comme les arcs d'hyperbole BM, BN qui les produisent respectivement. La symétrie relative à l'axe déclinant CD provient d'une cause analogue.

Enfin, les sommets E, E′ sont des points de rebroussement, parce que les deux arcs qui partent de chacun, ayant l'axe transverse pour tangente commune, y sont tangents l'un à l'autre.

PROBLÈME : *Tracer la développée d'une hyperbole.*

Elevez, au foyer F (P. X, F. 2), une perpendiculaire sur l'axe transverse, et portez le demi-paramètre FK de A en E, de B en E', pour marquer les deux sommets ; cherchez les centres de courbure H', I', etc. des points L, M, etc. (282), vous aurez autant de points qui appartiendront à l'arc E'I' de la développée ; abaissez, de H', I', etc., des perpendiculaires sur l'axe transverse, et prenez OH'' = OH', PI'' = PI' ; les points H'', I'' seront sur l'arc E'I''. Déterminant de même les points symétriques de H', I' et de H'', I'', relativement à l'axe déclinant CD, vous pourrez tracer les arcs EI, EI'''.

466. *La développée de la parabole est une courbe ouverte, qui a le même axe de symétrie ; chacune de ses moitiés tourne sa convexité vers cet axe ; le sommet, situé sur le même axe, est plus éloigné de celui de la parabole que le foyer, et il forme un rebroussement de première espèce* (9).

La démonstration, analogue à celle du n° 465, repose sur les principes 301, 341 et 354.

PROBLÈME : *Tracer la développée d'une parabole.*

Le sommet E (P, X, F. 3), les points quelconques H, I et leurs symétriques H', I', se déterminent comme leurs analogues dans la développée de l'hyperbole (465, probl.).

CAUSTIQUES PAR RÉFLEXION.

467. *La caustique due à un miroir plan est un point.*

Le fait a été démontré dans le n° 389 ; mais il est à observer que cette caustique n'est qu'idéale, puisque ce sont seulement les prolongements des rayons réfléchis qui s'y coupent.

PROBLÈME : *Trouver la caustique due à un miroir plan.*

La caustique demandée n'est autre chose que l'image du point lumineux donné L (P. VIII, F. 10). Pour déterminer cette image, abaissez de L une perpendiculaire LC sur le plan AB du miroir, et portez sa longueur sur son prolongement, à partir du pied C. Le point L', ainsi marqué, sera le spectre que verra, derrière le miroir, l'œil placé sur AR, par exemple.

Démonstration : Considérons le petit faisceau conique, émané de L, qui a le point A pour centre de sa base circulaire ; tous les rayons dont il se compose se réfléchissent de manière à concourir en L' par leurs prolongements (389). En conséquence, ils sont renvoyés divergents dans la prunelle de l'œil ; ils pénètrent et se comportent dans l'organe comme feraient les rayons d'un faisceau réellement émané d'un point lumineux L', et cet organe se trouve affecté comme si la lumière L était en L'.

Caustique du cercle, pour des rayons parallèles.

468. *Lorsqu'un demi-cylindre circulaire réfléchit, par sa concavité, des rayons perpendiculaires au plan de ses bords, la caustique formée sur la base a pour contacts avec la circonférence les extrémités du diamètre terminal, pour axe le rayon d'équerre à ce diamètre, et elle coupe ce rayon au milieu, où elle fait un rebroussement de seconde espèce* (9), *en tournant sa convexité vers la concavité du cercle.*

La moitié du miroir et les rayons lumineux situés à droite du rayon AB, perpendiculaire au diamètre CD (P. X, F. 4), forment un ensemble exactement pareil à celui de la moitié et des rayons lumineux situés à gauche de AB; d'où il suit que l'arc de caustique tracé sur le quart de cercle BAD doit être égal à l'arc tracé sur le quart BAC, et placé de la même manière, soit par rapport à AB, soit par rapport à l'arc de circonférence. Ainsi, le rayon AB est bien un axe de symétrie pour la caustique.

Soient maintenant deux rayons lumineux L, L', perpendiculaires à CD et infiniment peu écartés l'un de l'autre; ils se réfléchissent en formant les angles AEF, AE'F', respectivement égaux aux angles d'incidence AEL, AE'L', et les contacts des rayons réfléchis EF, E'F' avec la caustique sont si rapprochés qu'on peut les considérer comme confondus sur l'intersection H, située entre eux. Ainsi, cette intersection de EF, E'F' est un point de la courbe, et l'infiniment petite différence de EH, E'H permet de supposer égales ces longueurs.

Mais, de l'égalité des angles AEF, AEL, ou des arcs FCI, GG'I, résulte celle des arcs EBF, EDG, et celle de leurs cordes EF, EG. De même, les arcs E'BF', E'DG' sont égaux. Donc,

$$E'DG' - EDG = E'BF' - EBF;$$

$$EE' + GG' = E'BF' - EE' - E'BF = FF' - EE', \text{ puis } 3EE' = FF',$$

et comme ces derniers arcs sont infiniment petits, la même relation existe entre leurs cordes, avec lesquelles ils se confondent.

En outre, l'égalité des angles inscrits E'F'F, E'EF rend semblables les triangles FHF', E'HE, et donne la proportion

$$FH : E'H :: FF' : EE'$$

$$\text{ou} \quad FH : EH :: 3EE' : EE' \quad \text{ou} \quad FH : EH :: 3 : 1.$$

Par conséquent,

$$FH + EH : EH :: 4 : 1 \quad \text{ou bien} \quad EG : EH :: 4 : 1,$$

$$\text{ou encore} \quad \tfrac{1}{2}EG : EH :: 2 : 1, \quad \text{et enfin} \quad EK : EH :: 2 : 1,$$

ce qui montre que la distance EH de tout point d'incidence au contact du rayon réfléchi et de la caustique, est la moitié de la distance EK de la même incidence à l'entrée K du rayon lumineux dans le demi-cylindre.

Or, le rayon lumineux L″B, qui passe par le centre A, faisant un angle d'incidence nul avec AB, revient selon cette droite. Les deux moitiés de la caustique touchent donc AB au milieu M, et par suite, ce point est un rebroussement.

Les rayons lumineux extrêmes, ayant pour incidences les points C, D, font un trajet nul dans l'intérieur du miroir, et des angles droits avec CD. Les rayons réfléchis qu'ils produisent font aussi des angles droits avec le diamètre terminal; ils ont de même une partie nulle, comprise entre C ou D et la caustique. En conséquence, la courbe a pour tangentes aux extrémités du diamètre CD, les propres tangentes de la circonférence; ce diamètre est sa plus grande corde, et elle a des points plus rapprochés de CD que son rebroussement, ce qui suffit pour que ce rebroussement soit de la seconde espèce (9), puisqu'il est évident, d'après la position des rayons réfléchis, que la caustique tourne sa convexité vers la concavité du miroir.

Ainsi, *la caustique par réflexion due à un secteur de cylindre circulaire, concave,* C′BD′, *et à des rayons perpendiculaires sur le plan* C′D′ *des bords,* *est une courbe dont le véhicule droit* EF *parcourt l'arc* C′BD′ *de la base, faisant toujours, avec le rayon* AE *de cet arc, le même angle que le rayon lumineux correspondant* LE, *et dont le point générateur* N *reste à une distance de l'incidence* E *égale à la moitié de la partie* KE *du même rayon lumineux, comprise dans le demi-cercle* CBD *qui a pour axe de symétrie celui de l'arc* C′BD′.

Nous verrons plus loin que cette caustique est une *épicycloïde*.

La caustique par réflexion CM′D, due à un demi-cylindre circulaire, convexe, CB′D (F. 5), et à des rayons perpendiculaires sur le plan CD des bords, est la même courbe, et cela se démontre au moyen de raisonnements tout à fait pareils à ceux qui viennent d'être employés; mais, dans ce cas, la caustique n'est qu'idéale, car les rayons réfléchis divergent; ceux dont les incidences sont séparées par un arc infiniment petit ne peuvent se couper, pour produire une image réelle du point lumineux situé à l'infini; leurs prolongements seuls se rencontrent, et les intersections se font dans l'intérieur du demi-cylindre.

Néanmoins, les deux caustiques CMD, CM′D, se raccordant aux points C, D, doivent être considérées comme les moitiés d'une seule courbe CMDM′C.

Ainsi, *la caustique par réflexion due à un cercle entier et à des rayons parallèles, est une courbe fermée qui présente deux axes de symétrie* BB′, CD, *l'un parallèle aux rayons incidents, l'autre perpendiculaire, deux rebroussements de seconde espèce* M, M′, *situés sur le premier axe, et deux sommets* C, D *qui terminent le second.*

APPLICATION : Le rebroussement de la caustique d'un demi-cercle en est toujours le point le plus brillant, parce que près de là se croisent un plus grand nombre de rayons réfléchis que partout ailleurs.

Aussi appelle-t-on *foyer*, le milieu du rayon qui se confond avec l'axe d'un miroir en calotte sphérique : comme à ce milieu se trouvent confondus les rebroussements des caustiques dues à toutes les sections diamétrales de la calotte, la lumière et la chaleur y prennent une grande intensité.

Il y a des miroirs concaves, autres que les sphériques et les paraboliques (p. 232, appl. III), qui ont aussi un foyer, pour les rayons parallèles : on en a fait qui, exposés au Soleil, fondaient, en quelques secondes, une balle de fer placée sur ce point. Tout vase courbe poli, une boîte de montre, par exemple, peut même, dans de pareilles circonstances, enflammer de l'amadou.

469. *Dans la caustique par réflexion due au cercle et à des rayons parallèles, la droite qui joint un point de la courbe au milieu de l'abscisse de l'incidence correspondante, se trouve parallèle au rayon de cette incidence.*

Soit H le milieu de l'abscisse AO de l'incidence E, relative au point N de la caustique (P. X, F. 5). La droite HN est parallèle au rayon AE.

Abaissons de A une perpendiculaire sur le rayon réfléchi EF. Les deux triangles rectangles AOP, EQP sont égaux, car AO $=$ EK $=$ EQ. Il en est de même des triangles AOE, AQE, et QO se trouve parallèle à AE. Mais (468). N est le milieu de EQ. Donc, HN divise en parties égales les côtés concourants du trapèze AEQO.

470. *La caustique par réflexion due au cercle et à des rayons lumineux parallèles, est développante d'une caustique semblable, due à une circonférence concentrique, deux fois moindre, et à des rayons lumineux d'équerre sur les précédents.*

Cela est vrai, si le rayon lumineux L'H (P. X, F. 5), perpendiculaire à LE, donne un rayon réfléchi perpendiculaire à EF, au contact même de cette tangente de la caustique MNDM'CM.

La droite L'H, parallèle à EO, coupe AE comme AO, c'est-à-dire au milieu (469). Ainsi, l'intersection R est sur la circonférence concentrique qui, passant par M, vaut la moitié de BCB'DB (468), et cette intersection forme l'incidence de L'H. Soit NRS le rayon réfléchi. L'angle ARH $=$ ARS $=$ ERN, AR $=$ ER, et l'angle HAR, qui a pour indication $\frac{1}{2}$(BE $+$ B'I) ou $\frac{1}{2}$(GB' $+$ B'I), vaut l'angle NER, dont l'indication est $\frac{1}{2}$ FI ou $\frac{1}{2}$ GI. Les deux triangles AHR, ENR sont donc égaux ; EN $=$ AH $= \frac{1}{2}$ AO $= \frac{1}{2}$ EK ; le point N appartient à la caustique du grand cercle, et comme l'angle ENR vaut l'angle droit AHR, NRS se trouve d'équerre sur EF.

Donc, tout rayon lumineux, parallèle à CD, qui passera par le milieu de la partie EK d'un rayon lumineux parallèle à BB', donnera un rayon réfléchi tangent à la caustique du petit cercle et normal à celle du grand.

Ainsi, la caustique mSMm'M'm est la développée de MNDM'CM. De là suit cet autre fait :

La caustique du grand cercle est la développée d'une caustique semblable, due à un cercle triple, de même centre, et à des rayons lumineux parallèles à ceux qui produisent celle du petit cercle.

PROBLÈME : *Tracer la caustique par réflexion due à un secteur de cylindre circulaire, concave, et à des rayons d'équerre sur le plan des bords.*

Solution 1 : Elevez une perpendiculaire AB (P. X, F. 4) au milieu de la corde C'D', qui limite l'arc C'BD' de la base du secteur; marquez le centre A de cette base ; achevez le cercle ; tirez le diamètre CD, parallèle à C'D', et plusieurs rayons lumineux LE, L'E', etc., parallèles à AB ; tirez aussi, par leurs incidences E, E', des cordes EF, E'F', égales aux cordes EG, E'G'; prenez les moitiés de EK, E'K', pour les porter sur EF, E'F', à partir de E, E'; les points N, H, qui en résulteront, appartiendront à la caustique demandée (468) ; son rebroussement M sera le milieu de AB, et vous trouverez les points extrêmes de la courbe sur C'D', en la continuant jusqu'au diamètre CD.

Solution 2 : Après avoir tracé LE (F. 5), parallèle à AB, et EF, corde égale à EG, élevez une perpendiculaire au milieu de EK ; puis, par le point H où elle coupe AB, menez une parallèle à AE ; l'intersection N de cette parallèle et de EF sera sur la caustique (469).

471. *Dans la caustique par réflexion due au cercle et à des rayons parallèles, la partie de normale comprise entre l'incidence et le cercle concentrique qui passe par les rebroussements, est moyenne proportionnelle entre la tangente menée de l'incidence au petit cercle et le tiers de cette tangente.*

Il s'agit de démontrer (P. X, F. 5) que la partie de normale NR (470) et la tangente NU du cercle des rebroussements M, M', ont pour relation l'équation

$$\overline{NR}^2 = NU\frac{NU}{3}.$$

Or, $NR \times NV = \overline{NU}^2$; $NV = NR + RV = NR + RL' = NR + 2RH = NR + 2NR = 3NR$. Par conséquent,

$$NR \times 3NR = \overline{NU}^2, \quad \overline{NR}^2 = \frac{\overline{NU}^2}{3} \quad \text{et} \quad NU : NR :: NR : \tfrac{1}{3}NU.$$

PROBL. (*a*) : *Mener, par un point donné sur la courbe, une normale à la caustique due au cercle et à des rayons parallèles.*

Décrivez, du centre A (P. X, F. 5), la circonférence MUM'L'M des rebroussements ; menez une tangente NU à cette courbe, par le point donné N de la caustique ; divisez NU en trois parties égales ; cherchez la moyenne proportionnelle de NU, $\frac{1}{3}$NU ; décrivez de N, avec la longueur trouvée, un arc qui coupe le petit cercle, et joignez l'intersection R au même point N; la droite NR sera la normale demandée.

Probl. (*b*) : *Mener, par un point donné sur la courbe, une tangente à la caustique due au cercle et à des rayons parallèles.*

Solution 1 : Tracez la normale NR du point donné N (P. X, F. 5); puis élevez, au même point, une perpendiculaire EF sur cette droite.

Solution 2 : Déterminez le point R, comme dans le problème précédent; tirez le rayon ARE du grand cercle, et joignez E au point donné N (470).

Solution 3 : Menez RH, parallèle à la droite CD des sommets; décrivez de N, avec AH, un arc qui coupe le grand cercle, et joignez le point donné à l'intersection E la plus voisine du sommet D (470).

472. *Dans une caustique par réflexion due au cercle et à des rayons lumineux parallèles, tout arc compris entre un sommet et un autre point, sans dépasser le quart de la courbe complète, égale le rayon réfléchi, relatif à la seconde extrémité, plus la moitié de la partie du rayon incident comprise dans le cercle.*

Il suffit de démontrer le principe pour l'une des trois caustiques semblables dont la corrélation a été établie (470), pour la plus petite, par exemple. Cette courbe MSmM'm'M a pour développante la caustique MNDM'CM (P. X, F. 5), et l'origine de celle-ci est en M (459 et 13). Donc, l'arc MS de la première égale la partie NS de sa tangente, comprise entre le contact et la développante (12). Comme $NS = NR + RS$, et que RS est le rayon réfléchi relatif au contact S, il ne reste plus qu'à voir si $NR = \frac{1}{2}RL' = HR$. Or, cette égalité résulte de celle des triangles ENR, AHR (470).

De là résulte un autre fait qui mérite d'être remarqué.

La demi-caustique est triple du rayon de la circonférence génératrice.

En effet, l'arc $DNM = AB + BM = AB + \frac{1}{2}AB$, puisque BM est le rayon réfléchi relatif au rebroussement M, et que AB forme la moitié de la partie BB' du rayon incident, comprise dans le cercle. De même, l'arc $CM = AB + \frac{1}{2}AB$, et par conséquent, la moitié de la caustique complète, $CMND = 3AB$.

Probl. (*a*) : *Mesurer l'arc compris entre l'un des sommets et un autre point donné, sans dépasser les rebroussements, sur la caustique due au cercle et à des rayons lumineux parallèles.*

Menez la tangente EF de l'extrémité N étrangère aux sommets (P. X, F. 5); puis, ajoutez la plus petite partie EN de cette tangente, à EK, parallèle à la droite MM' des rebroussements, arrêtée à la droite CD des sommets.

Probl. (*b*) : *Mesurer l'arc* NT, *compris entre deux points donnés, sur la caustique due au cercle et à des rayons lumineux parallèles.*

Mesurez successivement les deux arcs compris entre les points donnés N, T et le sommet voisin D; puis retranchez le plus petit du plus grand; la différence sera la longueur de l'arc NT.

Caustique d'un point extérieur.

473. *La caustique par réflexion due au cercle et à un point lumineux extérieur se divise en deux parties inégales: l'une réelle, que donne la concavité du plus grand des deux arcs embrassés par les tangentes issues du point lumineux; l'autre idéale, qui provient de la convexité du plus petit arc (468); ces deux parties se raccordent aux extrémités de la corde commune aux deux arcs, et chacune a, sur l'axe, un rebroussement de seconde espèce.*

Les circonstances sont absolument les mêmes que celles du n° 468; il s'agit encore de rayons lumineux issus d'un point L situé hors du cercle A (P. X, F. 6), qui se réfléchissent d'abord sur la convexité de l'arc C'B'D', puis sur la concavité de l'arc C'BD', si le premier est supposé transparent; seulement, le point rayonnant L n'est plus à l'infini, comme dans le cas des rayons parallèles, et la corde C'D', par laquelle sont joints les contacts des rayons extrêmes, ne forme plus un diamètre du cercle.

Ainsi, chaque partie de la caustique doit toucher la circonférence aux extrémités C', D' de la corde qui soutend l'arc générateur, et avoir un rebroussement de seconde espèce sur l'axe unique LB; mais, attendu que la corde des sommets s'est éloignée du centre, le rebroussement M de la plus grande partie s'est rapproché du même point, et M' celui de la plus petite s'en est écarté.

474. *Dans la caustique par réflexion due au cercle et à un point lumineux extérieur, le rayon réfléchi de la plus grande partie est quatrième proportionnelle à l'excès du rayon incident sur le quart de la corde qu'il forme, à la première des deux longueurs et à la seconde.*

Le rayon réfléchi de la plus petite partie est quatrième proportionnelle au rayon incident, augmenté du quart de la corde que forme son prolongement, à la première des deux longueurs et à la seconde.

On trouve d'abord, comme dans le n° 468, que (P. X, F. 6)

$$2EE' + GG' = FF',$$

et que

$$EG : EH :: FF' + EE' : EE'.$$

Les sécantes LE, LE' donnent ensuite cette proportion

$$LE : LE' :: LG' : LG.$$

Ainsi, les triangles ELE', G'LG sont semblables;

$$GG' : EE' :: LG' : LE; \quad GG' = EE'\frac{LG}{LE},$$

attendu que LG, LG′ diffèrent seulement d'une quantité infiniment petite;

$$FF' = 2EE' + EE'\frac{LG}{LE} = \frac{2EE'\cdot LE + EE'(LE-EG)}{LE} = \frac{3EE'\cdot LE - EE'\cdot EG}{LE};$$

$$EG : EH :: \frac{3LE-EG}{LE} + 1 : 1; \quad EG : EH :: 4LE - EG : LE;$$

$$\tfrac{1}{4}EG : EH :: LE - \tfrac{1}{4}EG : LE,$$

et enfin

$$EH = \frac{\frac{1}{4}EG \times LE}{LE - \frac{1}{4}EG}.$$

Pour la plus petite partie de la caustique, celle qui est idéale, on aura

$$EE' + 2GG' = ff', \quad EE' = GG'\frac{LE}{LG},$$

$$ff' = \frac{GG' \times LE}{LG} + 2GG' = \frac{GG'(LG+EG) + 2GG' \times LG}{LG}$$
$$= \frac{GG' \times EG + 3GG' \times LG}{LG},$$

$$EG : Gh :: ff' + GG' : GG', \quad EG : Gh :: \frac{EG + 3LG}{LG} + 1 : 1,$$

$$EG : Gh :: EG + 4LG : LG,$$

et enfin,

$$Gh = \frac{\frac{1}{4}EG \times LG}{LG + \frac{1}{4}EG}.$$

Si donc nous désignons par LE, EH le rayon incident et le rayon réfléchi relatifs soit à la partie réelle de la caustique, soit à la partie idéale, nous pourrons poser, pour formule générale de la caustique complète, due au cercle et à un point lumineux extérieur,

$$EH = \frac{\frac{1}{4}EG \times LE}{LE \mp \frac{1}{4}EG},$$

le signe — du diviseur se rapportant à la grande partie, et le signe + à la petite.

Problème: *Tracer la caustique par réflexion due au cercle et à un point lumineux extérieur.*

Tirez, par la position L du point lumineux (P. X, F. 6), plusieurs rayons incidents LE, LE′, etc.; marquez les arcs EF, G*f*, égaux chacun à l'arc EG, pour avoir les directions des rayons réfléchis EF, G*f*, respectivement relatifs à la partie réelle et à la partie idéale de la caustique; construisez la quatrième proportionnelle de la formule générale, en employant le signe — et la longueur LE de la figure, afin de marquer le point H de la courbe; construisez une autre quatrième proportionnelle, en employant le signe +, et la longueur LG, au lieu de LE, afin de déterminer le point h; faites de même pour LE′, LG′, vous obtiendrez les points situés sur E′F′, G′f', et vous en trouverez ainsi autant qu'en exigera le tracé de la caustique.

Mais il suffit d'employer la formule pour les points situés sur l'une des moitiés MD′M′ de la courbe: ceux de l'autre moitié MC′M′ en sont les symétriques, et il est plus court de les marquer au moyen de perpendiculaires abaissées des premiers sur l'axe LB.

Les contacts C′, D′ de la courbe avec la circonférence sont ceux des tangentes au cercle, menées par le point lumineux L.

Les distances BM, B′M′, qui déterminent les rebroussements, sont données par la formule générale, moyennant qu'on y remplace EG par le diamètre BB′, et LE par LB ou LB′, selon qu'il s'agit de la première ou de la seconde distance.

Applications : I. Quelle que soit la position de l'œil devant un miroir convexe C′B′D′ (P. X, F. 6), il se trouve sur une des tangentes de la caustique C′M′D′, et voit le point L au contact de cette tangente. Ainsi, la vision est la même que dans un miroir plan (467, probl.); mais ici l'objet paraît moins éloigné de la surface réfléchissante, et c'est seulement quand on se place près de l'axe AL, qu'on le rapporte sur la normale qui le contient.

II. Si l'œil se pose entre la corde C′D′ du miroir concave C′BD′ et la tangente parallèle de la caustique C′MD′, il voit le point L en M, ou fort près de ce rebroussement; mais, si, atteignant E′F′, il va de F′ vers B, puis de B vers D′, en regardant l'arc BD′, l'objet lui semble tourner aussi.

Placé entre B, M et regardant B, on ne perçoit plus une image réelle, mais on voit l'objet comme s'il était derrière le miroir, parce qu'on reçoit les rayons qui, réfléchis autour de B, tendent à concourir derrière la tête, vers M.

Caustique d'un point de la circonférence.

475. *Lorsqu'une circonférence réfléchit des rayons émanés d'un de ses points, la caustique formée sur le même plan a pour axe le diamètre qui aboutit au point lumineux, et elle coupe cet axe deux fois, en tournant sa convexité vers la concavité du cercle: l'une des intersections, contact des deux courbes et sommet, est le point lumineux; l'autre est un rebroussement de seconde espèce, situé au tiers du diamètre, à partir de l'autre extrémité.*

La symétrie de la caustique relativement au diamètre BL que termine le point lumineux L (P. X, F. 7), a des motifs analogues à ceux qui ont été donnés dans le n° 468. On voit aussi, soit en raisonnant comme au même article, soit en remplaçant EG par LE dans la formule générale du n° 474, et en prenant le signe — du diviseur, que EL : EH :: 3 : 1. Donc, le point M, intersection et contact de BL, est situé au tiers de ce diamètre, à partir de B, et le même point est un rebroussement de seconde espèce (9), puisque la courbe a, vers L, des parties plus éloignées de B que l'élément M, et qu'elle doit tourner sa convexité vers la concavité du cercle.

D'ailleurs, le point rayonnant L est aussi une incidence; le rayon lumineux qui s'y termine, étant l'élément de la circonférence, fait un angle droit avec LA, et il en est de même du rayon réfléchi. Ce dernier se confond donc avec le premier; la caustique passe par L; elle y a pour tangente l'élément de la circonférence, ou la tangente même de cette courbe, et par conséquent, elle touche le cercle au point lumineux.

Ainsi, *la caustique par réflexion due au cercle et à un point lumineux situé sur la circonférence, est une courbe dont le véhicule droit parcourt cette circonférence, faisant toujours avec le rayon le même angle que le rayon lumineux correspondant, et dont le point générateur reste à une distance de l'incidence égale au tiers du même rayon lumineux.*

476. *Dans la caustique par réflexion due au cercle et à un point lumineux situé sur la circonférencé, la droite qui joint le rebroussement à tout autre point de la courbe, est parallèle au rayon de l'incidence correspondante.*

En effet, la droite NG, menée parallèlement à AE (P. X, F. 8), rayon de l'incidence qui donne le point N, coupe AF de manière que AG en est le tiers, comme EN est le tiers de EF. Mais, l'arc BE = LI = IF, et par conséquent, EI, GN sont parallèles à BF. Donc, GN coupe aussi AB au tiers; le reste BM en est les deux tiers ou le tiers du diamètre BL, et l'intersection M forme le rebroussement (475).

477. *Dans la caustique par réflexion due au cercle et à un point lumineux situé sur la circonférence, le cercle concentrique qui a pour rayon le tiers du rayon du cercle donné, coupe en deux parties, égales à son propre diamètre, toute corde de la courbe tirée par le reboussement.*

D'après le n° 475, le cercle concentrique passe par le rebroussement M (P. X, F. 8), et d'après le n° 476, il passe aussi par le point G, intersection de AF et de la corde de caustique menée par M, parallèlement à AE. Or, la partie GN de cette corde est les deux tiers de AE, comme FN est les deux tiers de EF; GN égale donc le diamètre 2AM du cercle concentrique.

Le prolongement de MG coupe IF de manière que IK forme un tiers de cette corde de la grande circonférence, comme AG forme le tiers de AF, et GK vaut deux tiers de AI, ou 2AM. Mais le point K appartient à la caustique, car IF est précisément le rayon réfléchi dû au rayon lumineux LI, puisque IF = LI et que les angles FIE, LIE sont égaux. Donc, l'autre partie GK de la corde de caustique tirée selon MG égale aussi le diamètre du cercle concentrique.

Il suit de là que *la caustique par réflexion due au cercle et à un point lumineux situé sur la circonférence, est une conchoïde qui a son pôle au point de rebroussement* M, *et son axe sur la droite* MA, *par laquelle ce point est joint au centre du cercle; sa régulatrice est une circonférence concentrique d'un rayon* AM *égal au tiers de l'autre; son point générateur chemine sur le véhicule droit* MG, *de manière à laisser entre lui et la régulatrice une longueur* GK *toujours égale à* 2AM (428 et 429).

478. *La caustique par réflexion due au cercle et à un point lumineux situé sur la circonférence, est développante d'une caustique semblable, due à son rebroussement et au cercle concentrique qui passe par ce point.*

La démonstration consiste à faire voir que la perpendiculaire NO de EN, normale à la grande caustique (P. X, F. 8), est tangente à la petite caustique que le point rayonnant M fait produire au cercle dont le rayon est AM (13).

La droite NO se trouve parallèle à FI, puisque l'angle EFI est droit, et OE $= \frac{1}{3}$EI, comme EN $= \frac{1}{3}$EF. Mais, $\frac{1}{3}$EI $= \frac{1}{3}$2AE $= \frac{2}{3}$AE; donc OA $= \frac{1}{3}$AE, et l'intersection de NO, AE se fait sur le petit cercle. Il en est de même de l'intersection P de NO, FA, car les triangles OAP, FAI sont semblables, et le dernier est symétrique. Or (476), l'arc OM $=$ GQ $=$ OP. Par conséquent, la réflexion du rayon lumineux MO se fait selon OP, et NO est tangente à la caustique du petit cercle.

Ainsi la petite caustique est la développée de la grande. Il s'ensuit cet autre fait:

La caustique par réflexion due au cercle et à un point lumineux situé sur la circonférence, est la développée d'une caustique semblable, due à une circonférence trois fois plus grande et à un point rayonnant situé sur cette dernière courbe; cette troisième caustique a son rebroussement au point lumineux L *qui produit la première.*

Problème : *Tracer la caustique par réflexion due à un cercle, ou seulement à un arc, et à un point lumineux situé sur la circonférence.*

Solution 1 : Tirez plusieurs rayons LE, LE′, etc. (P. X, F. 7), et par leurs incidences E, E′, des cordes EF, E′F′ qui leur soient respectivement égales; prenez les tiers de LE, LE′, et portez-les sur EF, E′F′, à partir de E, E′; les points N, H, qui en résulteront, appartiendront à la caustique demandée (475); son rebroussement M sera au tiers du diamètre LB, à partir de B, et vous trouverez les points situés sur la corde CD, en prolongeant la courbe jusqu'à des points qui auront été marqués entre L et cette corde de l'arc donné CBD.

Solution 2 : Divisez le diamètre LB en trois parties égales (F. 8);

le rebroussement M sera au point de division le plus éloigné de L. Menez, par ce point, une parallèle au rayon AE de l'incidence E; son intersection N avec le rayon réfléchi EF se trouvera sur la caustique (476). En répétant la même opération pour d'autres incidences, vous obtiendrez autant de points de la caustique MNKM qu'il vous en faudra pour la tracer.

Solution 3: Décrivez un cercle, du centre A, avec la distance AM de ce centre au rebroussement; tirez, par ce dernier point, des sécantes indéfinies, telles que MK; portez le diamètre 2AM sur ces sécantes, de chaque côté du point où elles coupent séparément la petite circonférence, par exemple de G en K et en N; les points K, N, ainsi marqués, appartiendront à la caustique demandée (477).

479. ***Dans une caustique par réflexion due au cercle et à un point lumineux situé sur la circonférence, la partie*** NO ***de normale, comprise entre l'incidence et le cercle concentrique qui passe par le rebroussement*** (P. X, F. 8), ***est moyenne proportionnelle entre la tangente*** NT, ***menée de l'incidence*** N ***au petit cercle, et la moitié de cette tangente.***

On a d'abord la proportion

$$NO : NT :: NT : NP.$$

Mais $NP = NO + OP$; $OP = OM = NO$, car GQ est parallèle à FI, ainsi que NO, et GN est parallèle à AE (476). Donc,

$$NP = 2NO, \quad NO : NT :: NT : 2NO,$$

$$NO : NT :: \tfrac{1}{2}NT : NO, \quad \text{et} \quad NT : NO :: NO : \tfrac{1}{2}NT.$$

PROBL. (*a*): ***Mener, d'un point de la courbe, une normale à la caustique par réflexion due au cercle et à un point lumineux situé sur la circonférence.***

Décrivez, du centre A (P. X, F. 8), une circonférence qui passe par le rebroussement M; menez une tangente NT à cette courbe, par le point donné N de la caustique; partagez NT en deux parties égales; cherchez la moyenne proportionnelle de NT, $\frac{1}{2}$NT; décrivez de N, avec cette moyenne, un arc qui coupe le petit cercle, et joignez l'intersection O au même point N; la droite NO sera la normale demandée.

PROBL. (*b*): ***Mener, d'un point de la courbe, une tangente à la caustique par réflexion due au cercle et à un point lumineux situé sur la circonférence.***

Solution 1: Tracez la normale NO du point donné N (P. X, F. 8); puis élevez, au même point, une perpendiculaire EF sur cette droite.

Solution 2: Déterminez le point O, comme dans le problème précédent; tirez le rayon AOE du grand cercle, et joignez E au point donné N (478).

Solution 3 : Joignez N au rebroussement M; tirez, par le centre A, un rayon AE, parallèle à MN, pour marquer l'extrémité E du rayon incident relatif à N (476); la droite EN sera le rayon réfléchi, tangent à la caustique MNLKM.

PROBL. (*c*) : *Mener, par un point donné sur une circonférence, une tangente à la caustique par réflexion qu'a fait produire à la première courbe un point lumineux qui s'y trouvait situé.*

Joignez le point donné F au centre A (P. X, F. 8); décrivez, du même centre, une circonférence qui passe par le rebroussement M; divisez en deux parties égales, au moyen d'un rayon AE, l'arc MP du petit cercle, compris entre AM et le prolongement de FA; vous marquerez ainsi l'autre extrémité E du rayon réfléchi qui aboutit à F (478); la droite EF sera la tangente demandée, et MN, parallèle à AE, la coupera au contact.

480. *Dans une caustique par réflexion due au cercle et à un point lumineux situé sur la circonférence, tout arc de la première courbe, compris entre ce point et un autre, sans dépasser le rebroussement, égale la somme du rayon incident et du rayon réfléchi relatifs à la seconde extrémité.*

Il suffit de démontrer le principe pour l'une des trois caustiques semblables dont nous avons établi la corrélation (478), pour la plus petite, par exemple. Cette courbe MRM'M a pour développante la caustique MNLKM (P. X, F. 8), et l'origine de celle-ci est en M (496 et 13). Donc, l'arc MR de la première, égale la partie NR de sa tangente, comprise entre le contact et la développante (12). Or, NR = NO + OR; OR est le rayon réfléchi relatif au contact R, et (479) NO = MO, rayon incident qui produit OR ou OP (478).

De là résulte un autre fait très-remarquable:

La demi-caustique est double de sa corde.

Effectivement, MNL = LB + BM, somme du rayon incident et du rayon réfléchi relatifs au rebroussement M. Mais LB = LM + BM = LM + $\frac{1}{2}$ LM, puisque BM = $\frac{1}{3}$ LB. En conséquence,

$$MNL = LM + \tfrac{1}{2} LM + \tfrac{1}{2} LM = 2LM.$$

PROBL. (*a*) : *Mesurer l'arc compris entre le point lumineux et un autre, sans dépasser le rebroussement, sur la caustique due à une circonférence qui contient la première extrémité.*

Menez la tangente EF de l'extrémité N, étrangère au point lumineux (P. X, F. 8); puis, ajoutez la plus courte partie EN de cette tangente au rayon incident LE; la somme sera la longueur de l'arc NSL.

PROBL. (*b*) : *Mesurer l'arc* NS, *compris entre deux points donnés,* *sur la caustique due à une circonférence qui contient le point lumineux* (P. X, F. 8).

Mesurez successivement les deux arcs compris entre les points donnés N, S et le point lumineux L; puis, retranchez le plus petit du plus grand; la différence égalera la longueur de l'arc NS.

Caustique d'un point intérieur.

481. *Dans la caustique par réflexion due au cercle et à un point lumineux intérieur, le rayon réfléchi est la quatrième proportionnelle de l'excès du rayon incident sur le quart de la corde qu'il forme, de la première des deux longueurs et de la seconde.*

On trouve d'abord, comme dans le n° 468, que (P. X, F. 9)

$$2EE' - GG' = FF', \quad \text{et que} \quad EG : EH :: FF' + EE' : EE'.$$

Les cordes EG, E'G', qui se coupent en L, donnent ensuite cette autre proportion

$$LE : LE' :: LG' : LG.$$

Ainsi, les triangles ELE', G'LG sont semblables;

$$GG' : EE' :: LG' : LE; \quad GG' = EE'\frac{LG}{LE},$$

parce que LG, LG' diffèrent seulement d'une quantité infiniment petite;

$$FF' = 2EE' - EE'\frac{LG}{LE} = \frac{2EE' \cdot LE - EE'(EG - LE)}{LE} = \frac{3EE' \cdot LE - EE' \cdot EG}{LE};$$

$$EG : EH :: \frac{3LE - EG}{LE} + 1 : 1; \quad EG : EH :: 4LE - EG : LE;$$

$$\tfrac{1}{4}EG : EH :: LE - \tfrac{1}{4}EG : LE,$$

et enfin, conformément à l'énoncé,

$$EH = \frac{\frac{1}{4}EG \times LE}{LE - \frac{1}{4}EG}.$$

Cette formule a d'ailleurs l'avantage d'être générale. Nous avons vu (474) qu'elle convient lorsque le point lumineux est situé hors du cercle, à une distance finie. Pour le cas des rayons parallèles (468), elle donne (F. 4)

$$EH = \tfrac{1}{4}EG = \tfrac{1}{2}EK,$$

attendu qu'alors $LE - \frac{1}{4}EG = LE$, le point lumineux étant situé à l'infini. Quand ce même point se trouve sur la circonférence (475), $LE = EG$, et l'on a (F. 7)

$$EH = \frac{\frac{1}{4}LE}{1 - \frac{1}{4}} = \tfrac{1}{3}LE.$$

Si la lumière L est transportée au centre A (F. 9), $LE = \frac{1}{2}EG$, car EG forme un diamètre; tout rayon réfléchi a la même direction que l'incident, et

$$\mathrm{EH} = \frac{\frac{1}{8}\overline{\mathrm{EG}}^2}{\frac{1}{2}\mathrm{EG} - \frac{1}{4}\mathrm{EG}} = \frac{1}{2}\mathrm{EG},$$

c'est-à-dire que la caustique se réduit au seul point A, ce qui doit être, évidemment.

482. *La caustique par réflexion due au cercle et à un point lumineux intérieur présente trois points de rebroussement et deux branches infinies, ou quatre points de rebroussement: le quatrième est toujours sur l'axe, soit à l'infini, soit à une distance finie du centre.*

Le cercle se trouve divisé en deux parties, par la corde C′D′, perpendiculaire sur l'axe BB′ de la caustique, au point lumineux (P. X, F. 9). L'effluve de rayons incidents qui se réfléchit sur la plus grande C′BD′, est analogue à celle du demi-cercle CBD (F. 4) et à celle du cercle entier (F. 8). La forme de la caustique relative à cette partie doit donc avoir de l'analogie avec la forme des courbes CMD (F. 4), LKMSL (F. 8). Ainsi, un rebroussement de seconde espèce (9) existe sur l'axe BB′ (F. 9). Il a d'ailleurs un autre motif: le rayon incident LB donne un rayon réfléchi BL qui coupe la courbe et la touche en même temps. Mais la position M de ce rebroussement est ici plus voisine du centre A que dans les deux autres cas, puisqu'il se trouve au milieu de AB, quand L est à l'infini, et que AM devient seulement un tiers de AB, au moment où L arrive sur le cercle.

La caustique ne peut plus toucher la circonférence, car les contacts sont descendus de C et D (F. 4) en L (F. 8), pendant que le point lumineux est passé de l'infini sur le pourtour du miroir; ou bien EH ne saurait devenir nul, dans le cas de la figure 9, puisqu'aucun des deux facteurs EG, LE du numérateur de la formule (481) ne peut se réduire à zéro. Ainsi, les points N, N′, que donnent les incidences C′, D′, se trouvent entre l'axe BB′ et la circonférence. D'ailleurs, les distances C′N, D′N′ valent C′L chacune; car, pour N, N′, $\mathrm{LE} = \frac{1}{2}\mathrm{EG}$, puisque $\mathrm{LE} = \mathrm{LC'} = \frac{1}{2}\mathrm{C'D'}$, et la formule devient

$$\mathrm{EH} = \frac{\frac{1}{4}\mathrm{EG} \times \frac{1}{2}\mathrm{EG}}{\frac{1}{2}\mathrm{EG} - \frac{1}{4}\mathrm{EG}} = \frac{\frac{1}{8}\mathrm{EG}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{8}\mathrm{EG}}{\frac{2}{8}} = \frac{1}{2}\mathrm{EG}.$$

Dans la partie C′B′D′ du miroir, on a toujours $\mathrm{LE} < \frac{1}{2}\mathrm{EG}$, et il peut arriver un moment où $\mathrm{LE} = \frac{1}{3}\mathrm{EG}$. Alors,

$$\mathrm{EH} = \frac{\frac{1}{4}\mathrm{EG} \times \frac{1}{3}\mathrm{EG}}{\frac{1}{3}\mathrm{EG} - \frac{1}{4}\mathrm{EG}} = \frac{\frac{1}{12}\mathrm{EG}}{\frac{1}{12}} = \mathrm{EG},$$

ce qui prouve que la caustique coupe l'arc CBD, et plus près de B que de C ou D. Par conséquent, le point générateur est remonté au-dessus de N, N', ou s'est éloigné de CD plus qu'il ne l'était en ces points, et comme le mouvement rétrograde a nécessairement dû commencer à l'instant du passage de l'incidence sur l'arc C'B'D', les points N, N' sont des rebroussements.

Le rayon incident continuant de décroître, tandis que la corde augmente sans cesse, il peut se faire qu'en un certain point de C'B' et de B'D', $LE = \frac{1}{4}EG$. Alors,

$$EH = \frac{\frac{1}{16}EG}{0},$$

le point générateur arrive à l'infini, et les deux rayons réfléchis sont des asymptotes de la caustique.

Ainsi, dans le cas où $LB' < \frac{1}{4}BB'$, la caustique a trois points de rebroussement et deux branches infinies, circonstance qui rend de première espèce les rebroussements N, N'.

Si $LB' = \frac{1}{4}BB'$, les asymptotes se confondent avec l'axe, et la caustique a un quatrième rebroussement à l'infini, lequel est aussi de première espèce.

De $LB' = \frac{1}{4}BB'$ à $LB' = \frac{1}{3}BB'$, le quatrième rebroussement se rapproche continuellement de B; il se fait sur ce point même, quand a lieu la seconde valeur de LB'; des valeurs plus grandes le rapprochent de plus en plus du centre A; elles font le même effet sur les trois autres M, N, N', et lorsqu'enfin $LB' = \frac{1}{2}BB'$, les quatre rebroussements, ainsi que tous les autres points de la courbe, se confondent avec le centre du cercle (481).

Nous ne disons rien du cas où le point lumineux passerait entre A et B, parce que ce qui a lieu pour les arcs C'BD', C'B'D' arriverait pour les arcs analogues que déterminerait la nouvelle position de L.

483. *Dans la caustique par réflexion due au cercle et à un point lumineux intérieur, la corde qui donne les points où la courbe coupe la circonférence, est moyenne proportionnelle entre la moitié de la plus grande des deux parties formées sur le diamètre, par le point lumineux, et la plus petite prise neuf fois.*

Soit IK cette corde (P, X, F. 9); on aura (482)

$$LI = \frac{1}{3}IK, \quad LK = \frac{2}{3}IK, \quad LB : \frac{2}{3}IK :: \frac{1}{3}IK : LB',$$

$$\frac{2}{9}\overline{IK}^2 = LB' \times LB, \quad \text{et} \quad \overline{IK}^2 = \frac{9}{2}LB' \times LB = 9LB'\frac{LB}{2}.$$

484. *Dans la caustique due au cercle et à un point lumineux intérieur, la corde relative aux points situés à l'infini est moyenne proportionnelle entre les deux tiers de la plus grande des deux parties formées sur le diamètre, par le point lumineux, et la plus petite prise huit fois.*

Soit EG cette corde (P. X, F. 9); nous aurons (482) situé sur la verticale OB, et voilà pourquoi les objets placés dans l'eau et regardés verticalement, paraissent plus près de la surface qu'ils n'en sont réellement.

Pour les mêmes raisons, nous verrions l'objet F en I ou en G′, si nous étions placés sur la tangente au point I de la caustique ou sur la surface de l'eau, à droite de G′. Ainsi, l'objet semble suivre l'œil et s'élever de plus en plus, à mesure qu'on s'écarte de la verticale FB, en se rapprochant de la surface liquide; mais dès qu'on atteint cette surface, à droite de G′, l'image de l'objet reste fixe en ce point, quelle que soit la distance horizontale à laquelle on s'éloigne.

II. Non-seulement la réfraction fait paraître plié, à la surface de l'eau, un bâton droit qu'on immerge en partie et obliquement, mais encore elle rend courbe la portion qui est sous le liquide. Le pli provient de ce que le bout immergé se relève en apparence, tandis que l'intersection avec la surface se voit dans sa position réelle. Il n'y aurait pas de courbure, si les images de tous les points immergés étaient aux rebroussements des caustiques respectives, car ces courbes sont semblables, puisqu'elles sont les développées d'ellipses semblables (394, probl.), et par conséquent leurs rebroussements forment une droite. Mais l'œil ne rapporte au rebroussement que le point situé sur sa verticale; il voit les autres aux contacts de tangentes inclinées; les croit plus élevés encore au-dessus de leurs vraies positions, et forme de l'ensemble une ligne faiblement courbée qui tourne sa concavité vers la surface de l'eau.

486. *La caustique par réfraction due au plan et à un point lumineux situé dans le milieu le moins dense, est la développée d'une branche d'hyperbole* (465).

Il en est ainsi, parce que, en pareil cas, la caustique plane peut avoir pour développante une branche d'hyperbole, dont le point lumineux est le foyer, et dont l'axe déclinant se confond avec la droite selon laquelle le plan des deux courbes coupe le plan séparateur des milieux (393).

Application : Un point F, situé dans l'air (P. X, F. 2), réfléchit des rayons de lumière vers la surface CD de l'eau, dans toutes les directions; ces rayons se réfractent en pénétrant dans le liquide, et si l'on prolonge au dehors les parties immergées de ceux d'un même plan, elles forment la caustique IEI‴, développée de la branche d'hyperbole KAK′, qui a F pour foyer et AS pour demi-axe transverse.

Ainsi, un poisson, dont l'œil serait en un point quelconque de la verticale SB, verrait l'objet F au rebroussement E de la caustique (485, appl. I). Placé à droite de la même verticale, il rapporterait F à gauche de cette droite, au contact de la branche EI et de la tangente menée de son œil à cette branche, au point H par exemple. Si, sans s'éloigner de AB davantage, le poisson monte, l'objet F lui paraîtra s'élever en même temps et s'éloigner; s'il descend, l'image descendra aussi et se rapprochera, mais elle n'atteindra jamais le prolongement de AB. Il ne faut donc pas qu'un poisson, peu enfoncé, s'éloigne beaucoup de la verticale d'un point situé dans l'air, pour que ce point lui semble placé à une très-grande distance. Enfin, l'image s'évanouit et l'objet cesse d'être visible, quand sa verticale est assez éloignée de celle de l'œil immergé pour que l'angle d'incidence ait une grandeur qui change la réfraction en réflexion, c'est-à-dire aussitôt après que l'angle de réfraction a pris une ouverture d'environ $48^\circ\ 22'$.

487. *Il y a deux cas où la caustique par réfraction due au cercle est un point idéal; ce point forme le conjugué du point lumineux, relativement au diamètre qui les unit* *.

Nous avons démontré (395 et 396) qu'effectivement, dans deux cas spécifiés, tous les rayons réfractés sur le cercle séparateur des milieux concourent, par leurs prolongements, en un point unique. Il reste donc à faire voir que le concours est le conjugué du point lumineux. Cela est vrai (P. VIII, F. 17), si

$$AD' : AD :: BD' : BD.$$

Les articles cités établissent la relation $AC : CD :: CD : BC$. Cette proportion montre d'abord que B se trouve à l'intersection de AC et de la corde des contacts **, car le rayon est toujours moyen proportionnel entre les distances du centre au milieu de cette corde et au concours des deux tangentes. La même proportion donne ensuite

$$AC - CD : CD :: CD - BC : BC \quad \text{ou} \quad AD' : CD :: BD' : BC,$$

et

$$AC + CD : CD :: CD + BC : BC \quad \text{ou} \quad AD : CD :: BD : BC.$$

Par conséquent,

$$AD' : BD' :: AD : BD,$$

ce qui revient à la condition posée.

On a aussi pour l'autre cas (F. 16),

$$AC : CD :: CD : BC.$$

La caustique idéale B est donc le concours des tangentes qui ont pour corde de leurs contacts la perpendiculaire élevée en A sur AC. Il s'ensuit que A et B ont simplement changé de place, et que

$$BD' : BD :: AD' : AD.$$

PROBL. (*a*) : *Trouver la caustique du premier cas* (P. VIII, F. 16).

Menez une tangente à chaque extrémité de l'arc séparateur; le concours B sera la caustique demandée.

---

* Voyez notre *Géométrie appliquée*, troisième édition, p. 106.

** *Idem*, p. 135.

PROBL. (*b*) : *Trouver la caustique du second cas* (P. VIII, F. 17).

Tirez la corde de l'arc séparateur; son intersection B avec AG sera la caustique cherchée.

APPLICATIONS : I. Si l'on regarde au travers d'un segment sphérique de verre, un objet A (P. VIII, F. 16), dont la position, sur la face plane, satisfasse aux conditions du n° 395, il sera vu en B, car ce point formera la caustique idéale de chaque section centrale du segment.

II. Supposez une coupe de verre en calotte sphérique, comme un verre de montre, et un œil appliqué tout contre la surface convexe. Il verra en B un objet A placé de manière à satisfaire aux conditions du n° 396.

488. *Dans toutes les autres circonstances où la ligne séparatrice des milieux est une circonférence* (397), *le rayon réfracté, compris entre cette courbe et la caustique, vaut la troisième proportionnelle d'une certaine longueur et de la demi-corde qu'il forme dans le cercle; la longueur, premier terme de la proportion, est l'excès de la même demi-corde sur la somme ou la différence de deux quatrièmes proportionnelles, selon que la caustique doit être réelle ou idéale : la première dépend du sinus d'incidence, du sinus de réfraction et de la demi-corde formée par le rayon incident; la seconde dépend du même rayon, de sa demi-corde et de la première.*

Supposons le cas d'une caustique réelle, le point lumineux L à l'extérieur de la circonférence A séparatrice des milieux (P. X, F. 10), et deux rayons incidents LE, LE′ qui forment un angle ELE′ infiniment petit; nommons respectivement r, r', le rayon LE et la partie EH du rayon réfracté EF, comprise entre l'incidence et l'intersection H de l'autre rayon réfracté E′F′, intersection qui se fait sur la caustique; c, c', les moitiés des cordes EG, EF, dont la première est le prolongement de LE; k, k', deux droites proportionnelles au sinus de tout angle d'incidence et au sinus de l'angle de réfraction correspondant; a, a', les angles AEG, AEF; et d, d', les différences infiniment petites des angles a, a' aux angles AE′G′, AE′F′.

Nous aurons d'abord

$$\sin \mathrm{AE'G'} = \sin(a+d) = \frac{k}{k'}\sin(a'+d'), \quad \sin a = \frac{k}{k'}\sin a',$$

$$\sin(a+d) - \sin a = \frac{k}{k'}[\sin(a'+d') - \sin a'].$$

Or, $\sin(a+d) = \sin a \cos d + \sin d \cos a$, $\cos d = 1$, $\sin d = d$. Par conséquent,

$$\sin(a+d) - \sin a = d\cos a;$$

de même

$$\sin(a'+d') - \sin a' = d'\cos a', \quad \text{et} \quad d\cos a = \frac{k}{k'}d'\cos a'.$$

Comme, en outre, $R \times \cos AEG = EB = c$, R étant le rayon AE du cercle, et que $R \times \cos AEF = EC = c'$,

$$\cos a = \frac{c}{R}, \quad \cos a' = \frac{c'}{R}, \quad \text{puis} \quad dc = \frac{k}{k'}d'c'.$$

Mais,

$$d = AE'G' - AEG = \frac{G'I' - GI}{2} = \frac{GG' + GI + II' - GI}{2} = \frac{GG' + EE'}{2},$$

$$d' = AE'F' - AEF = \frac{F'I' - FI}{2} = \frac{F'I + II' - FF' - F'I}{2} = \frac{EE' - FF'}{2}.$$

D'un autre côté (468),

$$r : EE' :: r + 2c : GG' \quad \text{et} \quad GG' = \frac{r + 2c}{r}EE';$$

$$r' : EE' :: 2c' - r' : FF' \quad \text{et} \quad FF' = \frac{2c' - r'}{r'}EE'.$$

Donc,

$$d = \frac{r + 2c}{2r}EE' + \frac{EE'}{2} = \frac{r + c}{r}EE',$$

$$d' = \frac{EE'}{2} - \frac{2c' - r'}{2r'}EE' = \frac{r' - c'}{r'}EE';$$

par suite,

$$\frac{r + c}{r}c = \frac{k}{k'} \times \frac{r' - c'}{r'}c', \quad k'rr'c + k'r'c^2 = krr'c' - krc'^2,$$

$$\frac{k'}{k}r'c + \frac{k'}{kr}r'c^2 = r'c' - c'^2, \quad \left[c' - \left(\frac{k'c}{k} + \frac{k'c^2}{kr}\right)\right]r' = c'^2,$$

et enfin,

$$r' = \frac{c'^2}{c' - \left(\frac{k'c}{k} + \frac{k'c}{k} \times \frac{c}{r}\right)}.$$

On verrait de même que, dans le cas d'une caustique idéale (F. 11),

$$r' = \frac{c'^2}{c' - \left(\frac{k'c}{k} - \frac{k'c}{k} \times \frac{c}{r}\right)}.$$

489. *Lorsque le point lumineux se trouve sur la circonférence séparatrice, le rayon réfracté vaut la troisième proportionnelle d'une certaine longueur et de la demi-corde qu'il forme; cette longueur est l'excès de la même demi-corde sur une quatrième proportionnelle au sinus d'incidence, au sinus de réfraction et au quart du rayon incident.*

Alors, en effet (P. X, F. 12), la distance LE du point rayonnant au point d'incidence est toute la corde du cercle, $r = 2c$, la caustique est idéale, et

$$r' = \frac{c'^2}{c' - \left(\frac{k'}{k}\times\frac{r}{2} - \frac{k'}{k}\times\frac{r}{2}\times\frac{1}{2}\right)} = \frac{c'^2}{c' - \frac{k'}{k}\times\frac{r}{4}}.$$

Mais, le principe suivant rend cette formule inutile.

La caustique par réfraction d'un point de la circonférence séparatrice est la caustique par réflexion due au même point, et à un cercle concentrique, dont le rayon contient l'autre comme le sinus de réfraction contient le sinus d'incidence (475).

Soient LE un rayon incident pour le cercle réfringent A dont le rayon est AE (P. X, F. 12), EF le rayon réfracté, et

$$AE' : AE :: \sin AEG : \sin AEL.$$

Si l'on prolonge FG jusqu'à la circonférence décrite de A, avec AE', le triangle AEE' donne

$$AE' : AE :: \sin AEG : \sin AE'G.$$

Ainsi, l'angle AE'G = AEL = ELI, car le triangle EAL est symétrique, et l'indication de AE'G vaut $\frac{1}{2}$EI ou $\frac{1}{2}$(EI' — II'). Mais cette indication vaut aussi $\frac{1}{2}$(EI' — GH). Par conséquent, GH = II' = LH; le rayon AE' coupe l'arc GL au milieu; les triangles GKE', LKE' sont égaux; il en est de même des angles AE'G, AE'L; le rayon incident LE' du grand cercle se réfléchit selon E'G, et la droite EE' déjà tangente à la caustique par réfraction du petit cercle, l'est aussi à la caustique par réflexion du grand.

Or, on démontrerait de la même manière qu'un rayon infiniment voisin de LE donnerait un rayon réfracté qui se confondrait avec le rayon réfléchi dû à un rayon infiniment voisin de LE'. L'intersection du second rayon réfracté et du premier se confond donc avec celle des deux rayons réfléchis correspondants; les contacts de EE' sur les deux caustiques ne forment qu'un seul point, et ces courbes se trouvent superposées, car ce qui s'est dit du point E se dirait de tout autre point d'incidence pris sur le petit cercle.

490. *Lorsque la caustique par réfraction due à un arc de cercle est un point* (487), *celle du reste de la circonférence se confond avec la caustique par réflexion due à ce reste et au conjugué du point lumineux.*

Faisons l'arc DE = DF (P. VIII, F. 16); la corde EAF' sera symétrique avec la corde FAE' produite par le rayon incident AF; l'arc D'E' vaudra D'F'; les cordes EF, E'F' seront parallèles ou concourront à l'infini; d'après la théorie des transversales *, les cordes EE', FF' auront leur concours au conjugué de A, c'est-à-dire sur la caustique par réfraction due au grand arc IDK, ainsi qu'au point

* Voyez notre *Géométrie appliquée*, troisième édition, p. 105.

rayonnant A, et la sécante FF'B sera le prolongement du rayon réfracté FG qui provient de AF.

Cela posé, considérons le rayon incident AF' du petit arc ID'K. Il donne un rayon réfracté F'G', tel que

$$\sin C''F'G' : \sin CF'A :: \sin CFF' : \sin CFA.$$

Or, l'angle $CF'A = \frac{1}{2}EM = \frac{1}{2}(ED - DM) = \frac{1}{2}(DF - D'F') = \frac{1}{2}(D'N - D'E') = \frac{1}{2}E'N = CFA$. Par conséquent,

$$\sin C''F'G' = \sin CFF', \quad \text{et} \quad C''F'G' = CFF',$$

puisque ces deux angles doivent être tous deux aigus. Mais, le triangle symétrique FCF' rend égaux les angles CFF', CF'F ou C''F'B. Donc,

$$C''F'G' = C''F'B;$$

F'G' est la direction selon laquelle se réfléchirait, sur l'arc ID'K, le rayon BF', émané d'un point lumineux situé en B, et le prolongement de G'F' touche à la fois la caustique par réfraction que produit l'arc ID'K, quand le point rayonnant est en A, et la caustique par réflexion que produit le même arc, quand le point rayonnant est en B.

On verrait de même, en prenant une incidence infiniment peu écartée de F, que le rayon réfracté infiniment voisin de F'G' touche aussi les deux caustiques. Ainsi, l'intersection de ces deux tangentes se trouve sur l'une et l'autre courbe; d'où il suit que

1° *Les deux caustiques se confondent dans toute leur étendue;*

2° *La caustique par réfraction due au cercle entier* C *et au point lumineux* A, *se compose du conjugué* B *de* A *et de la caustique par réflexion qu'un point rayonnant* B *produirait avec le petit arc* ID'K.

La démonstration est analogue pour la figure 17. Remarquant d'abord que les deux angles d'incidence CFA, CF'F sont égaux, on en conclut l'égalité des angles de réfraction CFB, CF'G'; puis on fait voir que CFB, CF'B ont la même indication. Il s'ensuit CF'G' = CF'B, ce qui montre qu'un rayon lumineux BF' se réfléchirait selon F'G'.

PROBL. (*a*) : *Tracer la caustique par réfraction due au plus petit des deux arcs d'un cercle, quand le point rayonnant* A *est au milieu de la corde commune* IK, *et que sa distance* AC *au centre contient le rayon* CD *comme le sinus d'incidence contient le sinus de réfraction* (P. VIII, F. 16).

Menez la tangente de l'une des extrémités de l'arc donné ID'K; puis, tracez la caustique par réflexion due au même arc et à l'intersection B de la tangente avec le prolongement de CA (474, probl.).

PROBL. (*b*) : *Tracer la caustique par réfraction due au plus petit des deux arcs d'un cercle, quand le point rayonnant* A *est au concours des tangentes communes, et que sa distance* AC *au centre* *contient le rayon* CD *comme le sinus d'incidence contient le sinus de réfraction* (P. VIII, F. 17).

Menez la corde IK des contacts; puis, tracez la caustique par réflexion due au petit arc donné ID'K et à l'intersection B de cette corde avec CA (484, probl.).

PROBL. (*c*) : *Tracer la caustique par réfraction due au cercle et à un point rayonnant situé sur la circonférence.*

Cherchez la quatrième proportionnelle d'un sinus d'incidence AB (P. X, F. 12), du sinus de réfraction correspondant AC et du rayon AL du cercle donné; décrivez une circonférence, de A, avec la longueur trouvée AE', et tracez la caustique par réflexion (489) due au nouveau cercle et au même point rayonnant L (484, probl.).

PROBL. (*d*) : *Tracer la caustique par réfraction due au cercle et à un point lumineux dont la position donnée soit autre que les précédentes.*

Tirez plusieurs rayons incidents; déterminez les directions des rayons réfractés correspondants, d'après le rapport connu des sinus d'incidence et de réfraction; appliquez la première ou la seconde des formules du n° 488, selon que les rayons réfractés concourent par eux-mêmes ou par leurs prolongements; portez la longueur r', ainsi trouvée, sur le rayon réfracté employé, à partir de l'incidence, et joignez, par une courbe, tous les points marqués de cette façon.

CYCLOÏDES.

491. Nous n'avons pas à étudier les courbes planes comprises dans le premier ordre de la seconde classe (374), c'est-à-dire celles dont le point générateur parcourt un véhicule courbe et mobile autour d'un point fixe : elles ont si peu d'importance qu'on ne s'en est pas sérieusement occupé jusqu'ici.

Le second ordre n'offre qu'un seul genre, celui des *cycloïdes;* ces lignes sont donc à véhicule courbe et à directrice droite : leur point générateur se meut, d'après une certaine loi, sur le véhicule, tandis que cette courbe glisse le long d'une droite; ou bien, le point reste fixe, pendant que le véhicule roule sur la directrice; ou encore, le mouvement du point et le roulement sont simultanés.

Le mot *cycloïde*, signifiant *forme de cercle*, a pu constituer le nom des courbes dues à un point qui se meut circulairement; mais il n'est entré dans la dénomination des autres lignes du même ordre, qu'en vertu d'une extension fondée sur l'analogie de nature et de mouvement qu'ont leurs véhicules avec celui des premières : rien, en effet, ne dépend du cercle dans la génération des *cycloïdes elliptiques*, produites par le glissement ou le roulement d'une ellipse, ni dans celle des *cycloïdes hyperboliques, paraboliques, cassiniennes, etc.*

Il y a un très-grand nombre d'espèces de cycloïdes, car toute courbe est propre à transporter un point mobile ou fixe, en glissant ou en roulant sur une droite; de toutes ces espèces, nous étudierons seulement celle des cycloïdes dont le véhicule est une circonférence: cette courbe ne donne pas, comme chacune des autres, deux espèces distinctes; en raison de l'uniformité de sa courbure, elle produit toujours la même, soit qu'elle glisse, soit qu'elle roule.

Ce sont les différentes conditions auxquelles peuvent être assujettis les mouvements du point générateur et du véhicule, qui font les variétés de chaque espèce. Que, par exemple, le chemin de ce point sur une circonférence doive toujours égaler celui du cercle le long de la directrice droite, il en résulte *la cycloïde proprement dite;* si le premier surpasse le second, pour un temps quelconque, il y a production d'une *cycloïde raccourcie*, et quand, au contraire, le second surpasse le premier, la cycloïde devient *allongée*.

Tout ce qui va suivre concernera exclusivement la première variété.

CYCLOÏDE.

492. *La cycloïde est engendrée par un point qui parcourt une circonférence, pendant que sa première position parcourt, d'un mouvement pareil, une longueur égale, sur une droite fixe tangente au cercle.*

La cycloïde est aussi la ligne que suit tout point d'une circonférence, pendant qu'elle roule sur une droite fixe.

D'après le premier mode de génération, le contact A de la circonférence C avec la droite AA′ (P. X, F. 13) est la première position du point générateur; pendant que ce point passe en E, le cercle glisse, sur AA′, sans tourner; le contact devient *a*, la droite A*a* égale l'arc *a*E parcouru sur le véhicule, et quand le point E a terminé un tour complet ou qu'il est revenu sur la directrice AA′, le contact se fait en A′, à une distance de A qui vaut la circonférence C.

D'après le second mode, le point générateur a une position fixe sur la circonférence C, et il forme d'abord le contact A de cette courbe avec AA′. Quand le roulement du cercle a placé, sur la directrice, le point *a* du véhicule, le point générateur se trouve dans une position E. Or, il a fallu, pour qu'il en soit ainsi, que tous les points de l'arc E*a* s'appliquassent successivement sur A*a*. On a donc encore $Aa = aE$, et la position du point générateur se trouve la même que dans le premier mode.

Lorsque, par suite du roulement, le cercle C a fait un tour complet sur son centre, le point E forme de nouveau le contact du véhicule et de la directrice. Mais alors, tous les points de la circonférence C se sont successivement appliqués sur cette droite, et le contact se fait encore à une distance de A qui vaut le périmètre du cercle.

Ainsi, les deux modes de génération donnent absolument la même cycloïde, et cela provient bien, comme nous l'avons dit (491), de l'uniformité qu'offre la courbure du cercle, car évidemment une ellipse, glissant par l'une des extrémités de son petit axe, produirait une cycloïde moins élevée que celle qui serait due au roulement de la même courbe.

493. *La cycloïde est une courbe infinie, composée d'arcs égaux qui sont tous du même côté de la directrice et s'y terminent, en se touchant deux à deux, de manière à former des rebroussements de première espèce.*

Il résulte de la génération (492) que, parvenus en A′ (P. X, F. 13), le véhicule et le point générateur se retrouveront dans les mêmes circonstances qu'au point A, et qu'en continuant leurs mouvements, ils doivent produire un arc A′B′A″ parfaitement égal à l'arc ABA′, puis un troisième, puis un quatrième, etc.

Mais rien n'oblige à placer en A l'origine des mouvements; on peut les faire commencer avant ce point, à une distance qui soit un multiple quelconque de AA′, qui soit même infiniment grande; par conséquent, la cycloïde .....ABA′B′A″..... se compose d'une suite infinie d'arcs égaux; et puisque le véhicule reste toujours tangent à la directrice, le point générateur ne peut la couper, ou bien tous les arcs se trouvent nécessairement du même côté, par rapport à cette droite. Il est d'ailleurs visible qu'ils y commencent et s'y terminent.

En outre, deux arcs consécutifs ABA′, A′B′A″ se touchent en leur point commun A′. Cela est vrai, si la droite A′F, perpendiculaire à la directrice, touche chaque arc, ou si le point générateur ne peut avoir que la position A′ sur A′F. Supposons qu'il en prenne une seconde F, aussi près qu'on voudra de la première. Le contact du véhicule se ferait alors en a', par exemple, et a'F serait corde de la circonférence. Or, l'oblique a'F surpasserait la perpendiculaire a'A′; l'arc de cercle a'F aurait plus de longueur encore, et le chemin fait par le point générateur n'égalerait pas celui du véhicule, pour le même temps, ce qui se trouverait contraire à la définition de la cycloïde (492).

On verrait de même que l'arc ABA′ ne peut pas non plus avoir deux de ses points sur AF.

Application : Chaque point, chaque clou des bandes d'une roue de voiture, roulant sur un plan, selon une direction constante, décrit, dans l'air, une portion de cycloïde qui commence au départ et finit à l'arrivée.

494. Nous ne considérerons, dans le reste de notre étude, qu'un seul des arcs soutendus par la directrice, et selon l'usage, nous l'appellerons *cycloïde*. Ce qui se dira d'un tel arc conviendra évidemment à tous ses égaux.

La corde AB qui limite une cycloïde ACB en est la *base* (P. X,

F. 14); la perpendiculaire CD au milieu de AB forme l'axe de la courbe, et l'intersection C se nomme *sommet.*

La base d'une cycloïde égale la circonférence du véhicule, et l'axe vaut le diamètre; de sorte que dans toute cycloïde le rapport de la base à l'axe est à peu près $\frac{22}{7}$, *ou* 3,1416, *approximation plus grande encore.*

Le premier principe résulte de la définition de la base et de celle de la cycloïde (492).

Quant au second, il est clair qu'au moment où le contact du véhicule se fait au milieu de AB, ce cercle a parcouru, en glissant, la moitié du chemin qui répond à un tour entier du point générateur. Le trajet fait par ce point vaut donc alors une demi-circonférence, et puisque, au départ, le même point était en D, il doit se trouver à l'extrémité C du diamètre CD, lorsque le véhicule arrive au milieu de AB. Ainsi, la perpendiculaire élevée au milieu de la base, jusqu'à la cycloïde, égale bien le diamètre.

Reste à démontrer que CD est un axe. Or, la génération pourrait commencer en B aussi bien qu'en A; le point générateur arriverait encore en C, lorsque le véhicule aurait parcouru, en glissant, la moitié BD de la base, et l'arc BC de la cycloïde serait produit absolument de la même manière que l'a été l'arc AC. Par conséquent, ces deux arcs sont égaux et placés symétriquement par rapport à CD; d'où il suit que cette droite coupe d'équerre et au milieu toute corde parallèle à la base (5).

495. *Toutes les cycloïdes sont semblables.*

D'abord, la base et l'axe de chacune sont proportionnels à la base et à l'axe de toute autre (494), ou bien le rapport des bases de deux quelconques égale celui des axes. Si donc nous faisons voir que ce rapport est aussi celui des cordes correspondantes, il sera démontré que la plus petite des deux courbes forme la copie réduite de la plus grande.

Plaçons la base de la première sur celle de la seconde, de manière que deux extrémités correspondantes se confondent en A (P. X, F. 15), et soient E, *e* les positions des points générateurs, quand les véhicules, après avoir parcouru la même fraction des bases AB, A*b*, les touchent en F, *f*. Cette dernière hypothèse donne

$$AF : Af :: AB : Ab,$$

et la première rend respectivement égaux à AF, A*f*, les plus petits des arcs soutendus, dans les deux circonférences, par EF, *ef*. Conséquemment, ces arcs ont aussi même rapport que AB, A*b*; ils forment la même fraction des circonférences auxquelles ils appartiennent, puisque ces circonférences égalent les bases des cycloïdes (494); ils renferment le même nombre de degrés; leurs cordes sont proportionnelles aux rayons, aux circonférences;

$$EF : ef :: AB : Ab,$$

et comme en outre, ces cordes font des angles égaux avec AB, tangente commune aux véhicules, les triangles AFE, Afe sont semblables, ce qui donne la même direction aux cordes AE, Ae, et fournit la suite de rapport égaux

$$AE : Ae :: AF : Af :: EF : ef :: AB : Ab.$$

Donc aussi, les triangles ABE, Abe sont semblables, et

$$BE : be :: AB : Ab.$$

Marquons maintenant les points E', e', symétriques de E, e. La corde BE' et l'angle ABE' égaleront AE, BAE; la corde be' et l'angle Abe' égaleront Ae, bAe; par suite, les triangles BEE', bee' seront semblables, et nous aurons

$$EE' : ee' :: BE : be :: AB : Ab.$$

D'ailleurs, toute couple de points correspondants, autres que E, e, donnerait évidemment les mêmes relations.

496. *Deux cycloïdes sont égales, quand il y a égalité entre leurs bases et entre leurs axes.*

La superposition des bases et des axes peut avoir lieu, et comme les deux courbes sont semblables, en vertu de leur nature même (495), l'une couvrira l'autre exactement.

Probl. (*a*): *Tracer, d'un mouvement continu, une cycloïde dont l'axe est donné.*

On emploie un instrument appelé *roulette*. Il présente deux règles EF, $E'F'$ parallèles (P. X, F. 16) et liées, à leurs extrémités, par deux talons qui, appliqués sur le tableau, les en tiennent un peu écartées; tangentiellement aux règles et entre elles, roule le moyeu G d'une roue, dont les rais et l'anneau tournent dans l'intervalle dû à la saillie des talons; un de ces rais a, dans le sens de sa longueur, une mortaise à jour où, à l'aide d'une vis de pression, se fixe un crayon H, une pointe traçante, qui dépasse l'épaisseur du rai en-dessous seulement.

Placez le moyeu contre le talon de gauche; mettez entre son axe et le crayon une distance égale à la moitié de l'axe donné; établissez l'instrument de manière que les règles soient parallèles à la directrice AB, et que le milieu de leur intervalle, marqué sur les talons, se trouve, aux deux bouts, à une distance de AB qui vaille aussi la moitié de l'axe donné; amenez alors la pointe du crayon sur AB; puis, faites tourner la roue de gauche à droite. La pointe H tracera la cycloïde ACB (F. 14), si la distance des talons, diminuée du diamètre du moyeu, égale au moins la base AB ou la circonférence dont GH serait le rayon (492).

Mais supposons que la longueur des règles permette seulement de tracer l'arc ACI; il suffit, pour achever, de faire rétrograder le moyeu vers le talon de gauche; de rapprocher ce talon du point I, en plaçant l'instrument comme tout-à-l'heure; de ramener la pointe du crayon sur ce même point I, et de faire tourner encore la roue de gauche à droite.

PROBL. (*b*): *Tracer, d'un mouvement continu, une cycloïde dont la base est donnée.*

Mesurez la base en millimètres, puis divisez, par le double de 3,1416, la longueur trouvée; vous aurez le rayon d'une circonférence égale à cette base, et ce rayon sera précisément la distance GH (P. X, F. 16) à mettre entre le crayon et l'axe du moyeu, pour pouvoir opérer comme dans le problème précédent (494).

PROBL. (*c*): *Tracer, par points, une cycloïde dont l'axe est donné.*

Solution 1: Décrivez une circonférence dont l'axe donné CD soit diamètre (P. X, F. 14); partagez cette courbe en vingt-deux parties égales; portez-en onze de chaque côté du point D, sur ADB, perpendiculaire à CD; numérotez les points de division de AB, en allant de A et de B vers D; numérotez ceux de la circonférence, en allant de C vers D, de chaque côté de l'axe, et tirez, par ces derniers, des parallèles à AB.

Ces préparatifs terminés, vous trouverez, par exemple, les points K, K′ de la cycloïde, en portant A.VI sur la parallèle 6.6′, à l'extérieur du cercle et à partir des points 6, 6′; vous obtiendrez les points L, L′, en prenant, sur 7.7′, les parties 7.L, 7′.L′ égales à A.VII; ainsi des autres. Alors, il ne vous restera plus qu'à unir, par une courbe, le sommet C, les extrémités A, B de la base et les vingt points marqués sur les parallèles.

Démonstration: La circonférence décrite vaut celle du véhicule, puisque l'axe de la cycloïde en est un diamètre (494), et la droite AB forme la base de la même courbe, puisqu'elle égale cette circonférence.

Faisons glisser le cercle CD sur AB et de droite à gauche, jusqu'à ce que le point 6 soit sur la cycloïde, supposée tracée; ce point, ayant parcouru une parallèle à AB, se confondra avec K, et le contact D s'arrêtera, par exemple, en D′. Or, cette position D′ est celle du contact qu'a le véhicule avec la directrice, quand le point générateur se trouve sur K. Par conséquent (492), AD′ vaut l'arc D′K ou D.6 l'égal de D′K. Mais D.6 contient cinq des parties de la circonférence. Donc, AD′ comprend cinq des parties de AB, DD′ en renferme six, et comme le glissement du cercle a rendu DD′ égale à 6.K, cette partie de la parallèle 6.6′ est effectivement de même longueur que A.VI.

Solution 2: Faites les opérations préparatoires de la solution précédente; puis, des points I, II, III, IV, etc., avec les cordes D.10, D.9, D.8, D.7, etc., décrivez de petits arcs qui coupent, à gauche de leurs centres respectifs, les parallèles 10.10′, 9.9′, 8.8′, 7.7′, etc.; les intersections seront des points de la cycloïde. Leurs symétriques s'obtiendront de la même manière, si ce n'est que les petits arcs devront couper les parallèles à droite de leurs centres.

respectifs; ou bien, vous marquerez ces points symétriques en prenant, par exemple, les parties 6'.K', 7'.L' égales à 6.K, 7.L.

Démonstration : Supposons à la division V le contact du véhicule et de la directrice AB; le point générateur sera en un lieu K, tel que l'arc V.K vaudra A.V. Mais A.V égale l'arc D.6. Par conséquent, les arcs V.K, D.6 sont égaux, et la distance de K à V est effectivement la corde de l'arc D.6. D'ailleurs, les cordes V.K, D.6, faisant des angles égaux avec la tangente commune AB de leurs arcs, sont parallèles; par suite, il y a aussi parallélisme entre 6.K et D.V ou AB. Donc enfin, le point K est bien l'intersection de 6.6' et de l'arc décrit de V, avec la corde de l'arc D.6.

PROBL. (*d*): *Tracer, par points, une cycloïde dont la base est donnée.*

Elevez une perpendiculaire indéfinie DC au milieu de la base donnée AB (P. X, F. 14); partagez la moitié AD en onze parties égales; portez-en sept sur DC, à partir de D; vous marquerez ainsi le sommet C de la cycloïde; car la circonférence dont CD sera diamètre vaudra vingt-deux des parties de AD, à peu près, elle égalera AB et sera celle du véhicule (494). Vous pourrez donc appliquer l'une ou l'autre des solutions du problème (*c*).

PROBL. (*e*): *Tracer une cycloïde dont on connaît l'une des extrémités, un autre point quelconque et la direction de la base.*

Solution 1 : A partir de l'extrémité donnée A (P. X, F. 15), prenez, sur la direction AG de la base, une longueur quelconque A*b*; tracez une cycloïde A*cb* qui ait cette longueur pour base; joignez à A l'autre point donné E; la droite AE coupera la courbe A*cb* au point correspondant *e* de E, et si vous menez, par ce dernier point, une parallèle EB à *eb*, son intersection avec AG limitera la base AB de la cycloïde demandée (495), ce qui permettra de tracer cette courbe, en appliquant le problème (*b*) ou le problème (*d*).

Solution 2 : Tracez la cycloïde auxiliaire A*cb* et la droite AE; menez de E une parallèle à *ed*; son intersection D avec AG sera le pied de l'axe de la cycloïde demandée (495). Si donc vous tirez DH parallèlement à *dc*, son intersection C avec le prolongement de A*c* limitera l'axe CD, et vous pourrez appliquer le problème (*a*) ou le problème (*c*).

Solution 3 : Tracez la cycloïde auxiliaire A*cb*; déterminez la base AB; tirez indéfiniment la corde A*e'*; menez de B une parallèle à *be'*; son intersection E' avec le prolongement de A*e'* sera sur la cycloïde demandée (495), et vous pourrez, de la même manière, en marquer tous les points dont vous aurez besoin.

Solution 4 : Tracez la cycloïde auxiliaire A*cb*; déterminez l'axe CD; menez par les extrémités des parallèles à *ce'*, *de'*; leur intersection E' sera sur la cycloïde demandée (495), et vous pourrez, de la même manière, en marquer beaucoup d'autres points.

Probl. (f) : *Tracer une cycloïde dont on connaît un point quelconque, la direction de l'axe et son pied.*

Solution 1 : Elevez, au pied donné D (P. X, F. 15), une perpendiculaire indéfinie Gf, sur la direction DH de l'axe ; marquez, sur Gf, deux points a', b', à des distances quelconques, mais égales de D ; tracez une cycloïde $a'c'b'$ qui ait $a'b'$ pour base ; joignez D à l'autre point donné E ; la droite DE coupera la courbe $a'c'b'$ au point correspondant e'' de E, et si vous menez, par ce dernier point, des parallèles EA, EB à $e''a'$, $e''b'$, leurs intersections avec Gf limiteront la base AB de la cycloïde demandée (495). Il ne s'agira donc plus alors que d'appliquer le problème (b) ou le problème (d).

Solution 2 : Tracez la cycloïde auxiliaire $a'c'b'$ et la droite DE ; puis, menez de E une parallèle à $e''c'$; son intersection C avec DH limitera l'axe CD de la cycloïde demandée (495). Vous pourrez donc appliquer le problème (a) ou le problème (c).

Solution 3 : Tracez la cycloïde auxiliaire $a'c'b'$; déterminez la base AB ; tirez les cordes $a'e'''$, $b'e'''$, et par A, B, des parallèles AE', BE' à ces droites ; l'intersection E' sera sur la cycloïde demandée (495), et vous pourrez, de la même manière, en marquer tous les points qui vous seront nécessaires.

Solution 4 : Tracez la cycloïde auxiliaire $a'c'b'$; déterminez l'axe CD ; tirez le rayon quelconque De''' ; menez de C une parallèle à $c'e'''$; son intersection E' avec le prolongement de De''' sera sur la cycloïde demandée (495), et vous pourrez, de la même manière, en marquer tous les points nécessaires au tracé.

497. *La normale d'un point quelconque de la cycloïde passe par le contact correspondant du véhicule avec la base.*

Soit D' le contact du véhicule circulaire avec la base AB de la cycloïde (P. X, F. 14), au moment où le point générateur se trouve en K. Pour deux points k, k' infiniment proches de K, les contacts du véhicule se feront en des points infiniment peu éloignés de D', et il n'y aura qu'une différence infiniment petite entre D'K et les distances de k, k' aux contacts correspondants. L'arc de cercle élémentaire qui, décrit de D', contiendra K, se confondra donc avec l'élément kKk' de la cycloïde, et les normales aux points milieux de ces deux éléments auront la même direction. Or, celle de l'arc de cercle est le rayon D'K ; donc, celle du point K de la cycloïde passe par le contact correspondant D'.

498. *Les tangentes aux extrémités d'une cycloïde sont d'équerre sur la base, et la tangente au sommet est parallèle à cette même droite.*

Le premier principe a été démontré dans le n° 493. Le second tient à ce que le sommet C (P. X, F. 14), étant la position du point générateur au moment où le véhicule touche la base à l'autre extrémité D de l'axe (492), a cet axe même pour normale (497) ;

car il résulte de là que la base AB et la tangente en C sont toutes deux perpendiculaires à CD.

499. *La demi-cycloïde a pour développée une demi-cycloïde égale, que sa base touche au sommet, par son extrémité opposée au pied de l'axe.*

Considérons le véhicule dans la position où il touche la base AB au point E (P. X, F. 17); prolongeons le diamètre FE qui aboutit au contact; décrivons, d'un point G′ pris sur le prolongement, un cercle égal au véhicule G, qui le touche en E; tirons la corde qui joint E à la position correspondante H du point générateur, et prolongeons cette corde jusqu'à sa seconde intersection H′ avec la circonférence G′. Nous aurons formé ainsi les deux triangles rectangles et égaux EHF, EH′F′. Donc, l'arc EH′ vaut l'arc EH ou la droite AE (492), et comme la demi-circonférence EHF ou EH′F′ égale la demi-base AD, l'arc F′H′ a même longueur que DE ou B′F′. Ainsi, le point H′ appartient à la cycloïde qui aurait le cercle G′ pour véhicule et sa base sur B′F′, parallèle à AD. Mais, la moitié de cette base valant celle de la circonférence G′, égale AD = B′D′, si AD′ est parallèle à DB′. Conséquemment, AD′, qui a même longueur que le diamètre EF′, est l'axe de la cycloïde sur laquelle se trouve H′; cette cycloïde a son sommet en A; AD, parallèle à la demi-base B′D′, la touche à ce sommet (498); enfin, la demi-cycloïde B′H′A égale la demi-cycloïde AHC, puisqu'il y a égalité entre les bases et les axes des deux cycloïdes entières (496).

Il suffit d'ajouter que F′H′ est normale en H′ (497), pour qu'on voie que HH′, normale de AHC, forme la tangente de B′H′A au même point H′, et pour en conclure qu'effectivement AH′B′ est la développée de AHC (12); car tout ce qui s'est dit de la position G du véhicule se dirait évidemment de toute autre.

500. *Le rayon de courbure pour un point quelconque de la cycloïde est double de la normale en ce point, prise de l'incidence à la base.*

Le rayon de courbure du point H (P. X, F. 17) est la droite HH′, tangente à la développée (20, probl.), et la démonstration précédente fait voir que HH′ se trouve double de la normale HE, prise de l'incidence H à la base AB.

501. *Le rayon de courbure pour le sommet de la cycloïde vaut le double de l'axe, et celui de chaque extrémité de la courbe est nul.*

L'axe est la partie de la normale du sommet comprise entre l'incidence et la base (497 et 500).

La base est normale aux extrémités de la courbe, et comme elles se trouvent sur cette base, la moitié du rayon de courbure est nulle.

Probl. (*a*) : *Tracer la développée d'une demi-cycloïde donnée.*

De différents points K, L, ... B, pris sur l'autre moitié BKC (P. X, F. 17), tirez des parallèles à la corde AC de la demi-cycloïde donnée AHC; portez cette corde sur ses parallèles, de K en M, de L en N, etc., et de B en B'; puis unissez les points A, M, N, ... B'; ce tricage donnera une courbe AMB' égale à CKB, placée par rapport à AB, comme CKB l'est relativement à la tangente de sommet C, et par conséquent (499), AMB' sera la développée de AHC.

Probl. (*b*) : *Tracer une droite qui soit normale à la cycloïde, en un point marqué sur la courbe.*

Menez, par l'incidence K donnée, une parallèle à la base AB (P. X, F. 14), et prolongez-la jusqu'à son intersection 6 avec la circonférence dont l'axe CD est diamètre; puis, menez, du même point K, une parallèle à 6.D. Cette dernière parallèle KD' sera la normale demandée.

Démonstration : Faisons glisser sur AB le cercle CD, jusqu'à ce que le point 6 coïncide avec un de ceux de l'arc AKC. Tous les points de ce cercle suivront des parallèles à AB, pendant le mouvement, et y parcourront des longueurs égales. En conséquence, le point 6 arrivera sur K au même instant où le contact D sera en un point D', tel que DD' égalera 6.K, et la nouvelle position KD' de 6.D se trouvera parallèle à la première. Mais alors KD' est normale en K (497). Donc, la parallèle à 6.D, menée par K, est bien la normale cherchée.

Probl. (*c*) : *Mener une normale à la cycloïde, par un point donné hors de la courbe.*

Soit I le point donné (P. X, F. 17). Tracez la développée AMB' de la demi-cycloïde AHC; appliquez l'arête d'une bonne règle contre I, tangentiellement à AMB'; la droite IE, tirée le long de cette arête, sera la normale demandée (13).

Probl. (*d*): *Mener une tangente à la cycloïde, par un point marqué sur la courbe.*

Tirez, du point donné K (P. X, F. 14), une parallèle à la base, jusqu'à son intersection 6 avec la circonférence dont l'axe CD est diamètre, puis une parallèle à 6.C; cette dernière KM sera la tangente demandée.

Démonstration : La corde 6.D est parallèle à la normale en K, d'après ce qui a été dit dans le problème (*b*). Donc, la corde 6.C, perpendiculaire à 6.D, doit être parallèle à la tangente du même point K.

Probl. (*e*) : *Déterminer le centre et le rayon de courbure de la cycloïde, en un point assigné.*

Tracez la normale du point donné H (P. X, F. 17), en la prolongeant au-delà de la base AB; puis, portez la partie EH, comprise entre cette base et la courbe, sur l'autre partie, de E en H'; le point H' sera le centre de courbure et H'H le rayon (500).

Applications : I. La cycloïde est propre à former le cintre des voûtes surbaissées. Elle convient même mieux que l'ellipse, dans certains cas, exerçant moins de poussée sur les piédroits. En effet, les distances de A aux pieds des normales de la demi-cycloïde AKC (P. X, F. 14) vont en augmentant graduellement, de zéro à la moitié AD de la base (497). Dans le quart correspondant de l'ellipse qui aurait AB pour grand axe et CD pour demi-petit axe, aucune normale ne couperait AB entre A et le foyer voisin (71). Les normales de la première courbe sont donc généralement moins inclinées que celles de la seconde, pour des points situés à la même distance de AB, ou bien elles font de moindres angles avec la direction verticale des poids supportés par ces points. En conséquence, une plus grande partie de chaque poids agit selon la normale de la cycloïde, et une moindre, selon la tangente. Or, c'est de celle-ci que vient la poussée contre les piédroits (p. 231, appl. I).

Mais, le cintre elliptique peut être employé, quel que soit le rapport de la largeur à la hauteur sous clef, tandis que le cintre cycloïdal (494) exige que ce rapport soit 3,1416 ou au plus $\frac{22}{7}$.

La cycloïde peut servir aussi pour les voûtes surhaussées. Dans ce cas, le cintre se forme de l'accollement des deux moitiés de la courbe, fait de manière que les demi-bases BD, AD se confondent; la largeur est double de l'axe CD, la hauteur sous clef égale la moitié AD de la base; de sorte que ces deux dimensions de la voûte doivent être entre elles comme 14 et 11. Du reste, les deux parties du cintre se raccordent fort bien au point culminant, puisque les tangentes en A et en B, perpendiculaires à AB (498), deviennent toutes deux horizontales.

II. Un corps, astreint à suivre un chemin incliné, descend dans le moins de temps possible d'une hauteur donnée, s'il glisse ou roule sur un arc de cycloïde tel que les distances de ses extrémités à la base diffèrent d'une quantité égale à cette hauteur. Par exemple, le corps qui suivrait la demi-cycloïde AEC (P. X, F. 18) mettrait moins de temps pour aller de A en C, c'est-à-dire pour descendre d'une hauteur DC ou AC', par un chemin différent de la verticale, qu'en suivant toute autre courbe AFC, AF'C et même la droite AC. C'est pour indiquer cette remarquable propriété, qu'on appelle parfois la cycloïde *courbe de plus vite descente*, et que les anciens lui ont donné le nom de *brachystochrone*, qui signifie *temps très-court*.

Nous considérerons, dans la démonstration, le point A et le sommet C comme les extrémités d'un arc quelconque AEC de la cycloïde et d'un arc AFC d'une autre courbe arbitraire, afin d'embrasser les cas, où pour une descente verticale moindre que l'axe DC, on emploierait un arc EE' de cycloïde qui ne se terminerait ni au sommet, ni à la base.

Supposons l'arc AEC partagé en éléments E*e*, etc., par ses normales AD, ... EG, eG, ... CD ; l'arc AFC sera aussi partagé en éléments Ff, etc., par les mêmes droites, et si nous faisons voir que le temps employé à parcourir une quelconque Ee des premières parties est surpassé par le temps nécessaire au parcours de la partie correspondante Ff, il sera démontré qu'en effet la durée de la descente sur AEC est inférieure à celle de la descente par AFC.

Mais, au lieu de l'élément Ff, on peut considérer l'arc de cercle Ff', décrit du concours G des deux normales EG, eG ; car cet arc, étant d'équerre sur le rayon Gf', rend rectangle le triangle $Ff'f$, dont les côtés courbes, infiniment petits, peuvent être regardés comme des droites ; l'hypothénuse Ff est plus longue que Ff', et si nous trouvons le temps pour Ee, $t < t'$, temps pour Ff', à plus forte raison t sera-t-il surpassé par le temps pour Ff.

La vitesse qu'a en E le corps parti de A, étant due à la hauteur HE, vaut $\sqrt{2g \times \text{HE}}$; celle qu'aurait en F le même corps, aussi parti de A, est $\sqrt{2g \times \text{IF}}$. Or, les arcs infiniment petits Ee, Ff' peuvent être censés parcourus d'un mouvement uniforme, bien qu'au fond le corps s'y trouve sollicité par une force accélératrice, qui provient de la gravité. En conséquence,

$$Ee = t\sqrt{2g \times \text{HE}}, \quad Ff' = t'\sqrt{2g \times \text{IF}},$$

et

$$t : t' :: \frac{Ee}{\sqrt{2g}\sqrt{\text{HE}}} : \frac{Ff'}{\sqrt{2g}\sqrt{\text{IF}}} :: \frac{Ee}{\sqrt{\text{HE}}} : \frac{Ff'}{\sqrt{\text{IF}}}.$$

Prenons sur FK, parallèle à EH, une partie FL, telle qu'on ait HE : FK :: FK : FL. Il en résultera $\text{FK} = \sqrt{\text{HE} \times \text{FL}}$, et nous pourrons écrire la proportion

$$\text{HE} : \text{FK} :: \sqrt{\text{HE} \times \text{FL}} : \text{FL} \quad \text{ou} \quad \text{HE} : \text{FK} :: \sqrt{\text{HE}} : \sqrt{\text{FL}}.$$

Mais, $Ee : Ff' ::$ EG : FG :: HE : FK. Donc,

$$Ee : Ff' :: \sqrt{\text{HE}} : \sqrt{\text{FL}}, \qquad t : t' :: \frac{\sqrt{\text{HE}}}{\sqrt{\text{HE}}} : \frac{\sqrt{\text{FL}}}{\sqrt{\text{IF}}} :: \sqrt{\text{IF}} : \sqrt{\text{FL}}.$$

Il ne nous reste plus qu'à établir la relation IF < FL. Or, de $\text{EM} - \text{FM} > 0$, résulte

$$\overline{\text{EM}}^2 - 2\text{EM} \times \text{FM} + \overline{\text{FM}}^2 > 0, \quad \overline{\text{EM}}^2 + \overline{\text{FM}}^2 > 2\text{EM} \times \text{FM},$$
$$\overline{\text{EM}}^2 + 2\text{EM} \times \text{FM} + \overline{\text{FM}}^2 > 4\text{EM} \times \text{FM},$$

et parce que EM = MG (500),

$$(\text{MG} + \text{FM})^2 > 2\text{EM} \times 2\text{FM}, \quad \overline{\text{FG}}^2 > \text{EG} \times 2\text{FM}.$$

Comme d'ailleurs IN, parallèle à GH, donne FM = MN, on a

$$\overline{\text{FG}}^2 > \text{EG} \times \text{FN} \quad \text{et} \quad \frac{\text{FG}}{\text{FN}} > \frac{\text{EG}}{\text{FG}}.$$

Mais $\frac{FG}{FN} = \frac{FK}{IF}$, $\frac{EG}{FG} = \frac{HE}{FK} = \frac{FK}{FL}$; par conséquent enfin,

$$\frac{FK}{IF} > \frac{FK}{FL},$$

ce qui rend $IF < FL$.

La démonstration pour la courbe AF′C serait analogue; seulement la dernière partie devrait être basée sur la relation $F'M - EM > 0$.

502. *Tout arc de cycloïde terminé au sommet est double de la corde qui soutend l'arc correspondant du véhicule.*

L'arc AMH′ vaut HH′ (P. X, F. 17), puisque tous les éléments de cette droite sont ceux de l'arc mis bout à bout (499). Or (500), $HH' = 2EH'$, et l'arc du cercle G′ soutendu par EH′ correspond bien à AMH′, car le point générateur, devant parcourir la demi-circonférence F′H′E pour produire B′MA, et ayant déjà parcouru l'arc F′H′, pour produire B′H′, tracera H′MA en parcourant l'arc de cercle H′E.

503. *La demi-cycloïde est double de l'axe, et la cycloïde entière en forme le quadruple.*

L'arc du véhicule qui correspond à la demi-cycloïde est la demi-circonférence (492), et la corde de cet arc, ou le diamètre vaut l'axe (494). Donc (502),

$$AHC = 2CD, \quad AHCKB = 2 \times 2CD = 4CD.$$

504. *Tout arc de cycloïde terminé à la base égale quatre fois le sinus verse du demi-arc qui lui correspond sur le véhicule.*

En effet (503 et 502), $AH = AHC - CH = 2CD - 2FH$ (P. X, F. 17), et si nous tirons HH″, parallèle à la base, jusqu'au cercle dont l'axe est diamètre, $AH = 2CD - 2CH''$.

Soit O le milieu de l'arc DH″, qui vaut EH et correspond à AH. La perpendiculaire OP, abaissée sur CD, étant le sinus de DO, égale $\frac{1}{2}DH''$; $DP = \text{sin. verse}\,DO$; l'angle $DG''O = DCH''$; les triangles rectangles G″PO, CH″D sont semblables;

$$OP : DH'' :: G''P : CH''; \quad G''P = \tfrac{1}{2}CH'',$$

et par conséquent,

$$AH = 2CD - 4G''P = 4(G''D - G''P) = 4DP.$$

505. *Tout arc de cycloïde terminé au sommet est moyen proportionnel entre l'axe et le quadruple de sa projection sur cet axe.*

L'arc $CH = 2CH''$ (P. X, F. 17), si HH″Q est parallèle à AB (502). Mais $CD : CH'' :: CH'' : CQ$ et $\overline{CH''}^2 = CQ \times CD$. Donc

$$\overline{CH}^2 = 4\overline{CH''}^2 = 4CQ \times CD, \quad \text{ou bien} \quad 4CQ : CH :: CH : CD.$$

Or, CQ est la projection de CH sur l'axe de la cycloïde.

506. *Les quarrés numériques de deux arcs de cycloïde terminés au sommet sont proportionnels aux projections de ces arcs sur l'axe.*

D'après le principe précédent, $\overline{CH}^2 = 4CQ \cdot CD$ (P. X, F. 17), $\overline{CK}^2 = 4CR \times CD$. En conséquence,

$$\overline{CH}^2 : \overline{CK}^2 :: CQ : CR.$$

Probl. (*a*) : *Mesurer un arc de cycloïde terminé au sommet.*

Menez, par l'autre extrémité de l'arc donné CH (P. X, F. 17), une parallèle HH″ à la base, jusqu'au cercle dont l'axe est diamètre; tirez la corde CH″ et doublez-la (502).

Probl. (*b*) : *Mesurer un arc de cycloïde terminé à la base.*

Solution 1 : Menez, par l'autre extrémité de l'arc donné AH (P. X, F. 17), une parallèle HH″ à la base, jusqu'au cercle dont l'axe est diamètre; tirez la corde CH″; retranchez-la de CD, et doublez le reste.

Démonstration : D'après les n^os 503 et 502, l'arc

$$AH = AHC - HC = 2CD - 2CH'' = 2(CD - CH'').$$

Solution 2 : Déterminez le milieu O de l'arc DH″; abaissez, sur l'axe, la perpendiculaire OP, et quadruplez DP (504).

Probl. (*c*) : *Mesurer un arc de cycloïde séparé du sommet et de la base.*

Solution 1 : Mesurez les arcs CK, CL (P. X, F. 17), compris entre le sommet et les extrémités de l'arc donné KL; puis prenez la différence des deux longueurs obtenues.

Solution 2 : Mesurez les arcs BK, BL, compris entre la base et les extrémités de l'arc donné KL; puis retranchez l'une de l'autre les deux longueurs trouvées.

Applications : I. La cycloïde est aussi la *courbe des chutes de même durée*, ce qui l'a fait nommer *tautochrone* (même temps) et *isochrone* (temps égal). Que, par exemple, deux corps, complètement égaux, partent ensemble, l'un de B (P. X, F. 18), l'autre d'un point quelconque E′, ils arriveront au sommet C dans le même instant; de plus, en vertu des forces vives acquises, ils remonteront sur l'autre moitié de la cycloïde, et dans un temps égal à celui des descentes, le premier atteindra le point A, le second le point E″, la droite E′E″ étant horizontale comme AB. Aucune autre courbe plane ne jouit de cette belle propriété.

Partageons les arcs BC, E′C en un même nombre d'éléments. Si nous établissons l'égalité des temps t, t' employés à parcourir E*e*, O*o*, deux quelconques de ces éléments, qui aient le même rang, elle le sera pour tout autre couple; la somme des temps relatifs à l'ensemble des infiniment petites parties de EC vaudra celle des temps relatifs à l'ensemble des infiniment petites parties de BC, ou bien le temps nécessaire au parcours entier du premier arc égalera celui qu'exigera le parcours entier du second.

Nous avons d'abord, comme dans l'application II de la page 384,

$$t : t' :: \frac{Ee}{\sqrt{H'E}} : \frac{Oo}{\sqrt{PO}}.$$

Il suffit donc de faire voir que le second rapport égale l'unité ou qu'on a aussi

$$Ee : \sqrt{H'E} :: Oo : \sqrt{PO},$$

proportion qui revient à cette autre

$$\overline{Ee}^2 : \overline{Oo}^2 :: H'E : PO.$$

Selon le principe 506,

$$\overline{E'C}^2 : \overline{BC}^2 :: QC : DC.$$

Mais $E'C : BC :: Ee : Oo :: E'E : BO :: CE : CO$, et $\overline{CE}^2 : \overline{CO}^2 :: CR : CS$. Par conséquent,

$$QC : DC :: CR : CS, \quad QC-CR : DC-CS :: QC : DC,$$

$$QR : DS :: \overline{E'C}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{Ee}^2 : \overline{Oo}^2,$$

ou bien

$$\overline{Ee}^2 : \overline{Oo}^2 :: H'E : PO.$$

II. Les horloges avancent dans l'hiver, parce que le balancier, se raccourcissant, fait, en moins de temps, chacune de ses oscillations, dont l'angle est invariable; elles retardent dans l'été, parce que le balancier, s'allongeant, emploie plus de temps pour chaque mouvement oscillatoire. Il y aurait donc grande amélioration à donner au balancier une disposition telle que, malgré les variations de sa longueur, il eût toujours des oscillations de même durée: l'aiguille des minutes ferait chaque tour de cadran dans le même temps, et l'heure ne serait jamais ni plus courte, ni plus longue. Eh bien! la cycloïde semble permettre cette disposition: renversez la figure 17 (P. X); fixez au point B' deux lames métalliques, en les courbant selon les demi-cycloïdes B'MA, B'M'B, et laissant libres leurs extrémités A, B; attachez un fil, égal à B'C, d'un bout au même point B', de l'autre au centre de la lentille du balancier. Quand cette lentille oscillera d'un angle donné, le fil enveloppera une partie de la lame B'MA, pendant la demi-oscillation de gauche, une partie de la lame B'M'B, pendant la demi-oscillation de droite, et le point C parcourra un arc de la cycloïde ACB, dans chaque oscillation complète (499). Si le fil s'alonge ou se raccourcit, le centre de la lentille ne sera plus en C, mais ce point du fil ou de son prolongement n'en continuera pas moins de se mouvoir sur la courbe ACB, et quoiqu'il n'en parcourre plus le même arc, ses oscillations auront encore la même durée (appl. I). Donc, la lentille, qui décrira une cycloïde semblable à ACB (495), fera aussi ses nouvelles oscillations dans le temps qu'exigeaient les autres.

Mais, l'idée est bien moins utile qu'ingénieuse, car les variations de la température altéreraient la forme cycloïdale des lames métalliques, et dès-lors l'isochronisme n'aurait plus lieu.

Les horloges ne laissent pas toutefois de devoir un notable perfectionnement à la découverte du tautochronisme de la cycloïde. Seulement, au lieu de décrire un arc de cette courbe, la lentille oscille sur un arc de deux à trois degrés du cercle osculateur au sommet, ce qui exige que le balancier ait une longueur double de l'axe qu'aurait la cycloïde du système précédent (504), et qu'il s'écarte très-peu de sa position verticale. Comme l'arc osculateur de deux à trois degrés se confond sensiblement avec la courbe, il est physiquement aussi tautochrone que celle-ci.

507. *L'espace compris entre un arc de cycloïde limité au sommet, la tangente en ce point et une parallèle à l'axe, menée par l'autre extrémité de l'arc, égale le segment correspondant de la moitié du véhicule.*

Si nous supposons EH, E'H' parallèles à l'axe CD (P. X, F. 14) et infiniment rapprochées, l'arc EE' est un élément droit; EG, parallèle à la tangente CH, forme un triangle rectiligne EGE', et le très-petit segment $HEE'H' = EH \times EG + \frac{1}{2} E'G \times EG$. Mais le produit des deux infiniment petites longueurs E'G, EG est infiniment petit par rapport au produit $EH \times EG$, qui renferme un facteur fini. Le triangle EGE' est donc négligeable, et $HEE'H' = EH \times EG$.

La démonstration du problème (*d*), page 383, apprend que la corde C.3' du véhicule est parallèle à la tangente en E; elle est donc aussi parallèle à l'élément EE'; les triangles rectangles EGE', 3'.*h*C sont semblables;

$$Ch : E'G :: h.3' : EG, \quad \text{ou} \quad EH : hh' :: h.3' : EG,$$

et

$$EH \times EG = hh' \times h.3' = h.3'.4'.h'.$$

Ainsi, le segment infiniment petit HEE'H' a même superficie que le segment infiniment petit *h*.3'.4'.*h'* qui lui correspond dans le véhicule. Or, les mêmes raisonnements et la même conséquence conviennent à tous les segments infiniment petits que pourraient former des parallèles à l'axe, dans le segment fini CIEH, et aux segments infiniment petits correspondants que pourraient former des perpendiculaires au même axe, dans le segment fini C.2'.3'.*h*. Par conséquent, la somme CIEH des premiers vaut la somme C.2'.3'.*h* des derniers, et le principe énoncé est vrai.

508. *L'espace compris entre la demi-cycloïde et les tangentes de ses extrémités vaut la moitié de l'aire du véhicule.*

La tangente à l'extrémité B (498) étant parallèle à l'axe CD (P. X,

F. 14), il s'ensuit que le principe précédent est applicable au segment CEBN, limité par la demi-cycloïde. Or, la moitié C.6'.DC du véhicule correspond à ce segment, comme C.2'.3'.h correspond à CIEH.

509. *L'espace compris entre un arc de cycloïde limité à la base, la tangente d'équerre sur cette base et une parallèle à l'axe, menée par l'autre extrémité de l'arc, égale le segment correspondant du véhicule.*

Ainsi, l'espace BK'EHN = D.6'.3'.hD. En effet,

$$\text{BK'EHN} = \text{BB[illegible]N} - \text{CIEH} = \text{D.6'.CD} - \text{C.2'.3'}.h = \text{D.6'.3'}.h\text{D}.$$

510. *Le rectangle construit avec l'axe et la base d'une cycloïde est quadruple de l'aire du véhicule.*

Soit r le rayon du véhicule. L'axe CD $= 2r$ (P. X, F. 14); la base AB $= 2\pi r$ (494), et le rectangle circonscrit à la cycloïde, ABNO $= 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$.

511. *L'aire d'une cycloïde est triple de celle du véhicule.*

L'espace ABECKA = ABNO $-$ (CEBN + CKAO) $= 4\pi r^2 - (\frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2) = 3\pi r^2$.

Probl. (*a*) : *Mesurer le segment cycloïdal* BK'EP, *compris entre une parallèle à l'axe et la plus petite des deux parties qu'elle forme sur la base* (P. X, F. 14).

Décrivez une circonférence dont l'axe CD soit diamètre; tirez Eh parallèlement à la base AB; mesurez le segment de cercle D.6'.3'.hD; vous aurez l'aire BK'EHN (509) et si vous retranchez ce segment du produit BP $\times$ CD, qui vaut le rectangle BPHN, le reste sera évidemment la superficie de BK'EP.

Probl. (*b*) : *Mesurer le segment cycloïdal* ACEP, *compris entre une parallèle à l'axe et la plus grande des deux parties qu'elle forme sur la base* (P. X, F. 14).

Tirez Eh parallèlement à la base AB; mesurez le segment de cercle C.2'.3'.h; vous aurez l'aire CIEH (507); mesurez le demi-cercle C.6'.DC; vous aurez l'espace AKCO (508); ajoutez cette moitié au segment, et retranchez leur somme du produit AP$\times$CD, qui vaut le rectangle APHO; le reste sera la superficie ACEP.

Probl. (*c*) : *Mesurer le segment cycloïdal* CIEh, *compris entre une parallèle à la base et la plus petite des deux parties qu'elle forme sur l'axe* (P. X, F. 14).

Mesurez le segment de cercle C.2'.3'.h, pour avoir l'espace CIEH (507), et retranchez-le du produit Eh $\times$ Ch, qui vaut le rectangle CHEh; le reste égalera CIEh.

Probl. (*d*) : *Mesurer le segment cycloïdal* BK'EhD, *limité par* *une parallèle à la base et la plus grande des deux parties qu'elle forme sur l'axe* (P. X, F. 14).

Tirez EP parallèlement à l'axe; mesurez le segment cycloïdal BK'EP (probl. *a*) et ajoutez-le au produit $Eh \times hD$, qui vaut le rectangle DPE*h*.

PROBL. (*e*) : *Mesurer le segment cycloïdal* BK'EQ, *compris entre une partie de la base et une oblique à cette base* (P. X, F. 14).

Tirez EP, parallèle à l'axe CD; mesurez le segment cycloïdal BK'EP (probl. *a*), et retranchez du résultat l'aire du triangle PEQ.

PROBL. (*f*) : *Mesurer le segment cycloïdal* EK'L'E, *limité par une corde oblique à la base* (P. X, F. 14).

Tirez EP, L'Q, parallèles à l'axe; mesurez le segment BK'EP (probl. *a*), et le segment BL'Q; ajoutez le second résultat à l'aire du trapèze PEL'Q; puis retranchez le total du premier résultat.

ÉPICYCLOÏDES.

512. Les *épicycloïdes* ont une génération qui ne diffère de celle des cycloïdes (491) qu'en ce que leur directrice est courbe, au lieu d'être droite, et c'est ce qu'indique le mot grec *épi*, car il signifie *autour* ou *mouvement courbe*.

Les espèces d'épicycloïdes sont aussi variées que celles des cycloïdes, parce que toute courbe peut être prise pour véhicule, et que le mouvement de chacune peut être dirigé par une courbe semblable ou par toute autre; d'ailleurs le véhicule glisse ou roule sur la directrice, tandis que le point générateur se meut, d'après une certaine loi, ou reste fixe, et même le mouvement de ce point est susceptible de se combiner avec le roulement.

Nous n'étudierons que l'épicycloïde dont le véhicule et la directrice sont des circonférences: due au glissement ou au roulement, elle est toujours la même, pour un rapport donné des deux mouvements qui l'engendrent, et cela vient de la courbure uniforme du cercle. Si le chemin du point générateur sur le véhicule égale toujours celui de ce cercle sur l'autre, on a *l'épicycloïde proprement dite*, dont le nom a servi à désigner le genre unique du troisième ordre de la seconde classe des courbes. Lorsqu'il en est autrement, l'épicycloïde se trouve *raccourcie* ou *alongée*.

La première variété fera seule le sujet de tout ce qui va suivre.

APPLICATIONS : Au jour de chaque équinoxe, le plan de l'équateur se confond avec celui de l'écliptique. La ville de Quito, par exemple, parcourt donc, dans ce plan, en vingt-quatre heures, un grand cercle de la Terre, pendant que le centre parcourt environ la 365e partie de l'orbite elliptique, ou, ce qui est la même chose, pendant que ce grand cercle glisse tangentiellement à une courbe dont tous les points sont séparés des points correspondants de l'écliptiqué, par le rayon terrestre (158). En conséquence, Quito trace, dans l'espace, un arc d'épicycloïde plane, qui tourne sa concavité au Soleil, et dont le véhicule est l'équateur, dirigé par une courbe parallèle à l'orbite de notre globe.

Tout point terrestre, situé au nord ou au sud de Quito, parcourt également un arc d'épicycloïde plane durant le jour équinoxial; seulement le véhicule est un des cercles parallèles à l'équateur, et la directrice a des axes plus grands que ceux de la précédente.

La même ville et tous les autres points de la Terre tracent aussi des arcs d'épicycloïdes, pendant chaque autre jour de l'année; mais comme le véhicule ne se meut pas alors dans le plan de la directrice, ces arcs sont à double courbure.

Il en est de même des arcs d'épicycloïde que parcourt, chaque mois, le centre de la Lune, en tournant autour de celui de la Terre, pendant que ce dernier chemine sur l'écliptique; car l'orbite lunaire, qui est aussi une ellipse, coupe l'orbite terrestre sous un angle d'un peu plus de cinq degrés.

ÉPICYCLOÏDE.

513. *L'épicycloïde est engendrée par un point qui parcourt une circonférence, pendant que sa première position parcourt, d'un mouvement pareil, une longueur égale, sur une seconde circonférence fixe, toujours tangente à la première.*

L'épicycloïde est aussi la courbe que suit tout point d'une circonférence, pendant qu'elle roule sur une autre qui reste fixe.

Pour démontrer que ces deux modes de génération donnent absolument la même courbe, il suffit d'appliquer les raisonnements du n° 492 à la figure 19 (P. X), en y remplaçant la droite AA′ par l'arc de cercle ADB et le point *a* par le point I.

514. *Quand le véhicule et la directrice ont un rapport fini, l'épicycloïde est une courbe fermée, composée d'arcs égaux qui sont tous du même côté de la circonférence fixe et s'y terminent en se touchant deux à deux, d'où résultent des rebroussements de seconde espèce* (9).

La génération montre que, parvenus en B (P. X, F. 19), le véhicule et le point générateur se retrouvent absolument dans les mêmes circonstances qu'au point A, et qu'en continuant leurs mouvements, ils doivent produire un arc BC′B′ parfaitement égal à ACB, puis un troisième, etc.

On ferait voir, comme dans le n° 493, qu'il y a contact entre deux arcs consécutifs ACB, BC′B′, à leur point commun B, situé sur la directrice.

Enfin, la courbe est fermée; car, s'il existe entre la circonférence c du véhicule et celle C de la directrice, le rapport $\frac{n}{d}$,

n étant $\lessgtr d$, on a $c : C :: n : d$, puis $dc = nC$; un nombre d de rotations exécutées par le véhicule sur son centre répond exactement à un nombre n de révolutions complètes de ce centre autour de la directrice; les mêmes points se retrouvent en contact dès qu'elles sont achevées, et alors les mouvements continués reproduiraient absolument les mêmes arcs d'épicycloïde.

515. *Lorsque le rapport du véhicule à la directrice a une valeur finie, le nombre des rebroussements de l'épicycloïde égale le second terme de ce rapport réduit à sa plus simple expression.*

Chaque arc compris entre deux rebroussements est dû à une rotation du véhicule sur son centre. Or, d'après la démonstration précédente, ce véhicule fait d rotations, si son rapport à la directrice égale $\frac{n}{d}$. Dans le cas où le même rapport serait l'expression simplifiable $\frac{nk}{dk}$, on aurait l'équation $dkc = nkC$ qui, se réduisant à $dc = nC$, montrerait que d rotations du véhicule suffisent pour faire parcourir au contact un nombre de fois entier la circonférence directrice et le ramener au même point de cette courbe.

516. *Si le rapport du véhicule à la directrice renferme une fraction décimale sans fin, l'épicycloïde ne se ferme point; elle se compose d'une infinité d'arcs égaux; les révolutions successives rapprochent de plus en plus du contact primitif, les contacts qui les terminent; mais un quelconque de ces derniers ne se confond jamais avec le premier.*

Ce cas est celui d'un rapport incommensurable. Il serait tel, par exemple, si le diamètre du véhicule était le côté d'un carré dont la diagonale formât le diamètre de la directrice, car on aurait pour $\frac{n}{d}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1{,}4142 \text{ etc.}}$. Or alors (514), la relation $dc = nC$ deviendrait $1{,}4142$ etc. $c = C$, ou 14142 etc. $c = 10000$ etc. C, ce qui montre bien qu'un nombre infini de rotations et un nombre infini de révolutions seraient nécessaires, pour remettre en contact les mêmes points des deux circonférences.

Si, au contraire, on avait $\frac{n}{d} = 1{,}4142$ etc., il en résulterait $c = 1{,}4142$ etc. C, puis 10000 etc. $c = 14142$ etc. C. L'épicycloïde ne se fermerait donc pas non plus; mais elle différerait de la précédente en ce que chaque rebroussement se trouverait en arrière du suivant, au lieu d'être en avant.

517. *Quand le rapport du véhicule à la directrice est un nombre entier, l'épicycloïde n'a qu'un seul rebroussement.*

Cela doit être, en effet, d'après le principe 515, puisque alors le second terme du rapport égale l'unité.

Supposons le véhicule égal à la directrice ; le premier fera sa demi-rotation dans le même temps que sa demi-révolution, et les deux moitiés de l'une dans le même temps que les deux moitiés de l'autre. Ainsi, quand le contact, qui avait lieu d'abord en A (P. X, F. 20), aura été transporté en A′, le point générateur, qui était aussi primitivement en A, se trouvera au milieu C du véhicule, et lorsque le contact reviendra en A, le point générateur y arrivera au même instant.

Si le véhicule est double de la directrice (F. 21), la demi-révolution qui place le contact en A′, amène le point générateur à l'extrémité E de l'arc A′E, égal au quart du véhicule ; une révolution entière remet le contact en A, et porte le point générateur en C ; après une révolution et demie, le contact se retrouve en A′, et le point générateur est à l'extrémité de l'arc A′EF, égal aux trois quarts du véhicule ; enfin, au bout de deux révolutions, le contact se fait en A pour la troisième fois, et le point générateur a la même position.

Comme le véhicule, partant toujours du contact A, produirait évidemment la même courbe, en roulant dans le sens contraire au précédent, la troisième intersection de l'épicycloïde et de la droite AA′ doit se confondre avec la première G ; d'où il suit que ce point est multiple (9).

518. L'épicycloïde est dite *interne*, lorsque le véhicule glisse ou roule sur la concavité de la directrice. A cette autre variété s'applique tout ce qui a été dit jusqu'ici de l'épicycloïde externe, le n° 517 excepté ; mais elle a une propriété particulière qu'il est bon de connaître.

Lorsque le rapport du véhicule à la directrice devient $\frac{1}{2}$, l'épicycloïde interne se change en un diamètre du cercle fixe.

La démonstration consiste à faire voir que, par suite du roulement, une position quelconque A′ du contact (P. X, F. 22), place en un point E du diamètre AC, le contact primitif A.

Puisqu'en A′, comme en A, les deux cercles ont la même tangente, leurs normales se confondent. Le roulement fait donc pivoter sur le centre O du cercle fixe, le diamètre qui, dans le cercle mobile, aboutit au contact. Or, considéré relativement à la directrice, l'angle AOA′ a pour indication le nombre m des degrés de l'arc AA′ ; considéré par rapport au véhicule, le même angle a pour indication la moitié $\frac{n}{2}$ des degrés de l'arc A′E. En conséquence, $m = \frac{n}{2}$.

Représentons par d le diamètre du petit cercle ; celui du grand sera $2d$; les longueurs des deux circonférences auront pour expression πd, $2\pi d$; celles de leurs degrés seront respectivement $\frac{\pi d}{360}$, $\frac{2\pi d}{360}$, et l'on aura

$$A'E = \frac{\pi d}{360} n, \quad AA' = \frac{2\pi d}{360} m = \frac{2\pi d}{360} \times \frac{n}{2} = \frac{\pi d}{360} n = A'E.$$

Ainsi, tous les points de A'E s'appliqueraient successivement sur ceux de A'A, et le point E arriverait en A, si nous faisions rétrograder le véhicule. Par conséquent, ce même point E de AC est bien la position que le roulement donne au point générateur A, en transportant le contact de A en A'.

Il est visible, d'ailleurs, qu'une rotation complète du véhicule, exécutée en même temps qu'une demi-révolution autour de O, fait parcourir tout le diamètre AC au point générateur, et qu'il revient en A, par le même chemin, pendant la seconde moitié du tour.

Application : Supposez un anneau AA'CA (P. X, F. 22), une roue A'EOA' égale à la moitié de AA'CA et appliquée sur la concavité, une bride o'A', qui embrassant l'anneau et fixée aux deux bouts de l'essieu o', maintienne cet essieu à une distance constante de la grande circonférence. Si la tige d'un piston à vapeur est attachée au point A de la roue, mise dans la position o, il forcera cette roue à rouler sur la concavité de l'anneau, et fera des oscillations exactement verticales, égales à AC (appl. p. 291).

519. Le reste de notre étude concernera un seul des arcs de l'épicycloïde externe, compris entre deux rebroussements consécutifs, et selon l'usage, nous le nommerons *épicycloïde*. Tout ce qui sera dit d'un tel arc conviendra évidemment à chacun de ses égaux.

L'arc AB de la directrice (P. X, F. 19), terminé aux deux extrémités d'une épicycloïde ACB, est la *base* de cette dernière courbe; le rayon OC, qui divise AB en deux parties égales, forme l'axe, et l'intersection C s'appelle *sommet*.

La base d'une épicycloïde égale la circonférence du véhicule, et l'axe vaut le diamètre; le rapport de la base à l'axe est $\frac{22}{7}$ ou, moins inexactement, 3,1416.

Les démonstrations sont absolument les mêmes que pour la cycloïde (494).

520. *Toutes les épicycloïdes sont semblables; il y a égalité entre deux de ces courbes, quand elle existe entre leurs bases et entre leurs axes.*

Ces principes se démontrent comme ceux des nos 495 et 496.

Probl. (*a*) : *Tracer, d'un mouvement continu, une épicycloïde dont la directrice et l'axe sont donnés.*

La *roulette* à employer ne diffère de celle qui sert pour la cycloïde (496, probl. *a*), qu'en ce que les règles EF, E'F' (P. X, F. 16) sont remplacées par des arcs de cercle, et les deux instruments se mettent en œuvre de la même manière.

Probl. (*b*) : *Tracer, d'un mouvement continu, une épicycloïde dont la base est donnée.*

Agissez comme dans le problème (*b*) du no 496.

PROBL. (*c*) : *Tracer, par points, une épicycloïde dont la directrice et l'axe sont donnés.*

Tirez un rayon OD de la directrice (P. X, F. 19); portez l'axe sur le prolongement, de D en C; décrivez une circonférence dont CD soit diamètre; partagez-la en un nombre de parties égales assez grand pour qu'elles puissent être regardées comme des droites; portez celles d'une demi-circonférence sur la directrice, de D en A et en B, pour avoir la base ADB de l'épicycloïde (519); décrivez de O des arcs de cercle qui passent par les points 1, 2, 3, etc. du véhicule, et des points I, I' de la base, avec la corde de l'arc D.3, décrivez de petits arcs qui coupent le grand arc 3.3'; les intersections E, E' seront des points de l'épicycloïde.

Vous obtiendrez deux autres points, si vous décrivez de II, II', avec la corde D.2, de petits arcs qui coupent le grand 2.2', et quand vous aurez marqué ainsi autant de points de la courbe demandée qu'il y en a d'indiqués sur le véhicule, il ne s'agira plus que de les unir entre eux et avec les points A, C, B.

Démonstration : Elle est analogue à celle de la seconde solution du problème (*c*), page 379.

PROBL. (*d*) : *Tracer, par points, une épicycloïde dont la base est donnée.*

Tirez un rayon OD qui coupe au milieu la base ADB (P. X, F. 19); partagez la moitié AD en onze parties égales; rectifiez l'arc qui contient sept de ces parties (21); portez sa longueur sur le prolongement de OD, de D en C; vous marquerez ainsi le sommet C de l'épicycloïde, car la circonférence dont CD sera diamètre vaudra environ vingt-deux des parties de AD, elle égalera ADB et sera celle du véhicule (519). Vous pourrez donc appliquer la solution du problème précédent.

APPLICATIONS : On emploie ces tracés pour profiler les dents d'un engrenage dont les deux roues doivent avoir des vitesses en rapport constant, soit que la roue conduite se trouve placée à l'extérieur de l'autre, soit qu'elle s'y trouve renfermée. Les mêmes tracés s'appliquent encore aux cammes destinées à soulever un marteau tournant.

521. *La normale d'un point quelconque de l'épicycloïde passe par le contact correspondant du véhicule avec la base.*

Ce principe se démontre comme celui du n° 497.

522. *Les tangentes des extrémités d'une épicycloïde sont des rayons de la directrice, et la tangente du sommet est perpendiculaire à l'axe.*

La normale à l'extrémité A de l'épicycloïde ACB (P. X, F. 19) a une longueur nulle, puisque l'incidence se confond avec le contact correspondant du véhicule (521), ou bien, ce qui est la même chose, cette normale se réduit, pour le point A, à l'élément du cercle directeur. Elle a donc même direction que la tangente de ce cercle, et, par conséquent, la tangente au point A de l'arc AE est le rayon OA.

Le véhicule touche la directrice à l'extrémité D de l'axe, quand le point générateur arrive au sommet C (515 et 519). Ainsi, cet axe est la normale pour le point C, et la tangente du même point doit le couper d'équerre.

Probl. (*a*) : *Mener une normale à l'épicycloïde, par un point donné sur cette courbe.*

Décrivez un cercle dont l'axe CD soit diamètre (P. X, F. 19) ; rapportez, sur la circonférence, l'incidence donnée F, en décrivant, du centre O de la directrice, un arc F.2 qui ait OF pour rayon ; décrivez enfin, de F, avec la corde D.2, un petit arc qui coupe la base ADB du côté où la normale demandée paraît devoir se diriger ; cette normale sera la droite tirée de F à l'intersection II.

Démonstration : Faisons glisser le cercle C.2.D sur la base ADB, jusqu'à ce que le point 2 soit sur l'épicycloïde ACB ; ce point 2 suivra nécessairement l'arc décrit de O, avec la droite O.2, et il arrivera en F, puisque O.2 = OF. Mais, au même moment, le contact D sera au point II, F.II égalant 2.D. En conséquence, le point II est, pour le véhicule, le contact qui correspond à la position F du point générateur, et F.II donne bien la normale demandée (521).

Probl. (*b*) : *Mener une tangente à l'épicycloïde, par un point donné sur cette courbe.*

Solution 1 : Tracez la normale F.II du contact donné F (P. X, F. 19) ; puis, sur cette droite, élevez en F une perpendiculaire FG.

Solution 2 : Décrivez un cercle dont l'axe CD soit diamètre ; rapportez, sur la circonférence, le contact donné F, en décrivant, du centre O de la directrice, un arc F.2 qui ait OF pour rayon ; décrivez encore de O, avec OC, un arc indéfini CG ; décrivez enfin, de F, avec la corde C.2, un petit arc qui coupe CG du côté où la tangente demandée paraît devoir se diriger ; cette tangente sera la droite tirée de F à l'intersection G.

Démonstration : Nous avons fait voir (probl. *a*) que le contact D du véhicule se trouve au point II, quand le point 2 est sur F. Alors aussi, la corde D.2 se confond avec la normale F.II, et par suite, la corde 2.C prend la direction de la tangente FG, puisque l'angle inscrit D.2.C est droit, comme l'angle II.FG. Le point C du véhicule doit donc se trouver à la fois sur l'arc CG et sur la tangente FG ; il arrive donc à l'intersection G, quand D arrive au point II, et 2 en F. Par conséquent, FG = C.2.

Solution 3 : Marquez l'intersection II de la base ADB et d'un arc décrit de F, avec D.2 ; tirez le rayon O.II ; portez l'axe CD sur le prolongement, de II en G ; la droite FG sera la tangente demandée, car le triangle II.FG égalera le triangle D.2.C.

523. *Si la directrice est double du véhicule, la demi-épicycloïde est la demi-caustique par réflexion due à des rayons lumineux d'équerre sur l'axe et à un cercle double de la directrice, décrit du même centre* (468).

Le rayon OD de la directrice (P. X, F. 23), alors double du rayon oC du véhicule, égale l'axe CD; OC est double de OD, et le cercle CG forme le réflecteur. Soient FG la tangente en F de la demi-épicycloïde CFA, et GH un rayon lumineux, perpendiculaire à l'axe CD. Il faut démontrer que ce rayon se réfléchit selon GF et que $GF = \frac{1}{2} GH$.

Le point A′, intersection du rayon OG et de la base, est le contact du véhicule, quand le point générateur se trouve en F, d'après la démonstration précédente. Ainsi, l'arc AA′ = A′F; le nombre des degrés de A′F est double de celui des degrés de AA′, et l'angle inscrit A′GF égale l'angle au centre AOA′. Mais, la demi-base AA′D vaut la moitié A′FG du véhicule (519); cette demi-base forme donc le quart de la directrice; AO est parallèle à GH; l'angle OGH = AOA′ = A′GF, et la réflexion du rayon lumineux HG se fait effectivement selon GF.

En outre, l'égalité des angles A′GF, AOA′ rend semblables les triangles rectangles A′FG, OHG;

$$GF : GH :: A'G : OG :: 1 : 2,$$

et par conséquent, GF égale bien la moitié de GH.

524. *Si la directrice égale le véhicule, l'épicycloïde est la caustique par réflexion due à des rayons lumineux émanés du sommet et au cercle qui, passant par ce sommet, est concentrique avec la base* (475).

Soient FG la tangente au point F de l'épicycloïde AFC.... (P. X, F. 24); CG un rayon lumineux parti du sommet C, situé sur le diamètre AD qui contient le rebroussement A (517), et le rayon OG du réflecteur, mené à l'incidence G. L'intersection A′ de OG et de la base AA′D.... est le contact du véhicule, pour la position F du point générateur, d'après la démonstration indiquée dans l'article précédent. Ainsi, l'arc AA′ = A′F et renferme le même nombre de degrés; par conséquent, l'angle inscrit A′GF vaut la moitié de l'angle au centre AOA′. Mais, le triangle COG est symétrique; l'angle OCG = OGC, et ce dernier vaut la moitié de l'angle extérieur AOA′. Donc, A′GF = OGC, ce qui montre que la réflexion du rayon lumineux CG se fait selon GF.

Il s'ensuit de plus similitude entre les triangles symétriques FoG, COG;

$$GF : CG :: Go : GO,$$

et puisque $Go = oA' = A'O$,

$$GF = \frac{1}{3} CG.$$

Donc enfin, le point F de l'épicycloïde appartient à la caustique produite par le point lumineux C et le réflecteur circulaire dont le rayon est OC.

525. *Tout arc d'épicycloïde, compris entre le sommet et un point quelconque, égale la quatrième proportionnelle du rayon de la directrice, du double de ce rayon, ajouté au diamètre du véhicule, et de la corde par laquelle sont joints les deux points de ce véhicule qui correspondent aux extrémités de l'arc.*

L'arc CC″C′, par exemple (P. X, F. 25), est déterminé par la proportion

$$DO : 2DO + CD :: C'E' : CC''C',$$

car le point générateur se trouve en C′, puis en E′, quand le glissement du véhicule, sur la directrice AA′D, a transporté le contact primitif A en A′, puis en D.

L'élément e du contact D est commun aux deux circonférences. Portons-le sur chacune autant de fois qu'il peut y être contenu; nous formerons deux polygones réguliers AA′A″A‴D..., CD′D″D‴D..., dont les nombres N, n de côtés, ou d'angles, seront exprimés par $\frac{2\pi \times DO}{e}$, $\frac{2\pi \times Co}{e}$. Ainsi, $N : n :: DO : Co$.

Soit DE le côté commun aux deux polygones, le point E étant supposé à la fois sur les deux circonférences. Son prolongement DG, tangent à ces courbes, forme deux angles extérieurs; l'un $GDA''' = \frac{90^\circ \times 4}{N}$, l'autre $GDD''' = \frac{90^\circ \times 4}{n}$;

$$GDA''' : GDD''' :: \frac{1}{N} : \frac{1}{n} :: n : N :: Co : DO,$$

et

$$A'''DD''' : GDD''' :: Co + DO : DO.$$

D'ailleurs, $GDD''' + D'''DE = 180^\circ = D'''CE + D'''DE$, ce qui donne $GDD''' = D'''CE = 2DCD'''$. Par conséquent,

$$A'''DD''' : 2DCD''' :: Co + DO : DO,$$

ou bien

$$A'''DD''' : DCD''' :: 2Co + 2DO : DO,$$

ou encore

$$A'''DD''' : D'CD'' :: 2Co + 2DO : DO.$$

Ramenons, par roulement, le véhicule o dans la position o', qui met le point générateur C en C′, D′ en A′ et l'élément DE en E′. Evidemment, l'angle $AA'C' = A'''DD'''$; l'arc décrit de A′, entre les côtés du dernier angle, avec la normale infiniment petite A′C′ se superpose à l'arc élémentaire AC′ ou a de l'épicycloïde, de sorte que a peut être considéré comme l'arc d'indication de l'angle A‴DD‴; la normale $A'C' = CD'$; l'arc décrit de C, avec CD′, est l'arc d'indication de l'angle D′CD″; cet arc, étant infiniment petit, peut être remplacé par son sinus D'H ou s, perpendiculaire abaissée de D' sur CD''; enfin, les angles se contiennent comme leurs arcs d'indication de même rayon. Conséquemment,

$$a : s :: 2Co + 2DO : DO.$$

Lorsque le véhicule aura parcouru, en roulant, l'arc infiniment petit A'A'', il touchera la directrice par son point D''; le point générateur se trouvera en C'', et la normale A''C'', qu'on peut supposer avoir été confondue avec A'C', dans la position o', aura tourné d'un angle C'A''C'' égal à l'angle A'A''C', dont le véhicule a tourné lui-même. Comme A'A''C', = AA'C', et que D''CD''' = D'CD'', il y a entre les angles C'A''C'', D''CD''', ou entre leurs arcs d'indication de même rayon, la relation déjà établie entre ceux des angles AA'C', D'CD''. Or, l'arc d'indication de C'A''C'', décrit de A'', avec la normale A''C'', se superpose à l'arc infiniment petit C'C'' ou a' de l'épicycloïde; l'arc d'indication de D''CD''', décrit de C, avec CD'' qui vaut A''C'', peut être remplacé par son sinus D''I ou s'. Ainsi,

$$a' : s' :: 2Co + 2DO : DO.$$

On verrait de même, en représentant C''C''' par a'', et le sinus D'''K par s'', que

$$a'' : s'' :: 2Co + 2DO : DO;$$

ce dernier rapport existe donc entre chaque arc infiniment petit de l'épicycloïde et le sinus de l'angle correspondant, formé dans le véhicule. Par conséquent,

$$a + a' + a'' + \text{etc.} : s + s' + s'' + \text{etc.} :: 2Co + 2DO : DO.$$

La somme des arcs a, a', a'', etc., prise de A en C, donne la demi-épicycloïde AC''C; les sinus s, s', s'', etc. restent infiniment petits, étant tous rapportés au plus grand de leurs rayons, qui est CE ou CD; la somme de deux sinus infiniment petits égale le sinus de la somme des angles, puisque les cosinus valent le rayon; $s + s' + s'' +$ etc. revient donc à EL, perpendiculaire sur CD' et sinus de la somme de tous les angles compris entre l'élément CD' et la corde CE ou le diamètre CD. Comme EL diffère infiniment peu de CE ou de CD, on a

$$AC''C : CD :: 2Co + 2DO : DO.$$

En conséquence, ***la moitié de l'épicycloïde contient l'axe, comme la somme de deux rayons du véhicule et de deux rayons de la directrice contient un seul des derniers.***

Si, au lieu de la demi-épicycloïde, nous considérons seulement l'arc CC''C', il faut omettre la première proportion $a : s :: 2Co + 2DO : DO$, et sommer seulement les autres. Il en résulte

$$a' + a'' + \text{etc.} : s' + s'' + \text{etc.} :: 2Co + 2DO : DO.$$

Le second terme $s' + s'' +$ etc. est la perpendiculaire abaissée de E sur CD'', car cette perpendiculaire forme le sinus de la somme des angles compris entre CD'' et CE. Or, ce sinus diffère infini-

...ent peu de DD′ ou de CD‴; D‴, C sont les points du véhicule sur lesquels se trouve le point générateur, quand, par suite du glissement, il marque les extrémités C′, C de l'arc CC″C′. Donc, enfin, conformément à l'énoncé du principe,

$$CC''C' : CD''' :: 2Co + 2DO : DO.$$

526. *Tout arc d'épicycloïde interne* (518), *compris entre le sommet* C_1 (P. X, F. 22) *et un point quelconque* E_1, *égale la quatrième proportionnelle du rayon* CO *de la directrice, du double de ce rayon, moins le diamètre* CC_1 *du véhicule, et de la corde* C_1e, *par laquelle sont joints les deux points de ce véhicule qui correspondent aux extrémités de l'arc.*

Ce principe se démontre par des moyens analogues à ceux dont nous venons de faire usage pour l'épicycloïde externe, ou simplement par l'observation que le diamètre CC_1 du véhicule, ayant des positions inverses de celles qu'il prend dans l'épicycloïde externe, doit être considéré comme négatif; car la proportion précédente se change alors immédiatement en cette autre

$$CC''C' : CD''' :: 2DO - 2Co : DO,$$

qui, pour la figure 22, donne

$$C_1E_1 : C_1e :: 2CO - 2C_1o_1 : CO.$$

Dans le cas où le rapport des cercles est 2, on a

$$C_1A_1 : C_1C :: 2CO - CO : CO :: CO : CO,$$

ce qui montre que la moitié de l'épicycloïde interne vaut alors le diamètre du véhicule ou le rayon de la directrice, résultat conforme au principe 518.

Probl. (*a*) : *Mesurer un arc d'épicycloïde externe, compris entre le sommet et un point quelconque.*

Décrivez une circonférence o, dont l'axe CD soit diamètre (P. X, F. 25); rapportez-y l'extrémité C′ de l'arc donné, en décrivant de O un arc qui ait OC′ pour rayon; tirez la corde CD‴; puis, cherchez la quatrième proportionnelle du rayon DO, de la somme des diamètres 2DO, CD et de la corde CD‴ (525).

Probl. (*b*) : *Mesurer un arc d'épicycloïde externe, compris entre deux points différents du sommet.*

Déterminez la longueur des arcs compris entre chaque point et le sommet, comme dans le problème précédent; puis, si ce sommet C est hors de l'arc donné C′C″ (P. X, F. 25), retranchez C″C‴C de C′C‴C, et si, au contraire, le sommet se trouve sur l'arc donné C″CF, ajoutez C″C‴C à CF.

527. *L'espace compris entre l'axe d'une épicycloïde externe, un arc quelconque, la normale de l'autre extrémité et la partie de directrice qui correspond à cet arc, égale la quatrième proportion-*

nelle du rayon de la directrice, du triple de ce rayon, ajouté au diamètre du véhicule, et du secteur que couvrent sur ce véhicule, pendant le glissement, les normales de l'arc épicycloïdal.

L'espace DCC″C′A′A″D, par exemple (P. X, F. 25), que limite la normale A′C′, est déterminé par la proportion

$$\mathrm{DO} : 3\mathrm{DO}+\mathrm{CD} :: \mathrm{sect\,C'A'E'} : \mathrm{DCC''C'A'A''D}.$$

Les secteurs infiniment petits CDC‴, ECD, ayant même rayon, sont entre eux comme leurs angles. Or, l'angle CDC‴ est celui dont a tourné la normale, en passant de la position A‴C‴ à la position infiniment voisine DC; il égale donc A‴DD‴, et (525)

$$\mathrm{sect\,CDC'''} : \mathrm{sect\,ECD} :: 2\mathrm{C}o+2\mathrm{DO} : \mathrm{DO}.$$

Le même rapport existe entre le secteur infiniment petit C‴A‴C″ et le secteur DCD‴, car leurs rayons A‴C‴, CD‴ sont égaux: quand l'élément DD‴ couvre DA‴, le point générateur C est en C‴, et le secteur DCD‴ se superpose au secteur DC‴A‴. Par conséquent,

$$\mathrm{sect\,C'''A'''C''} : \mathrm{sect\,DCD'''} :: 2\mathrm{C}o+2\mathrm{DO} : \mathrm{DO}.$$

Pour des raisons analogues,

$$\mathrm{sect\,C''A''C'} : \mathrm{sect\,D'''CD''} :: 2\mathrm{C}o+2\mathrm{DO} : \mathrm{DO},$$

et ainsi des autres. Donc,

$$\mathrm{sect\,CDC'''}+\mathrm{sect\,C'''A'''C''}+\mathrm{sect\,C''A''C'}+\text{etc.} : \mathrm{sect\,ECD}+\mathrm{sect\,DCD'''}$$
$$+\mathrm{sect\,D'''CD''}+\text{etc.} :: 2\mathrm{C}o+2\mathrm{DO} : \mathrm{DO}.$$

Il s'ensuit

$$(\mathrm{sect\,ECD}+\mathrm{sect\,CDC'''})+(\mathrm{sect\,DC'''A'''}+\mathrm{sect\,C'''A'''C''})$$
$$+(\mathrm{sect\,A'''C''A''}+\mathrm{sect\,C''A''C'})+\text{etc.} : \mathrm{sect\,ECD''} :: 2\mathrm{C}o+3\mathrm{DO} : \mathrm{DO}.$$

Le premier terme de cette proportion forme l'espace limité par CE, les arcs CC″C′, EDA‴A″, et la droite A″C′; mais, comme les points E et D, A″ et A′ sont infiniment voisins, on peut prendre, pour ce premier terme, l'espace DCC″C′A′A″D. Le second terme devient alors le secteur DCD′ ou le secteur égal CDD‴, partie du véhicule qui est couverte par les normales de l'épicycloïde, pendant que le glissement transporte le contact de A′ en D, et conformément à l'énoncé,

$$\mathrm{DCC''C'A'A''D} : \mathrm{sect\,CDD'''} :: 2\mathrm{C}o+3\mathrm{DO} : \mathrm{DO}.$$

Si l'on observe que, pendant le glissement du véhicule sur la moitié AA″D de la base, les normales de l'épicycloïde couvrent le demi-cercle CD″D, il devient évident que la moitié de l'espace compris entre une épicycloïde et sa base,

$$\mathrm{DCC''AA''D} : \mathrm{CD''D} :: 2\mathrm{C}o+3\mathrm{DO} : \mathrm{DO}.$$

Par conséquent, *l'espace compris entre l'épicycloïde externe et sa base contient l'aire du véhicule, comme la somme de deux rayons de ce cercle et de trois rayons de la directrice contient un seul des derniers.*

528. *L'espace compris entre l'axe* CC_1 *d'une épicycloïde interne* (P. X, F. 22), *un arc quelconque* C_1E_1, *la normale* E_1a *de l'autre extrémité, et la partie* Ca *de la directrice qui correspond à cet arc, égale la quatrième proportionnelle du rayon* CO *de la directrice, du triple de ce rayon, moins le diamètre* CC_1 *du véhicule, et du secteur* C_1Ce *que couvrent sur ce véhicule, pendant le glissement, les normales de l'arc épicycloïdal* C_1E_1.

Ce principe peut être démontré par les moyens employés dans le numéro précédent; mais il est beaucoup plus simple d'observer qu'après avoir considéré comme positif, le diamètre du véhicule de l'épicycloïde externe, on doit prendre négativement celui du véhicule de l'épicycloïde interne (526). Alors, la proportion $DCC''C'A'A''D$: sect CDD''' :: $2Co + 3DO$: DO devient

$$DCC''C'A'A''D : \text{sect}\,CDD''' :: 3DO - 2Co : DO,$$

et celle-ci, appliquée à la figure 22, donne

$$CC_1E_1a : \text{sect}\,CC_1e :: 3CO - 2C_1o_1 : CO.$$

Dans le cas où le rapport des circonférences est 2, on a

$$CC_1A_1C : CeC_1 :: 3CO - CO : CO :: 2CO : CO :: 2 : 1.$$

Ainsi, l'espace compris entre l'épicycloïde droite AC et la base AA'C (518), c'est-à-dire la moitié de l'aire du cercle directeur, est quadruple de la moitié de l'aire du véhicule, ce qui s'accorde avec le rapport des rayons.

Probl. (*a*) : *Mesurer un segment d'épicycloïde externe, limité par l'axe et une autre normale quelconque.*

Décrivez une circonférence *o*, dont l'axe CD soit diamètre (P. X, F. 25); rapportez-y l'extrémité C' de l'arc d'épicycloïde compris dans le segment donné $DCC''C'A'A''D$, et pour cela, décrivez de O un arc de cercle, avec le rayon OC'; mesurez le triangle CoD''', le secteur DoD''' et faites-en la somme; mesurez aussi les rayons DO, Co; puis calculez le quatrième terme de la proportion $DO : 2Co + 3DO :: \text{sect}\,CDD''' : x$.

Probl. (*b*) : *Mesurer un segment d'épicycloïde externe, limité par deux normales quelconques.*

Déterminez l'aire des segments compris entre chaque normale et l'axe, comme dans le problème précédent; puis, si l'axe CD se trouve hors du segment donné $A'C'C''C'''A'''$ (P. X, F. 25), retranchez $DCC'''A'''$ de $DCC''C'A'A''D$, et si, au contraire, l'axe est une corde du segment donné $A'C'C''CFM$, ajoutez $DCC''C'A'A''D$ à DCFM.

Probl. (*c*) : *Mesurer un segment d'épicycloïde externe, limité par deux transversales quelconques de la courbe et de la directrice.*

Tracez les normales des points H, K, où les transversales données HI, KL coupent l'épicycloïde (P. X, F. 19); mesurez le segment compris entre ces deux normales HM, KN; ajoutez-y l'excès du triangle HIM sur le segment IPMI de la directrice, et retranchez de la somme, l'excès du triangle KLN sur le segment LQNL.

Probl. (*d*) : *Mesurer un segment d'épicycloïde externe, limité par une corde qui ne coupe pas la directrice.*

Tracez les normales des extrémités H, K de la corde donnée (P. X, F. 19); mesurez le segment compris entre ces deux normales HM, KN, et retranchez-en l'excès du quadrilatère HKNM sur le segment MQNM de la directrice.

COURBES A DOUBLE COURBURE.

529. Les *courbes à double courbure* diffèrent des courbes planes en ce que leurs éléments consécutifs forment des plans différents (1). Il faut généralement, pour les produire, trois mouvements simultanés: le point générateur doit se mouvoir sur un véhicule, tandis que ce véhicule change de position dans un plan déterminé, et que le plan lui-même s'élève ou s'incline. Comme les deux premiers mouvements engendrent une courbe plane (374), c'est le dernier seul qui cause la seconde courbure.

Les deux premières colonnes du tableau de la page 258 conviennent à celui qu'on peut faire des courbes à double courbure, car le véhicule est droit ou courbe, comme pour les courbes planes, et dans chacun de ces cas, il se meut soit autour d'un point fixe, soit le long d'une directrice droite ou courbe.

Première classe, *premier ordre :* Regardons le point fixe comme le centre d'une sphère; le véhicule droit se confond avec un rayon, dans chacune de ses positions, et la courbe due au point générateur varie d'après les rapports du chemin fait sur le véhicule aux arcs de l'angle horizontal et de l'angle vertical dont cette droite tourne et s'élève dans le même temps.

Si, par exemple, les rapports sont infiniment grands, le point générateur reste immobile sur le véhicule; sa distance au point fixe est constante; la génération s'opère par deux mouvements, et la courbe se trouve tracée sur une surface sphérique.

Première classe, *deuxième ordre :* Concevez une droite, verticale par exemple, le long de laquelle glisse, en tournant, une horizontale. La courbe varie d'après les rapports du chemin fait, par le point générateur, sur l'horizontale, à l'arc de l'angle dont ce véhicule tourne, dans le même temps, et à son trajet sur la directrice verticale.

Quand on annule le premier chemin, le point générateur reste toujours à la même distance de la directrice, et la courbe se trouve sur une surface cylindrique dont cette droite forme l'axe; elle s'appelle *hélice cylindrique*, et elle est dite *régulière*, si de plus le chemin circulaire horizontal et le chemin rectiligne vertical ont un rapport constant; ses deux courbures sont alors uniformes, et l'on peut dire qu'elle est aux courbes à double courbure, ce qu'est la circonférence aux courbes planes (17).

Astreignez le point générateur à se mouvoir, sur le véhicule, de manière qu'il ne sorte point d'une surface conique dont l'axe soit formé par la directrice, vous aurez une *hélice conique*.

Dans le cas où la surface régulatrice serait celle d'une sphère, la même génération produirait une *hélice sphérique*. C'est une courbe de ce genre que parcourt, chaque année, l'intersection de la surface terrestre avec la droite qui joint le centre de notre globe à celui du Soleil.

Enfin, l'hélice est dite *ellipsoïdale*, *paraboloïdale*, *etc.*, selon que la surface régulatrice appartient à un ellipsoïde, à un paraboloïde, etc.

Première classe, *troisième ordre:* Le véhicule droit peut parcourir une courbe et tourner autour, en restant toujours d'équerre à la tangente de l'intersection. La courbe produite dépend encore des rapports établis entre la vitesse rectiligne du point générateur et les deux autres: elle serait une *hélice annulaire*, si la directrice était une circonférence et que la première vitesse fût nulle.

Deuxième classe, *premier ordre:* Faisons tourner une courbe autour d'une de ses tangentes: le contact est le point fixe du véhicule. Ce véhicule forme-t-il une courbe fermée, la courbe engendrée passe au point fixe, dans chaque révolution du point générateur; est-il une courbe ouverte, comme la parabole ou l'une des branches de l'hyperbole, la courbe à double courbure ne passe qu'une seule fois au point fixe, mais elle aussi est ouverte et infinie.

Deuxième classe, *deuxième ordre:* Pour cet ordre, le véhicule courbe glisse sur une droite, et les trois mouvements se réduisent à deux. Il en résulte toujours une *hélice cylindrique:* elle donne l'hélice cylindrique *proprement dite*, du deuxième ordre de la première classe, lorsque le véhicule est une circonférence, et l'on a l'hélice elliptique, parabolique, etc., quand le véhicule devient une ellipse, une parabole, etc.

Mais, le véhicule peut tourner autour de la directrice droite, tout en la parcourant; il engendre alors une surface torse, qui est analogue à celle de chaque toron d'un cable, s'il forme une circonférence; il y a trois mouvements, et la courbe à double courbure devient une *hélice serpentante*.

Deuxième classe, *troisième ordre:* Un point mobile sur un cercle qui en parcourt un autre, auquel son plan est toujours normal, donne encore l'hélice annulaire du troisième ordre de la première classe.

Imaginez, sur la surface d'une sphère, deux cercles qui se touchent extérieurement, et dont l'un roule sur l'autre. Soit que le point générateur parcourt la circonférence mobile, soit qu'il y reste fixe, il décrit une *épicycloïde sphérique externe;* elle serait interne, si le véhicule touchait intérieurement la circonférence directrice.

Les dents des roues d'angle, qui composent l'engrenage propre à changer le plan d'un mouvement circulaire, présentent des portions de cônes dont des épicycloïdes sphériques forment les bases.

HÉLICES.

L'hélice cylindrique et l'hélice conique sont, de toutes les courbes à double courbure qui viennent d'être indiquées, les seules que nous étudierons (1); encore s'agira-t-il uniquement des cas où elles se trouvent *régulières*.

HÉLICE CYLINDRIQUE.

530. Aux définitions déjà données (529), on peut ajouter celle-ci: *L'hélice cylindrique régulière est engendrée par un point qui tourne autour de l'axe d'un cylindre circulaire et droit, en glissant sur la surface parallèlement à cet axe, de manière qu'il existe toujours le même rapport entre le chemin circulaire et le chemin rectiligne parcourus dans le même temps.*

L'axe et la circonférence du cylindre sont l'axe et la *base* de l'hélice; l'arc engendré pendant une révolution complète se nomme *spire;* la distance comprise entre les deux extrémités d'une spire est le *pas* de la courbe à double courbure.

Ainsi, la base et le pas d'une hélice sont deux trajets faits dans le même temps, par le point générateur, et leur rapport doit exister entre leurs parties parcourues aussi dans un même temps.

Applications: I. La vis cylindrique a des parties saillantes qui constituent son *filet* et s'engagent dans des rentrants de même forme, pratiqués sur le cylindre creux qu'on nomme *écrou*. Il en résulte un engrenage propre à changer le mouvement circulaire, qui se fait autour de l'axe du cylindre plein, en un mouvement rectiligne selon le même axe, quand l'écrou est fixe et que les arêtes de ses rentrants sont des hélices régulières, ainsi que celles du filet. En effet, l'engagement met alors obstacle à ce qu'un point quelconque de ce filet parcourre une circonférence, par suite du premier mouvement; le même point est obligé de cheminer selon une hélice de l'écrou, et il le peut, puisque cette courbe provient d'un mouvement circulaire, puisqu'elle a tous ses points sur la surface cylindrique dont il fait partie; les autres points du filet se trouvent tous dans les mêmes circonstances, et par conséquent, le cylindre plein marche tout entier dans le sens de son axe, comme les points générateurs des hélices de l'écrou. Ces courbes doivent d'ailleurs être régulières, afin que toutes les spires du filet saillant puissent s'appliquer successivement sur la même spire du filet rentrant.

II. Une corde ou une chaîne qui s'enroule sur le cylindre d'un treuil, ne saurait s'y ployer selon des circonférences, puisqu'elle est plus longue que le périmètre; son axe doit se contourner en spires d'une spirale (411) ou d'une hélice. Mais le peu de stabilité que la forme annulaire des premières donnerait à leur superposition, et l'augmentation qu'un semblable enroulement occasionnerait dans la résistance, font qu'au lieu d'une spirale, l'axe de la corde produit une hélice régulière dont le pas est double de la demi-épaisseur.

531. *L'hélice cylindrique se projette selon la sinusoïde, sur tout plan parallèle à son axe* (appl., p. 324).

Soient A′O′K′G′ la base horizontale de l'hélice (P. IX, F. 19), et AR la projection de l'axe sur un plan vertical. La génératrice droite du cylindre qui aboutit en E′ se projette verticalement selon *e*E, parallèle à AR, et la projection verticale E du point de l'hélice situé sur cette génératrice est nécessairement telle que *e*E égale le chemin fait parallèlement à l'axe dans le temps employé au parcours de l'arc A′E′. Si donc AB est le pas (558), $eE : A'E' :: AB : 2\pi \times A'C$. Or, $eE = AD$, et $DE = D'E'$, sinus de l'arc A′E′. Par conséquent (435), le point E appartient à la sinusoïde qui a AR pour axe et directrice, AB pour base, et la circonférence A′O′K′G′ pour régulatrice.

Probl. (*a*) : *Tracer une hélice cylindrique régulière sur un cylindre donné, plein ou creux.*

Divisez les circonférences des bases du cylindre droit en un même nombre de parties égales, de manière que les points de division de l'une soient sur les génératrices droites tirées par ceux de l'autre; numérotez ces génératrices; adoptez l'extrémité inférieure de la première pour premier point de l'hélice; fixez la longueur du pas; partagez-la en autant de parties égales qu'en ont les bases; portez une de ces parties sur la deuxième génératrice, à partir de la base inférieure; portez deux des mêmes parties sur la troisième génératrice, trois sur la quatrième, quatre sur la cinquième, et ainsi de suite, jusqu'à ce que vous soyez revenu à la première, sur laquelle il faut porter le pas entier; la courbe qui unira tous les points marqués sera une spire de l'hélice demandée, car le rapport du chemin rectiligne au chemin circulaire correspondant, égalera toujours celui du pas à la base (530).

La seconde spire, la troisième, etc., s'obtiennent de la même manière; mais l'origine de chacune doit être le point où se termine la précédente.

Probl. (*b*) : *Tracer la projection d'une hélice cylindrique, sur un plan parallèle à l'axe.*

Décrivez une circonférence C égale à la base de l'hélice (P. IX, F. 19); tirez par le centre une droite CR; portez le pas sur cette droite, d'un point quelconque A en un autre B, et tracez une sinusoïde AEGKOBSU (531) qui ait la circonférence C pour régulatrice, AR pour directrice, et AB pour base (436, probl.).

Si l'on veut que le point A appartienne à la génératrice droite qui perce en A' la base du cylindre, l'arc AEG doit être pointillé, pour exprimer qu'il n'est pas vu; l'arc GKO, situé sur la partie antérieure de la surface cylindrique, se fait plein, et l'arc OBS, placé, comme AEG, sur la partie opposée, est pointillé aussi. Ces différences entre les parties de la projection d'une hélice cylindrique, sont les seules choses qui la distinguent d'une sinusoïde.

Applications : I. L'exécution des grandes vis de bois et même celle de leurs écrous sont des applications du problème (*a*). S'il s'agit d'une vis à *filet carré*, c'est-à-dire d'une vis dont le filet, coupé par un plan méridien du cylindre, donne un carré pour section, on trace d'abord l'hélice que doit produire l'une des arêtes saillantes; puis, portant, à partir de cette courbe et sur toutes les génératrices droites employées, une longueur égale au côté du carré, on marque les points de l'autre arête saillante; enfin, le bois est enlevé en dehors de l'intervalle des deux courbes, de manière à former d'abord deux *surfaces héliçoïdes*, gauches et réglées, dont les génératrices droites, égales au côté du carré, soient perpendiculaires à l'axe, comme les diverses positions du véhicule droit de chaque hélice, puis une seconde surface cylindrique, qui ait pour rayon l'excès du rayon de la première sur la saillie du filet.

Mais les vis de bois ont bien rarement un filet quadrangulaire; il y aurait à craindre que la pression de la partie qui s'engage ou la pression de l'écrou contre la partie qui se dégage, ne la détachât du *noyau*. C'est un triangle équilatéral qui forme ordinairement la section méridienne du filet; le même plan coupe la spire suivante et la précédente selon des triangles contigus au premier; la section du rentrant égale celle de la saillie, et son fond, ou la partie visible du noyau, présente une simple hélice au lieu d'une surface cylindrique.

L'exécution d'une vis à filet triangulaire exige seulement le tracé de l'hélice qui forme l'unique arête saillante. On forme le rentrant triangulaire, compris entre deux spires consécutives, en s'aidant d'une section méridienne du filet, introduite, à diverses reprises, jusqu'à coïncidence complète, dans le creux qui résulte de l'enlèvement du bois.

Quant aux petites vis cylindriques, ordinairement métalliques et à filets carrés, elles sont *filetées* au moyen d'écrous d'acier, appelés *filières*, et leurs écrous sont *taraudés* au moyen de vis-outils d'acier, nommées *tarauds*.

II. Les grandes vis métalliques ont aussi un filet carré. C'est un tour spécial qui les exécute. Le cylindre tourne sur son axe, entre les deux pointes du tour; un engrenage communique le mouvement circulaire à une vis régulatrice, parallèle au cylindre; l'écrou de cette vis, engagé dans deux coulisses parallèles à l'axe, ne pouvant tourner, chemine en ligne droite; l'outil tranchant qu'il porte trace une hélice régulière, car il s'avance d'un pas à chaque rotation complète de la vis régulatrice, et cette rotation est toujours la même fraction de celle du cylindre; enfin, on arrive graduellement à former le filet, en augmentant la saillie du ciseau, chaque fois qu'il recommence son trajet rectiligne. Il suffit d'ailleurs d'imprimer à la vis régulatrice un mouvement inverse, pour ramener l'écrou à son point de départ.

III. L'hélice cylindrique fournit aux arts un excellent moyen de diviser les lignes droites en petites parties égales. Une roue A, qui présente à sa circonférence cent divisions égales, par exemple (P. X, F. 26), fait tourner une vis B de même axe, dont le pas vaut seulement une des divisions, et l'écrou C, qui ne peut que cheminer en ligne droite, porte un indicateur D. Supposez que la règle EF égale la circonférence de la roue; si l'on y marque, à chaque tour, la position de l'indicateur, et que la première, celle du départ, ait répondu à l'extrémité E, cette règle se trouvera divisée en cent parties égales. Voulez-vous avoir les dixièmes de ces parties? Il suffira de marquer la position de l'indicateur chaque fois que dix divisions de la roue auront passé devant un point fixe, car cette roue aura fait le dixième de son tour, et l'écrou se sera avancé d'un dixième du pas.

Du reste, il est visible qu'une erreur quelconque, faite dans la division de la roue sera réduite au centième pour celle de la règle. Si, par exemple, un dixième de la circonférence surpasse le suivant de la fraction $\frac{1}{n}$ d'un centième, le dixième correspondant de DE surpassera le suivant de la fraction $\frac{1}{100n}$ du même centième de la roue ou de DE. Or, en opérant sur la règle, comme sur la circonférence, on commettrait nécessairement de plus graves erreurs dans la division de DE, puisque ses parties sont mille fois moindres que celles de la roue.

IV. Le dessous d'un escalier pratiqué dans une tour ronde est une surface gauche pareille à celle d'une vis carrément filetée (appl. I): on la forme en faisant cheminer sur une hélice régulière, tracée sur la paroi de la tour, une droite qui coupe toujours l'axe du cylindre et fait constamment avec cet axe un angle droit.

V. Lorsque le centre ou tout autre point d'un cercle suit une hélice régulière, à laquelle ce cercle est toujours normal, la circonférence engendre la surface d'un *canal cylindrique et tors*. Telle est la surface d'un serpentin d'alambic, celle d'un ressort en boudin formé d'un fil d'acier, celle de chaque toron d'un câble. L'hélice directrice de cette dernière doit avoir un pas d'autant plus grand qu'il faut donner plus de force à la corde; car, si tous les torons étaient parallèles, leur ensemble opposerait à la rupture une résistance égale à la somme des résistances dont ils sont capables isolément, et s'ils se trouvent *commis* de manière à former des spires très-courtes, la résultante des efforts qu'ils peuvent opposer alors s'éloigne beaucoup de cette valeur maximum.

552. *Les spires d'une hélice cylindrique régulière deviennent des droites égales et parallèles, sur le développement de la surface cylindrique dont elles font partie.*

Partageons la circonférence du cylindre en un grand nombre de parties égales, et portons-les successivement, bout à bout, sur une droite indéfinie; il en résultera une longueur AA′ égale à cette circonférence (P. X, F. 27). Elevons sur AA′, les perpendiculaires AD, A′D′, égales à l'axe du cylindre, et terminons le rectangle AA′D′D; nous aurons le développement de la surface cylindrique, fendue selon la génératrice droite (AD, A′D′), puis étendue sur un de ses plans tangents. Divisons enfin AD, A′D′ en parties égales au pas de l'hélice, et joignons les points de division de AD à ceux de A′D′, par les diagonales des rectangles égaux que forment les parties correspondantes; ces diagonales AB′, BC′, CD′ seront évidemment parallèles, égales, et de plus, elles formeront les développements des spires de l'hélice, si cette courbe commence sur la génératrice droite (AD, A′D′).

Il est clair d'abord que les points A, B′ sont les extrémités de la première spire, puisqu'ils appartiennent à la génératrice droite où elle commence et se termine, et qu'ils s'y trouvent séparés par une longueur A′B′ égale au pas. Quant aux autres points de la droite AB′, tels que *b*, *b*′ par exemple, ils proviennent aussi de points correspondants de la même spire; car, si l'on tire les portions de génératrices droites *ba*, *b′a′*, parallèlement à A′B′, *ab* : A*a* :: *a′b′* : A*a′* :: A′B′ : AA′, et parce que A*a*, A*a′* sont les arcs de cercle qui répondent aux fractions *ab*, *a′b′* du pas, comme la circonférence AA′ répond au pas A′B′, les points *b*, *b′* satisfont à la définition de l'hélice (530).

L'origine et la fin de la seconde spire se trouvent sur la même génératrice droite que celles de la première, et elles en sont respectivement éloignées d'une longueur égale au pas. Par conséquent, le développement de cette seconde spire commence en B et se termine en C′; pour des raisons analogues, celui de la troisième spire a ses extrémités sur C, D′. D'ailleurs, on démontrerait, comme tout à l'heure, que les points intermédiaires de BC′, CD′, proviennent aussi de points correspondants des mêmes spires, étendues sur le plan tangent au cylindre.

Applications : Quand les chaudronniers, les ferblantiers, les cartonniers, etc., ont à tracer une hélice régulière sur le cylindre qu'ils veulent faire d'une feuille mince et rectangulaire AA′D′D (P. X, F. 27), ils doivent porter le pas en A′B′, sur l'un des bords de la feuille, puis tirer AB′; cette droite formera une spire de l'hélice, lorsque le rectangle, étant ployé en cylindre, confondra ses bords AD, A′D′. S'ils prennent ensuite les parties AB, B′C′

égales au pas, la droite BC′ donnera la seconde spire; la troisième résultera du ploiement de la droite CD′, moyennant que les parties BC, C′D′ égalent aussi le pas; ainsi des autres.

Parfois, pour décorer le cylindre, ou pour tout autre motif, on doit y tracer deux hélices régulières égales, qui rampent en sens contraires, et se croisent, tant aux extrémités de chaque spire qu'au milieu. Le développement de l'une s'obtient comme il vient d'être dit; pour avoir celui de l'autre, il suffit de tirer les droites A′B, B′C, C′D.

553. *L'hélice cylindrique régulière n'est pas plus rectifiable que la circonférence; mais il est toujours possible de trouver une droite qui diffère fort peu d'un arc d'hélice donné.*

L'hélice se change en droites sur le développement de la surface cylindrique qui la contient (532); l'exactitude de ce développement dépend de la formation d'une droite égale à la circonférence de la base, et l'égalité ne saurait être parfaite; mais on en approche d'autant plus, et l'arc d'hélice diffère d'autant moins de la partie correspondante, prise sur le développement de la courbe entière, que la circonférence a été décomposée en de plus petits arcs.

PROBLÈME : *Mesurer un arc donné d'hélice régulière.*

Exécutez le développement de l'hélice, ou du moins de la spire dont l'arc donné fait partie (532); déterminez les pieds des génératrices droites du cylindre, qui passent par les extrémités de cet arc; marquez ces pieds *a*, *a′* sur le développement de la circonférence (P. X, F. 27); tirez *ab*, *a′b′*, parallèles à la génératrice droite (AD, A′D′), selon laquelle a été fendue la surface cylindrique; la partie *bb′* du développement AB′ de la spire sera la longueur approximative de l'arc donné.

554. *La surface héliçoïde a pour valeur approximative, la moitié du produit fait avec sa génératrice droite et la somme des deux lignes directrices.*

Que ces directrices soient deux hélices, tracées sur des surfaces cylindriques de même axe, ou une hélice et son axe, deux positions de la génératrice droite forment un quadrilatère qui, si elles se trouvent infiniment rapprochées, est très-peu gauche et peut être considéré comme composé de deux triangles plans: les bases de ces triangles sont des parties infiniment petites des directrices, et la génératrice droite se confond, pour ainsi dire, avec la hauteur de chacun. L'aire du quadrilatère vaut donc la moitié du produit dont les facteurs sont la génératrice droite et la somme des deux parties des directrices. Or, la surface héliçoïde se compose d'une infinité de pareils quadrilatères; par conséquent, cette surface égale à peu près la moitié du produit fait avec sa génératrice droite, hauteur commune à tous les triangles, et la somme de toutes leurs bases, c'est-à-dire la somme des deux directrices.

535. *La surface d'un canal cylindrique et tors égale le produit de la circonférence génératrice et de l'hélice qu'a parcourue le centre* (appl. V, p. 409).

En effet, l'hélice redressée deviendrait l'axe d'un cylindre droit et complet dont le cercle générateur serait la base.

536. *La surface cylindrique d'une spire de vis à filet carré égale le produit de l'une des arêtes saillantes et de sa plus courte distance à l'autre sur le développement* (appl. I, p. 408).

Soit BC′ (P. X, F. 27) le développement d'une spire de l'arête saillante supérieure. Si nous portons le côté du carré de B en E, de C′ en F, la droite EF sera le développement d'une spire de l'arête saillante inférieure (532), et le parallélogramme BC′FE formera le développement de la surface cylindrique d'une spire du filet. Or, $BC'FE = BC' \times BG$, et cette droite BG, perpendiculaire aux bases du parallélogramme, est bien la plus courte distance des deux hélices développées.

537. *Le volume d'un canal cylindrique et tors égale le produit de l'aire du cercle générateur, multipliée par la longueur de l'hélice qu'a parcourue le centre.*

Ce principe résulte évidemment de celui du n° 535.

538. *Le volume d'une spire de filet de vis, carré ou triangulaire, égale le produit de l'aire du carré ou du triangle équilatéral, multipliée par la circonférence de la surface cylindrique sur laquelle se trouve le centre de gravité du profil.*

Effectivement, si l'on redressait les hélices, la spire de filet deviendrait un prisme oblique dont la base et la hauteur seraient respectivement le profil et la circonférence désignée.

HÉLICE CONIQUE.

539. *L'hélice conique régulière est engendrée par un point* E (P. X, F. 28) *qui tourne autour de l'axe* SA *d'un cône circulaire et droit, en glissant sur la surface selon les génératrices droites, de manière qu'il existe toujours le même rapport entre le chemin circulaire en degrés et le chemin rectiligne parcourus dans le même temps* (529).

Nous supposons au sommet S du cône l'origine de la courbe: le point générateur E s'en éloigne sans cesse. Quand le contraire a lieu, le sommet se trouve encore sur l'hélice, puisqu'il fait partie de la surface conique et que le point générateur ne peut en sortir, mais alors ce même sommet ne répond pas toujours à la fin d'un tour.

L'axe SA du cône forme aussi celui de l'hélice conique; le pas est la partie SB de génératrice droite, comprise entre le sommet et la position E′ du point générateur, après un tour complet; la circonférence BD, chemin circulaire relatif au parcours du pas SB, forme la base de la courbe à double courbure. Le rapport des 360 degrés de cette base au pas égale donc celui de tout autre trajet circulaire, estimé en degrés, au chemin rectiligne parcouru dans le même temps; ou bien le rapport de la longueur de cette base au pas égale celui de tout autre chemin circulaire, mesuré sur la même circonférence, au chemin rectiligne simultané.

APPLICATIONS : I. Les vis à bois, c'est-à-dire celles qui sont destinées à fixer, sur le bois, des feuilles métalliques, par exemple, ont un filet triangulaire dont l'arête saillante est une hélice conique et régulière, parce que, devant tarauder elles-mêmes leurs écrous, leurs logements, pour en être plus difficilement arrachées, il faut qu'elles puissent percer et couper.

II. Il existe des tire-bouchons qui ont la forme des vis à bois, pour les mêmes motifs. D'autres présentent un cône très-effilé, ployé en hélice conique; leur surface est celle d'un *canal conique et tors*, qu'on peut concevoir engendrée par une circonférence dont le rayon augmente graduellement, pendant que le centre parcourt une hélice conique, à laquelle le plan du cercle est toujours normal.

Il en est de même des cannelures circulaires formées sur les colonnes torses, car ces supports sont des troncs de cône (appl. IV, p. 320).

III. La *fusée* sur laquelle s'enroule, du petit bout au gros bout, la chaîne d'une montre qu'on remonte, offre une rampe en surface *héliçoïde*, qu'engendre le véhicule droit d'une hélice conique régulière (529). Il en doit être ainsi, afin que le ressort spiral, renfermé dans le barillet (411, appl.), n'éprouve pas plus de difficulté à faire tourner la fusée, quand il est en partie détendu, qu'au moment où il a le plus d'énergie.

La même surface forme le dessous des escaliers pratiqués dans les clochers coniques, nommés *flèches*.

IV. C'est en hélice conique qu'on enroule les tresses étroites et plates qui composent les troncs de cône des chapeaux de paille portés par les hommes. Pour la bonne exécution de la surface, l'un des bords de la tresse doit être un peu plus étendu que l'autre.

V. Les coquillages appelés *cônes* présentent des hélices coniques qui, dans quelques-uns, ont de la régularité, et les plantes grimpantes forment autour des arbres des courbes de même nature, parfois régulières aussi.

540. *L'hélice conique régulière se projette, sur tout plan parallèle à son axe, selon une sinusoïde qui a pour directrice la projection de cet axe, et pour régulatrice une circonférence du cône* (435) *: les distances de la directrice au point générateur sont les projections coniques des sinus d'arcs de la régulatrice, faites sur le véhicule droit, et ces arcs sont proportionnels aux chemins parcourus sur la directrice.*

Prenons la circonférence S′ pour projection horizontale du cône

(P. X, F. 28), le triangle symétrique FSG pour projection verticale, et supposons que le point générateur de l'hélice, partant du sommet S et de la génératrice droite SA, S'A', tourne dans le sens A'G'F'. Quand il sera, pour la seconde fois, sur la génératrice droite SF, S'F', il aura parcouru $\frac{14}{8}$ de 360° et le chemin droit SH, égal aux $\frac{14}{8}$ du pas SB; la projection verticale de sa position sera donc le point H. Passant ensuite sur la génératrice droite SI, S'I', il aura parcouru $\frac{15}{8}$ de 360° et le chemin droit SK, égal aux $\frac{15}{8}$ du pas; la projection verticale de sa nouvelle position sera l'intersection L de SI et de KM, projection de la circonférence qui contient K. Ainsi, L, H sont les projections de points situés sur l'hélice conique, et les chemins circulaires relatifs à ces points ont même rapport que SK, SH. Mais $\frac{15}{8}.360° : \frac{14}{8}.360° :: A'G'F'A'G'I' : A'G'F'A'G'F'$, et SK : SH :: SN : SO. Donc,

$$A'G'F'A'G'I' : A'G'F'A'G'F' :: SN : SO.$$

D'ailleurs, LN, HO sont les projections coniques, faites sur KN, HO, des sinus I'P, F'S', ou IA, FA, des arcs A'GF'A'G'I', A'GF'A'G'F'. Par conséquent, H, L appartiennent bien à la sinusoïde qui a SA pour directrice, et la circonférence S' pour régulatrice: ce sont les positions du point générateur de cette courbe, quand le véhicule droit, perpendiculaire à SA, a parcouru SO, SN.

Si l'on veut regarder le point A comme l'origine de la sinusoïde, il faut le prendre aussi pour celle de l'hélice conique; les chemins circulaires sont alors proportionnels aux arcs A'I', A'I'F' qui ont également pour sinus I'P, F'S'; les chemins rectilignes correspondants valent FK, FH; A'I' : A'I'F' :: 1 : 2 :: FK : FH :: AN : AO, et de là résulte que L, H sont les positions du point générateur de la sinusoïde, quand le véhicule a parcouru AN, AO.

Probl. (a): *Tracer une hélice conique régulière sur un cône donné.*

Divisez la circonférence de la base du cône en un certain nombre d'arcs égaux, huit par exemple; partagez le pas en un même nombre de parties égales; joignez au sommet, les points de division de la base; numérotez les génératrices droites, en allant dans le sens que doit suivre le point générateur, partant du sommet; portez, de ce même sommet, un huitième du pas sur la seconde génératrice droite, deux huitièmes sur la troisième, trois huitièmes sur la quatrième, et ainsi de suite, jusqu'à ce que vous soyez revenu à la première, sur laquelle il faut porter toute la longueur du pas. La courbe qui unira tous les points marqués et le sommet, sera une spire de l'hélice conique régulière, car le rapport du chemin rectiligne au chemin circulaire, mesuré en degrés, égalera toujours celui du pas à 360° (539).

La seconde spire, la troisième, etc., s'obtiennent de la même manière, et l'origine de chacune est le point terminal de la précédente.

PROBL. (*b*) : *Tracer la projection d'une hélice conique, sur un plan parallèle à l'axe.*

Tracez une circonférence S′ égale à la base du cône (P. X, F. 28) ; divisez-la en un certain nombre d'arcs égaux, huit par exemple ; projetez le centre et les points de division sur une droite FG, prise pour ligne de terre ; portez la hauteur du cône sur le prolongement de S′A, à partir de A, pour avoir la projection S du sommet ; joignez S aux points marqués sur FG ; prenez, sur SF, projection d'une génératrice extrême, des longueurs SB, BF, etc., égales au pas ; divisez chacune en huit parties égales ; tirez, par les points de division, des parallèles à FG, et numérotez-les de S en B, de B en F ; numérotez aussi les points de la circonférence S′, à partir de celui A′ qui appartient à la génératrice sur laquelle commencent et finissent les spires, et en allant dans le sens de la marche du point générateur. L'intersection de chaque droite parallèle à FG et de la projection de la génératrice qui porte le même numéro, sera un point de l'hélice conique, projetée sur le plan vertical parallèle à F′G′.

Par exemple, les intersections de SI, projection de la sixième génératrice et de la huitième, avec les parallèles 6, 8, comprises entre S, B, donnent les points *e*, *e′* de la première spire, et les intersections de SI avec les parallèles 6, 8, comprises entre B, F, sont les points *l*, L de la seconde spire.

541. *Les spires d'une hélice conique régulière deviennent, sur le développement de la surface du cône, des courbes planes dont l'écartement se trouve partout égal au pas, s'il est mesuré selon les rayons du secteur.*

Divisons la circonférence de la base du cône en un grand nombre de parties, et portons-les successivement, bout à bout, sur un arc indéfini, décrit avec un rayon qui égale une génératrice droite. Il en résultera une portion de circonférence $A'F'A'_{,}$ de même longueur que le périmètre de la base (P. X, F. 29), et si nous joignons le centre S aux extrémités A', $A'_{,}$, le secteur $SA'F'A'_{,}$ sera le développement de la surface conique, fendue selon la génératrice (SA', $SA'_{,}$), puis étendue sur un de ses plans tangents.

Maintenant, portons le pas de l'hélice de S en E′, de E′ en A′ ; divisons ces longueurs en un certain nombre de parties égales, huit par exemple, et partageons de même la base $A'F'A'_{,}$ du secteur. Les arcs décrits de S, avec S.2, S.3, S.4, ... SE′, SE′.2, SE′.3, etc., entre SA', $SA'_{,}$, seront les développements d'autant de circonférences du cône, comme $A'F'A'_{,}$ est celui du périmètre de la base, et les rayons S.I, S.II, S.III, etc., donneront les génératrices rabattues sur le plan tangent.

Or (540, probl. *b*), tout point de la première spire de l'hélice conique est, sur le cône, l'intersection d'une circonférence et d'une génératrice de même numéro ; les points de la seconde spire, de la troisième, etc., situés sur la même génératrice, sont les intersections de cette droite et des circonférences de même numéro, relatives au second pas, au troisième, etc. Donc, le point E, intersection de S.VII et de l'arc 7.E, décrit avec S.7, appartient au développement de la première spire; l'intersection H de S.VII et de l'arc 7.H, décrit avec SE'.7, est sur le développement de la seconde spire; et comme le numérotage suppose que les spires commencent et finissent sur la génératrice (SA', SA'_1), selon laquelle le cône a été ouvert, E', intersection de SA' et l'arc $E'E'_1$, décrit avec le pas SE', est l'origine de la seconde spire; E'_1, A'_1, intersections de SA'_1 et des arcs $E'E'_1$, $A'A'_1$, décrits avec SE', 2SE', sont les points où finissent les deux premières spires. Enfin, c'est du centre S que part la courbe développée, puisque l'hélice part du sommet de la surface conique.

Ainsi, la première spire donne sur le développement, la courbe SEE'_1, et la seconde, la courbe $E'HA'_1$. Or, l'écartement de ces courbes, pris sur le rayon S.VII du secteur,

$$EH = SH - SE = SE'.7 - S.7 = \tfrac{14}{8}SE' - \tfrac{6}{8}SE' = SE';$$

l'écartement

$$el = Sl - Se = SE'.6 - S.6 = \tfrac{13}{8}SE' - \tfrac{5}{8}SE' = SE';$$

l'écartement

$$E'_1A'_1 = SA'_1 - SE'_1 = SA' - SE' = 2SE' - SE' = SE',$$

et il en est de même pour tous les autres.

Application : Lorsque les ouvriers qui confectionnent des cônes avec des feuilles minces, veulent avoir une hélice régulière sur une surface conique, ils doivent tracer, sur la feuille étendue, un secteur de cercle $SA'F'A'_1$ (P. X, F. 29), dont la base égale le périmètre de celle du cône et dont le rayon ait la longueur d'une génératrice droite; diviser l'arc $A'F'A'_1$ et le pas donné SE' en un même nombre de parties égales; tracer les rayons et les arcs qui répondent aux points de division; marquer les intersections des rayons et des arcs de même numéro; puis unir par des courbes SEE'_1, $E'HA'_1$ le sommet et tous les points ainsi déterminés.

Quand le secteur sera ployé de façon à former un cône, le rayon SA'_1 s'appliquera le long du rayon SA'; le point terminal E'_1 de la première spire viendra se confondre avec l'origine E' de la seconde, puisque $SE'_1 = SE'$; le point terminal A'_1 de la seconde tombera sur l'origine A' de la troisième; les deux courbes $SE'E'_1$, $E'HA'_1$ en formeront une seule qui s'étendra du sommet S au point A', en faisant deux fois le tour du cône, et cette courbe unique sera bien une hélice conique régulière, car, pour ses points E, E'_1, par exemple, $SE = \tfrac{6}{8}SE'$, $SE'_1 = \tfrac{8}{8}SE'$, l'arc $7.E = \tfrac{6}{8} \times 360^\circ$, l'arc $E'E'_1 = \tfrac{8}{8} \times 360^\circ$, de sorte que

$$7.E : SE :: E'E'_1 : SE',$$

c'est-à-dire comme la base de l'hélice est au pas (539).

542. *L'hélice conique régulière est encore moins rectifiable que l'hélice cylindrique* (533).

Pour obtenir une ligne droite égale à une spire de l'hélice conique, il faut la développer et rectifier la courbe qui en résulte. Or, le développement exige le changement de la circonférence, base du cône, en un arc de cercle. Il y a donc deux sources d'erreur, et l'approximation, toutes choses égales d'ailleurs, ne peut être aussi grande que pour l'hélice cylindrique, dont la rectification nécessite seulement celle d'une circonférence.

543. *La surface courbe et le volume d'un canal conique et tors* (539, appl. II) *valent la surface et le volume d'un cône ou d'un tronc de cône qui a pour bases les cercles extrêmes, et pour axe une droite égale à l'hélice des centres.*

Il est clair, en effet, que le canal tors, étant redressé, deviendrait un cône ou un tronc de cône, selon qu'il se terminerait par un cercle et un point ou par deux cercles.

La génératrice droite à employer comme facteur de la demi-somme des circonférences extrêmes, dans le mesurage de la surface, est l'hypothénuse d'un triangle rectangle formé avec la différence des rayons de ces circonférences et l'hélice des centres rectifiée.

544. *La surface gauche d'une rampe héliçoïde conique* (539, appl. III) *égale, approximativement, la moitié du produit fait avec la moyenne des deux génératrices droites extrêmes et la somme des deux limites latérales, qui sont l'axe et une hélice conique régulière ou deux hélices.*

Partageons la surface en quadrilatères dont deux des côtés soient les éléments e, e' des limites latérales, les deux autres étant des positions de la génératrice droite infiniment rapprochées, et soient g', g'', g''', *etc.*, les différentes longueurs de cette génératrice, terminée aux points milieux des éléments e, e'.

D'après les considérations du n° 534,

le premier quadrilatère vaut à fort peu près $\frac{e+e'}{2}g'$,

le second .... $\frac{e+e'}{2}g''$,

le troisième .... $\frac{e+e'}{2}g'''$,

....

le dernier .... $\frac{e+e'}{2}g^{(n)}$,

et la surface héliçoïde

$$S = \frac{e+e'}{2}[g'+g''+g'''.....+g^{(n)}].$$

Mais, puisque la longueur de la génératrice droite varie uniformément,

$$g' + g'' + g''' \ldots\ldots + g^{(n)} = ng,$$

g représentant la moyenne de toutes les longueurs, ou, ce qui est la même chose, la moyenne des deux extrêmes. Par conséquent,

$$S = \frac{e + e'}{2} ng = \frac{(ne + ne')g}{2}.$$

Or, ne, ne' sont évidemment les longueurs des deux limites latérales.

FIN.

ADDITIONS.

PAGE 156.

243'. *Les quarrés numériques de deux cordes parallèles à l'axe déclinant d'une hyperbôle, ont même rapport que les produits des deux parties formées par chacune sur l'axe transverse.*

Ainsi (P. VI, F. 18), $\overline{HI}^2 : \overline{KL}^2 :: OB \times OA : PA \times PB$.

(Voyez la démonstration au n° 293.)

243''. *Si l'on prend les asymptotes d'une hyperbole pour axes des coordonnées* (6), *l'ordonnée d'un point quelconque de la courbe égale la somme des quarrés numériques des deux demi-axes, divisée par le quadruple de l'abscisse correspondante.*

Par exemple (P. IX, F. 12),

$$GH = \frac{\overline{SB}^2 + \overline{SC}^2}{4SH},$$

et lorsque l'hyperbole est équilatère (240),

$$GH = \frac{\overline{SB}^2}{2SH}.$$

Donc, *dans l'hyperbole équilatère, rapportée à ses asymptotes, l'ordonnée d'un point quelconque égale la troisième proportionnelle du double de l'abscisse et du demi-axe transverse.*

(Voyez la démonstration au n° 422.)

PAGE 161, PROBLÈME (*d*).

Solution 2: Construisez, sur le demi-axe transverse AS, un triangle rectangle dont l'hypothénuse soit l'abscisse KS du point donné E; puis, cherchez une quatrième proportionnelle au troisième côté de ce triangle, au demi-axe transverse et à l'ordonnée EK. Vous obtiendrez le demi-axe déclinant CS, et vous acheverez comme dans la première solution.

Démonstration : Le troisième côté du triangle rectangle vaut

$$\sqrt{(\overline{KS}^2 - \overline{AS}^2)}.$$

La construction donne la proportion

$$\sqrt{(\overline{KS}^2-\overline{AS}^2)} : AS :: EK : CS,$$

et cette autre

$$\overline{KS}^2-\overline{AS}^2 : \overline{AS}^2 :: \overline{EK}^2 : \overline{CS}^2,$$

ou

$$\overline{EK}^2 : \overline{KS}^2-\overline{AS}^2 :: \overline{CS}^2 : \overline{AS}^2.$$

Or, celle-ci est conforme au principe 243. Par conséquent, la quatrième proportionnelle CS est bien le demi-axe déclinant.

Page 184, application II.

Il serait mieux encore que FE, le dernier des rayons lumineux reçus par le réflecteur, pût être réfléchi selon EH′. Or, on obtiendrait cet effet, en prenant G′ pour second foyer de l'hyperbole, et appliquant le problème (*c*) du n° 248.

Page 270.

Le n° 390 doit être terminé comme il suit.

Considérons le point E′, relatif à l'incidence F′. L'excès de l'angle droit CFH sur AFH est AFC; l'excès d'un angle droit sur EFH est l'opposé au sommet de CFG. Par conséquent, la tangente FH du cercle C forme la bissectrice de l'angle AFE; il en est de même de la tangente F′H′ pour l'angle AF′E′, et comme AF, AF′ égalent respectivement EF, E′F′, le triangle AFL = EFL, le triangle AF′L = E′F′L, LE = LA = LE′, les trois points E, E′, A sont sur une circonférence décrite de L, et la droite LP, tirée de ce centre au milieu de la corde EE′, la coupe d'équerre.

Or, si E′ se trouvait sur EK, une parallèle AQ à cette droite, et le prolongement F′R de AF′ formeraient deux triangles égaux AF′Q, E′F′R, ce qui donnerait AF′ = E′F′ = F′Q. Ainsi, AF′Q serait symétrique, et CF′, bissectrice de l'angle F′, aboutirait d'équerre au milieu de EE′. Mais, pour qu'elle ne concourût pas avec la perpendiculaire LP, abaissée de L, le point R devrait se trouver entre E, E′, à une distance du premier de ces points qui fût double de l'écartement des deux perpendiculaires, et cette dernière circonstance est impossible, parce que AR, coupant CF′, ou concourant toujours avec la parallèle FE, couperait EE′ bien plus près de E que F′ ne l'est de FE, et qu'en outre la distance de F′ à FE est évidemment inférieure au double de celle F′L du même point à la parallèle LP, puisque F′L = LF, oblique sur FE.

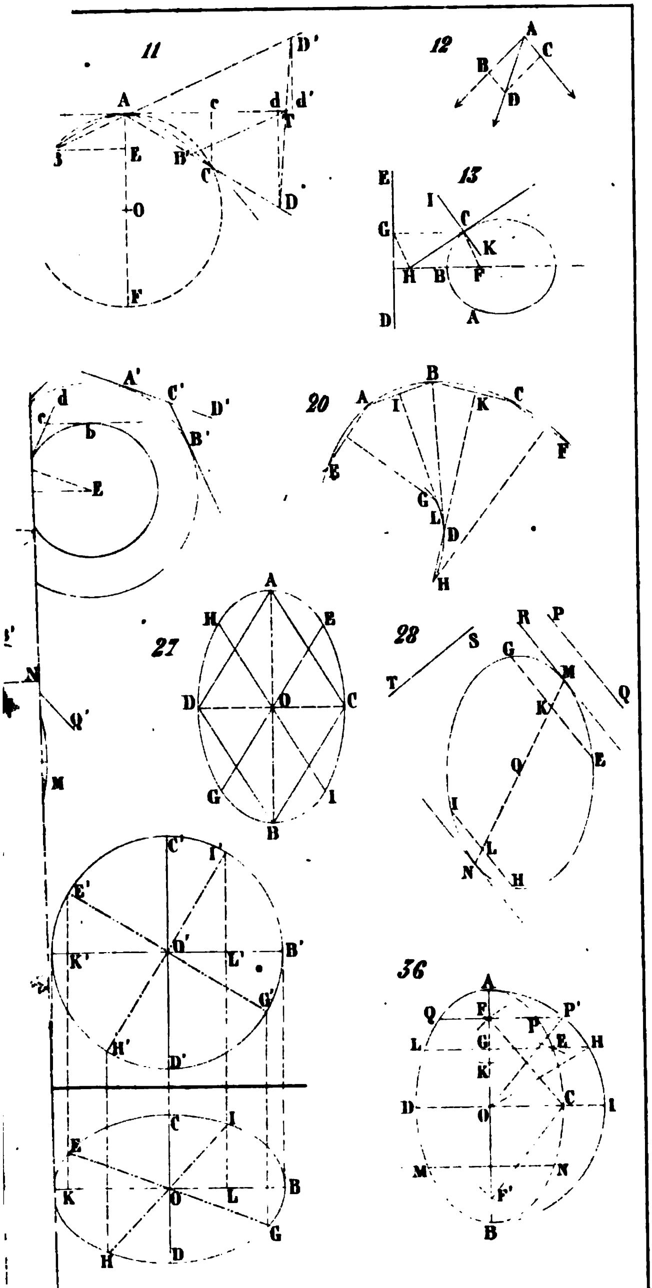
ERRATA.

Page	Lig	AU LIEU DE	LISEZ :
4	4	figure 20	figure 22
4	10	OK	PK
7	3	(P. I, F. 11)	(P. I, F. 12)
11	38	(P. I, F. 17)	(P. I, F. 19)
13	27	seront cordes	seront sécantes
33	7	*Observation :* Le compas d'ellipse	Le compas d'ellipse
40	3	et K sur MN	et K' sur MN
41	6	d'un diamètre égal au plus petit	d'un rayon égal à OK
50	27	droite donnée RS	droite donnée ST
64	17	et tendra aussi	et l'angle B tendra aussi
76	14	FE, HF se coupent	FE, HE se coupent
90	2	LK : HK :: HK DK,	LK : HK :: HK : DK,
92	33	*est une ellipse.*	*est une ellipse, lorsque le premier plan coupe toutes les droites projetantes.*
104	7	et de O' en D;	et de O' en D';
	9	les droites d'équerre AB, CD	les droites d'équerre AB, CD'
	11	L'intersection O	L'intersection O'
	13	double de IO	double de IO'
106	2	deux points symétriques G, H,	deux points symétriques H, H',
	6	GE, HE	HE, H'E
112	32	Reste donc à faire voir que, placées comme elles le sont dans la figure, les deux courbes	Reste donc à faire voir qu'alors les deux courbes
	38	qui projette la seconde	qui produit la seconde
122	34	QN' normale de l'ellipse	Q'N' normale de l'ellipse
128	25	(P. V, F. 8)	(P. V, F. 8 *bis*)
	32	pour la section droite faite selon cette ligne.	pour la section faite selon cette ligne, perpendiculairement au plan ESK.
139	21	du plan vertical HI	du plan vertical HPI
142	16	sur $a''b''$.	sur $a'''b''$.
155	11	$GP \times G'O$	$G'P \times G'O$
156	32	*Le paramètre* EF	*Le paramètre* EG
161	19	Appliquez le problème	*Solution* 1: Appliquez le problème
165	8	le paragraphe precédent,	le paragraphe précédent,
	24	considérées de leurs concours au contact.	considérées de leur concours aux contacts.
166	36	devrait croiser l'asymptote SY',	devrait croiser l'asymptote SY,
167	6	opposé a HI	opposé à HI
177	25	les angle HEK,	les angles HEK,
181	11	et de l'axe transverse ;	et de l'axe déclinant ;
197	10	$+(n-1)^2\frac{\overline{KS}^3}{n^3}$.	$+(n-1)^2]\frac{\overline{KS}^3}{n^3}$.

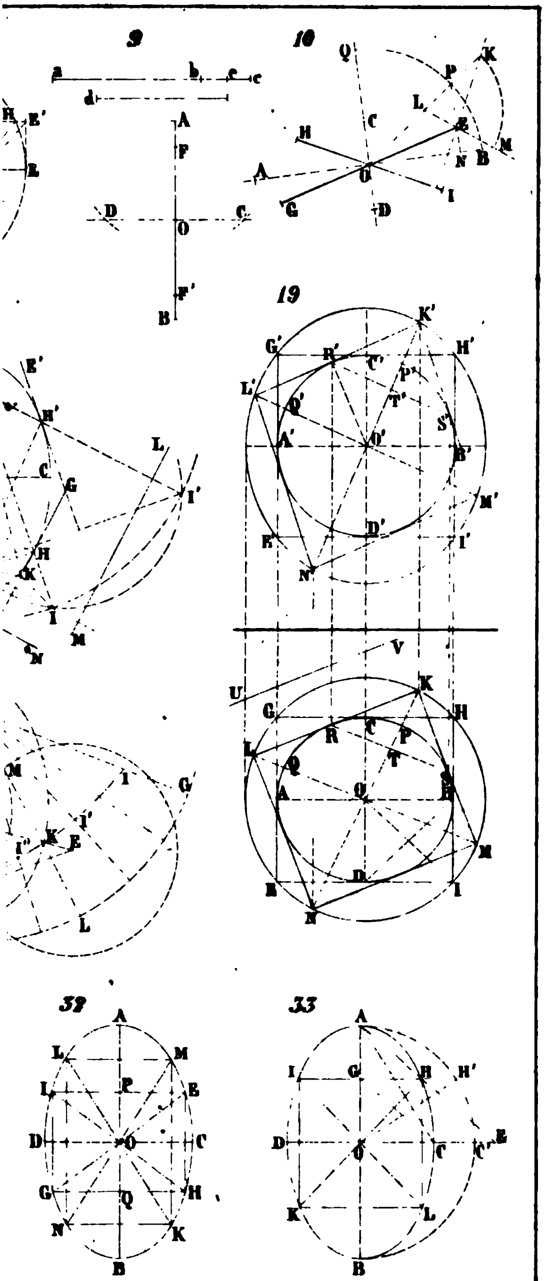
198	23	ainsi qu'il le fait	ainsi qu'il fait
202	21	et l'on aurait GO = FH,	et l'on aurait GO = G'H,
214	19	une perpendicicnlaire à DF,	une perpendiculaire à DF,
239	17	par le milieu N de HI.	par le milieu M' de HI.
274	37	le sinus de l'angle EHF	le sinus de l'angle $\frac{1}{2}$ EHF
	38	le sinus de l'angle AHF = CFA.	le sinus de l'angle $\frac{1}{2}$ AHF = CFA.
283	21	se confondent avez le point	se confondent avec le point
	25	le croisement O.	le croisement O ; car les arcs OE', OE'' ont évidemment, au point O, une tangente commune.
313	32	relative à l'origine B,	relative au point G,
317	23	(P. XI, F. 13)	(P. IX, F. 13)
348	4	au talon et au tenon.	au talon, au tenon et au très-petit arrondissement du bout C.

TABLE DES MATIÈRES.

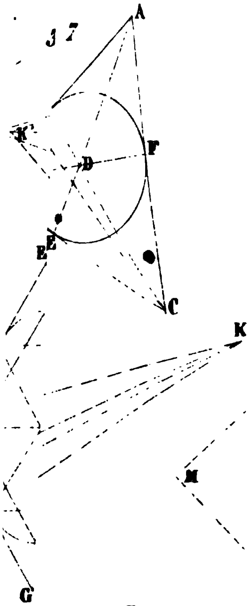
FIN DU VOLUME.


11
12
13
20
27
28
36

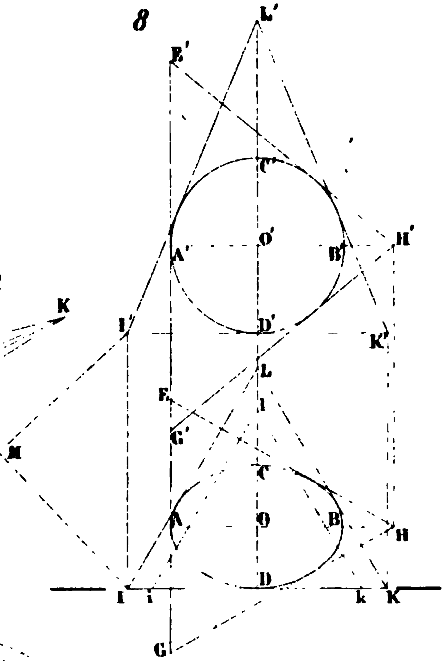
P. II.



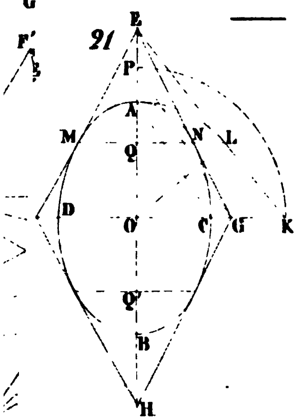
37



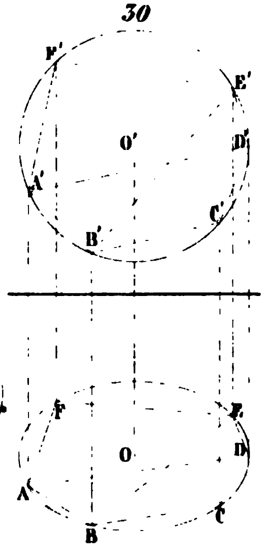
8



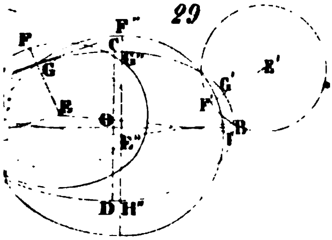
21



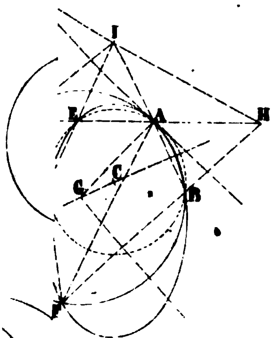
30



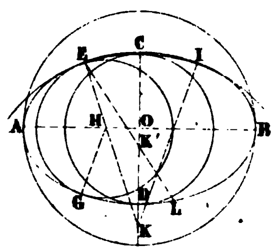
29



Metz Lith. Etienne.

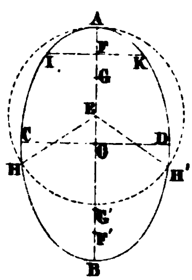


7

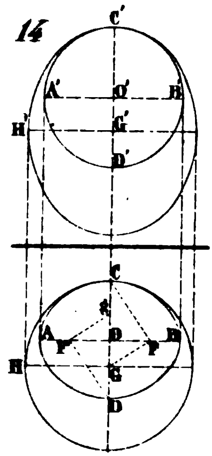


16

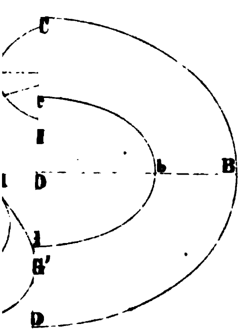
13



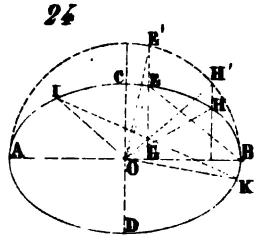
14



3

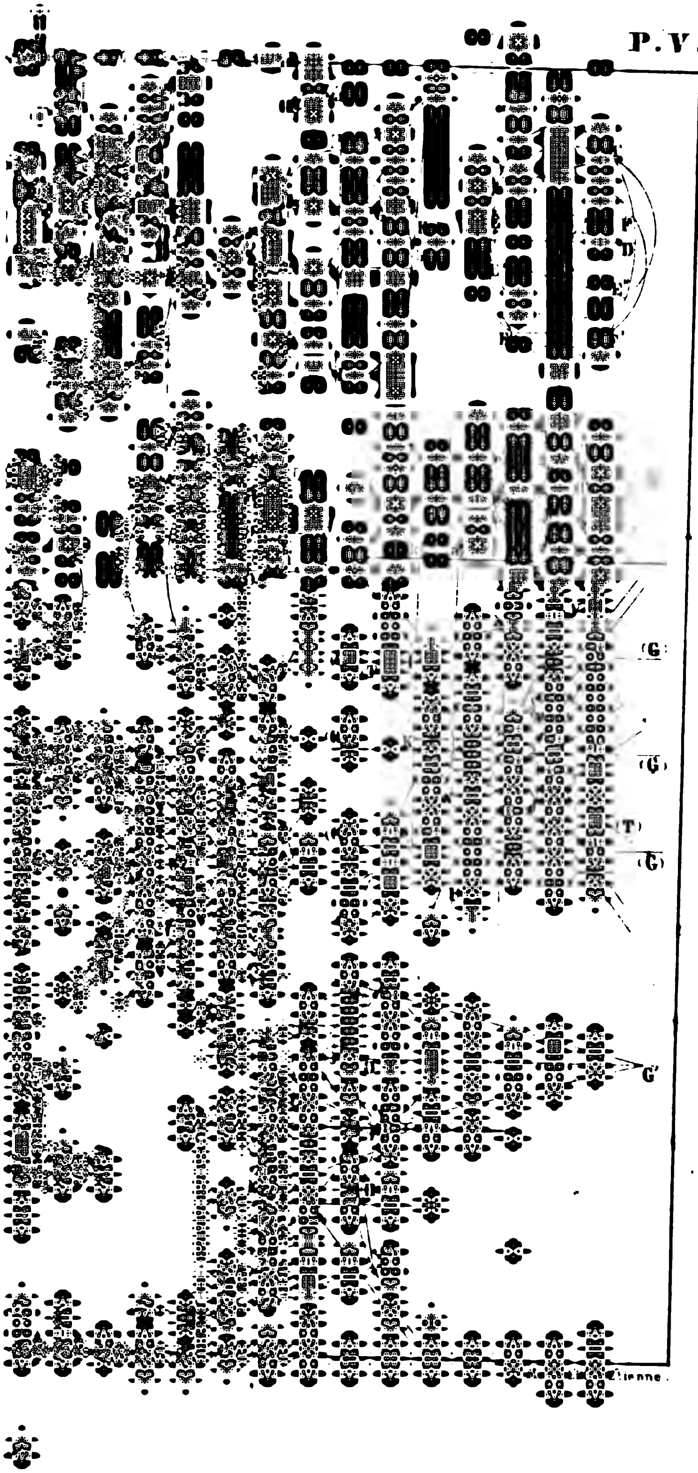


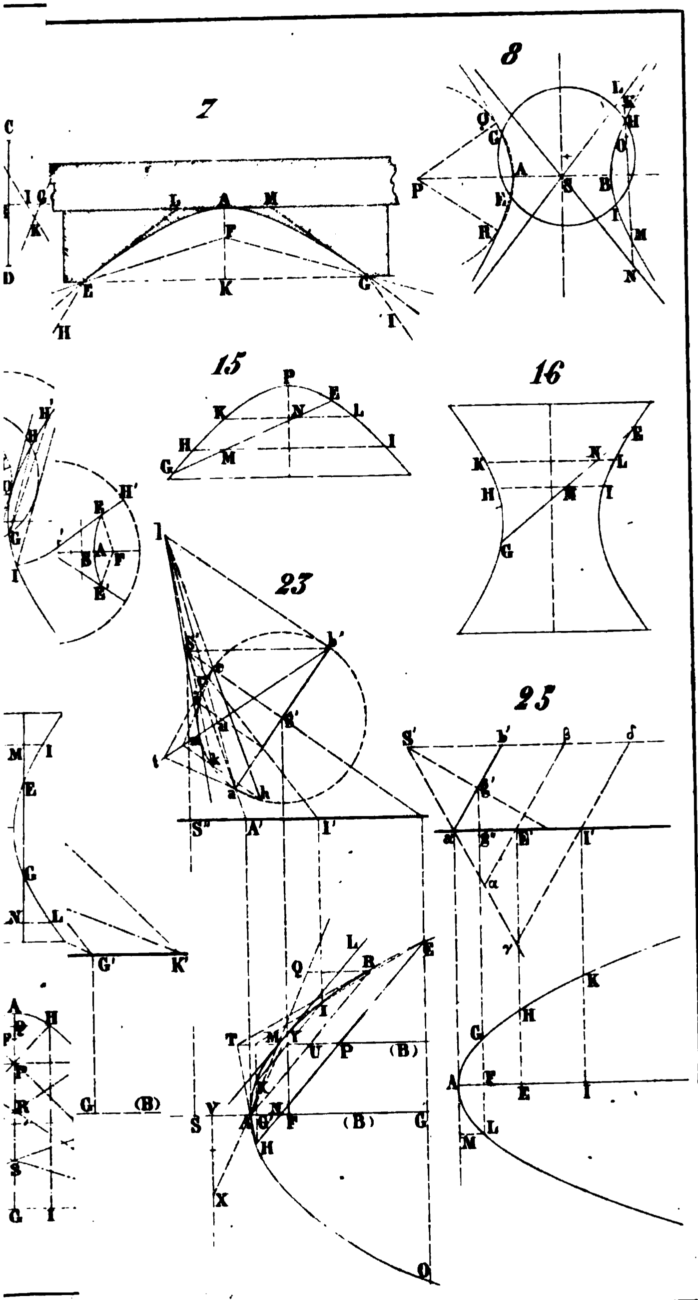
24



Metz Lith Etienne.

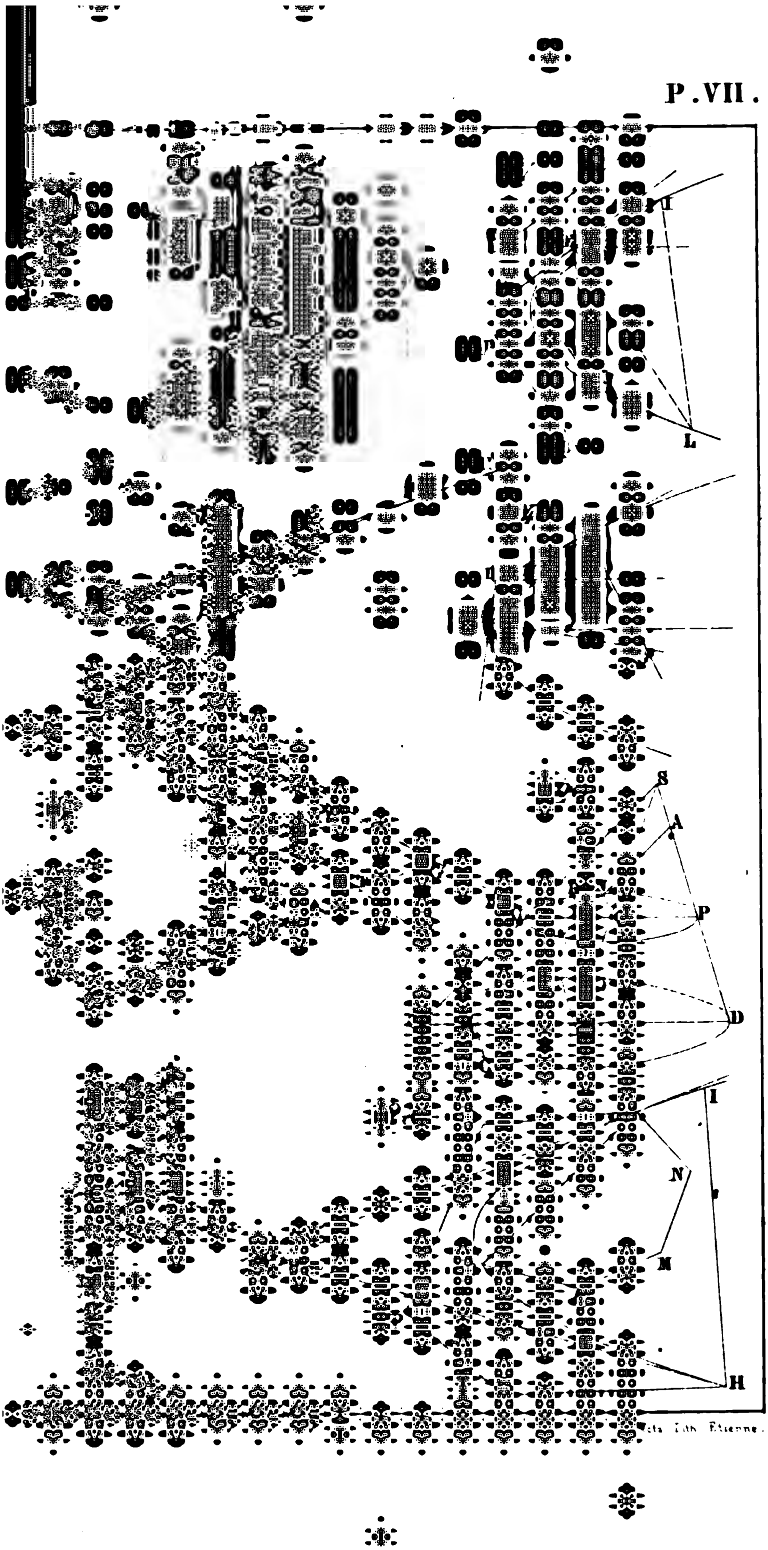
P. V.

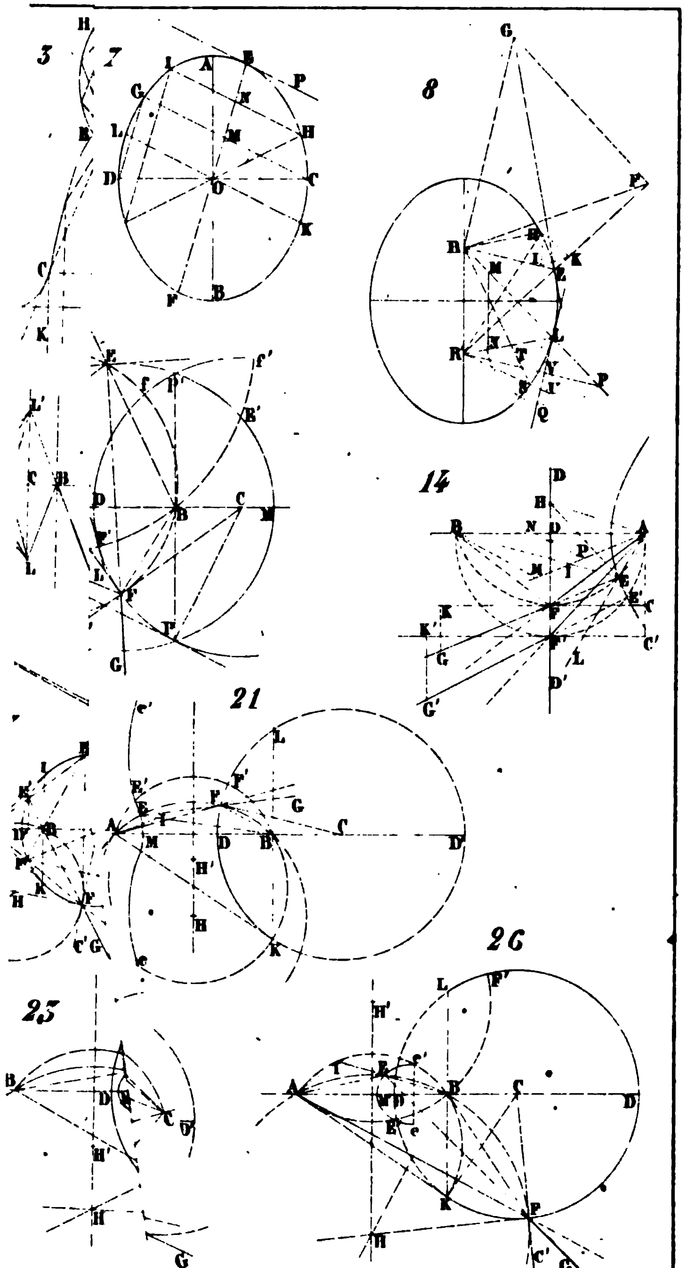


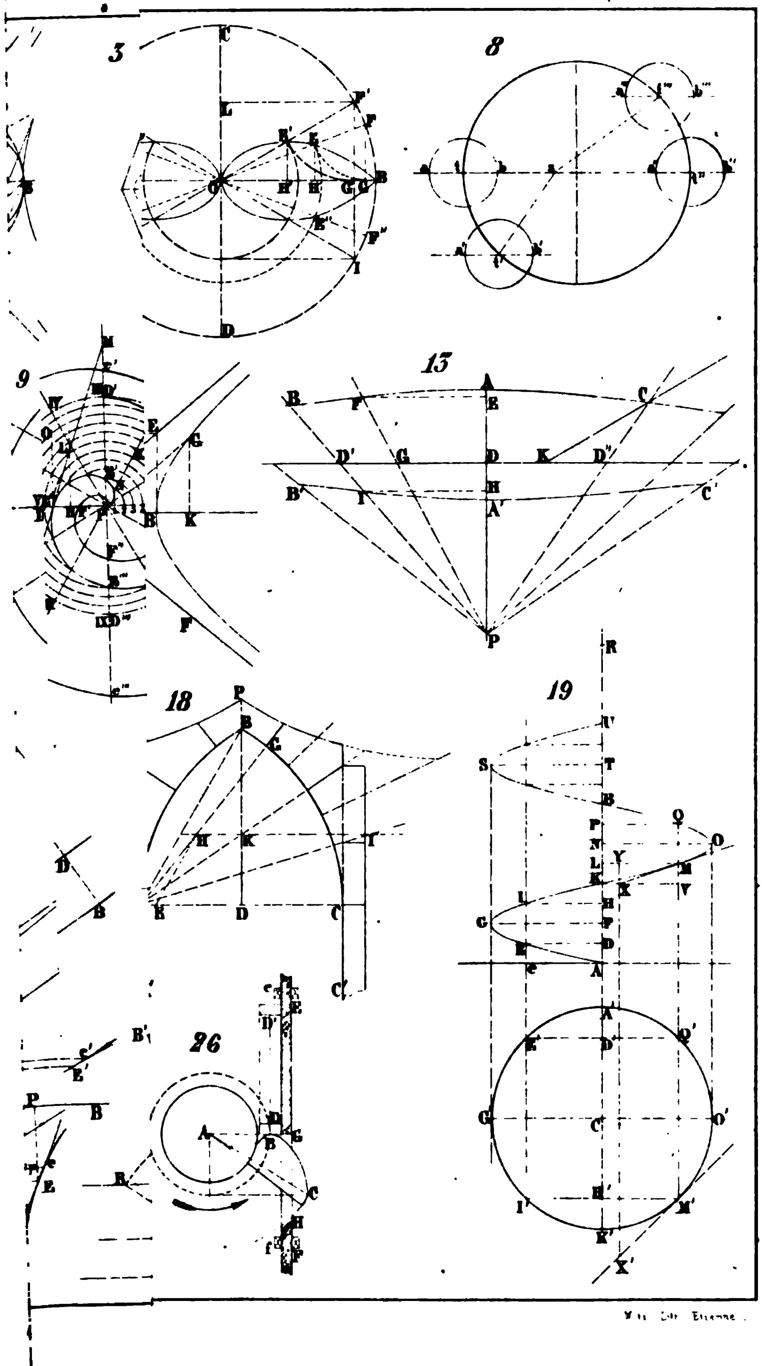


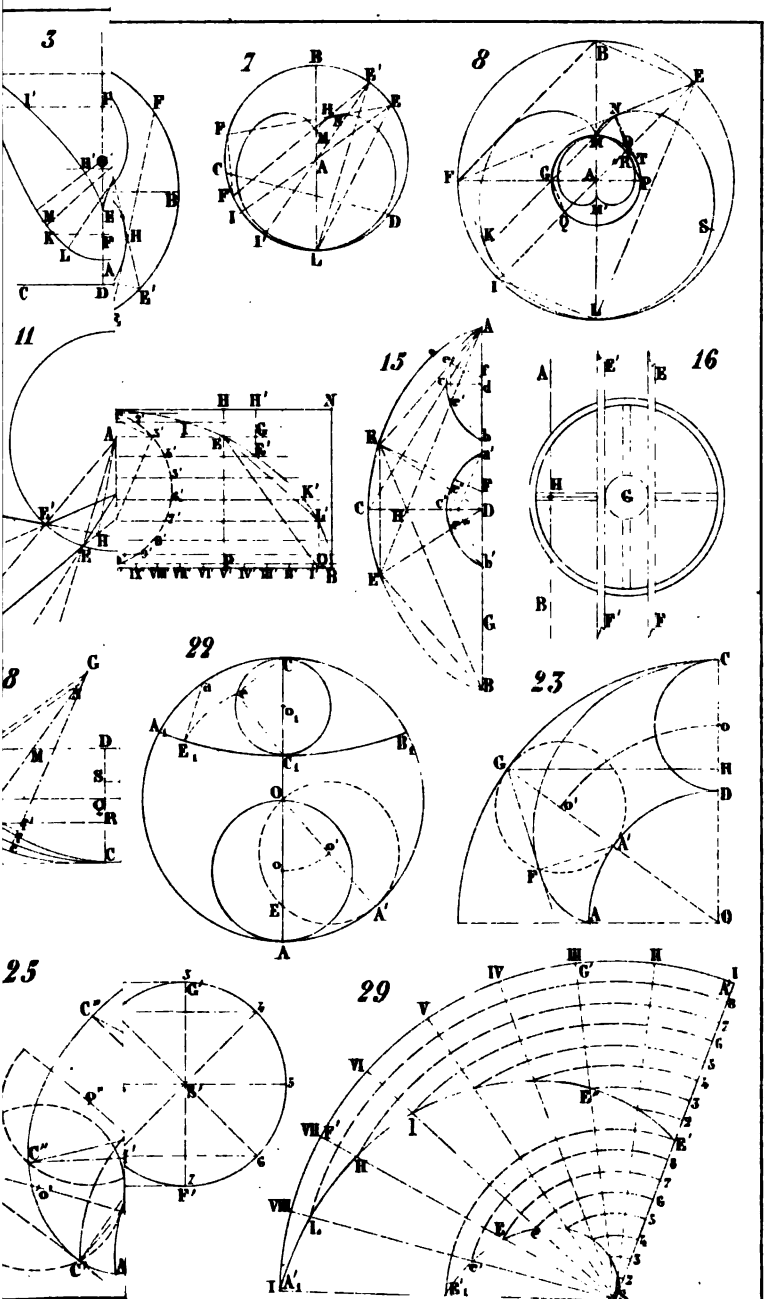
Metz Lith Etienne

P. VII.




3
7
8
14
21
23
26


3
8
9
13
18
19
26


3
7
8
11
15
16
8
22
23
25
29